MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

43. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1938

QA1
188
.43

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

43. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1938

Inhaltsverzeichnis

Seite

Berichtigungen zu Band 40, S. 269—278 und Band 43, S. 32—37 792

Churchill, Dr. R. V., Ann Arbor, Michigan (USA.), University (Department of Mathematics): Additional notes on the inversion of the Laplace transformation 743

Dobsch, Dr. O., Prag XVIII (Č.S.R.), Střešorická 31: Matrixfunktionen beschränkter Schwankung 353

Eichler, Dr. M, Halle a. d. S., Universitätsplatz 16: Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren 102

Eichler, Dr. M., Halle a. d. S., Universitätsplatz 16: Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme 481

Forster, Dr. H., München, Lachnerstr. 17: Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes 271

Ganapathy Iyer, Dr. V., Chalapurum P. O. (Calicut, Madras, Südindien), Mala Puthan Kovilakam, Mankav: On the class of integral functions of finite order having the same zeroes as a given function and whose derivatives have the same zeroes as the derivative of the given function 32

Gericke, Dr. H., Freiburg i. Br., Ludwigstr. 10: Über ein Konvexitätskriterium 110

Haack, Dr. W., Charlottenburg 2, Berliner Straße 22: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe V. Ein Strahlenkomplex und seine Normalenkomplexe . . 228

Hahn, Dr. W., Berlin-Spandau, Wörther Straße 12: Über höhere Ableitungen von Orthogonalpolynomen 101

Hantzsche, Dr. W., Dresden-A., Zöllnerstr. 4: Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume 38

Heegner, Dr. K., Berlin-Steglitz, Elisenstr. 7: Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. I. 161

Heegner, Dr. K., Berlin-Steglitz, Elisenstr. 7: Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. II. 321

Hopf, Prof. Dr. H., Zollikon bei Zürich (Schweiz), Alte Landstr. 37, und Samelson, H., Zürich (Schweiz), Pestalozzistr. 35: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen 749

Kienast, Prof. Dr A., Küßnacht-Zürich (Schweiz): Beweis des Satzes $x^{-1} \lg^q x$ $(\psi(x) - x) \to 0$ ohne Überschreitung der Geraden $\sigma = 1$ 113

Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn (Č.S.R.), Lerchgasse 2a: Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist 248

Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn (Č.S.R.), Lerchgasse 2a: Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt 783

Krull, Prof. Dr. W., Erlangen, Burgbergstr. 53[1]: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. IIIa. Eine Ergänzung von Beitrag III. 767

Krull, Prof. Dr. W., Erlangen, Burgbergstr. 53[1]: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. V. Potenzreihenringe 768

Maaß, Dr. H., Hamburg-Fu., Rubenkamp 267: Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimensionen mit ϑ-Duplikatoren in zwei Variablen 709

Seite

Mayer, Dr.-Ing. A. E., Wien IV, Johann Strauß-Gasse 38: Koppelkurven mit drei Spitzen und spezielle Koppelkurven-Büschel 389

Mettler, Dr. E., Hannover-Herrenhausen, Schaumburgstr. 10II: Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels 59

Mitra, Dr. S. C., Dacca, Bengal (Brit.-Indien), 35 Katkhola Road, P. O. Wari: On parabolic cylinder functions which are self-reciprocal in the Hankel-transform 205

Müller, Dr. M., Heidelberg, Kleinschmidtstr. 60: Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete 628

Rellich, Dr. F., Marburg a. d. Lahn, Barfüßertor 26: Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung 618

Ridder, Dr. J., Groningen (Holland), Kraneweg 17a: Das spezielle Perron-Stieltjessche Integral 637

Samelson, H., Zürich (Schweiz), Pestalozzistr. 35, und Hopf, Prof. Dr. H., Zollikon bei Zürich (Schweiz), Alte Landstr. 37: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen 749

Schmidt, Prof. Dr. H., Jena, Neutor 3/2: Über Existenz und Darstellung impliziter Funktionen bei singulären Anfangswerten 533

Siegel, Prof. Dr. C. L., Göttingen, Bunsenstr. 3—5: Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen 682

Specht, Dr. W., Breslau I, Kaiserin-Augusta-Platz 5 (Mathematisches Seminar): Darstellungstheorie der affinen Gruppe 120

Specht, Dr. W., Breslau I, Kaiserin-Augusta-Platz 5 (Mathematisches Seminar): Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe 553

v. Sz. Nagy, Dr. B., Szeged (Ungarn), Baross und 2. Mathematisches Institut der Universität: Über isomorphe vollständige Funktionensysteme 1

v. Sz. Nagy, Dr. B., Szeged (Ungarn), Baross und 2. Mathematisches Institut der Universität: Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme 17

Unkelbach, Dr. H., Zweibrücken, Himmelsbergstr. 23: Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung 739

Vakselj, Prof. Dr. A., Ljubljana (Jugoslawien), Gregorčičeva 15: Kreiskurven zweiter Ordnung 573

Ważewski, Dr. T., Kraków (Polen), Plac Matejki 7: Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung . . 522

Weise, Dr. K. H., Jena, Abbeanum: Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n. Teil I 469

Weiss, Dr. G., Arzberg (Oberfranken), Marktplatz 1: Eine neue Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems 446

Wu, Dr. Ta-Jen, Hamburg 13, Rothenbaumchausse 21 (Mathematisches Seminar): Integralgeometrie 26. Über die kinematische Hauptformel 212

Wu, Dr. Ta-Jen, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21 (Mathematisches Seminar): Integralgeometrie 28. Über elliptische Geometrie 495

Young, Dr. L. C., Cambridge (England), 84 Hils Avenue: Inequalities connected with binary derivation, integrated Lipschitz conditions and Fourier series 255

66 52913

QA1
M88
V.43

Über isomorphe vollständige Funktionensysteme.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged.

Einleitung.

A. Haar hat in zwei Arbeiten[1]) die folgende Frage untersucht: Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen gibt es zu einer gegebenen unendlichen kubischen Matrix (c_{pqr}) ein auf einer meßbaren Punktmenge $\mathfrak{M}$ definiertes orthogonales Funktionensystem $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$, ..., für welches

$$\int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\,\psi_q(s)\,\overline{\psi_r(s)}\,ds = c_{pqr}$$

ist[2])? Um die Existenz dieser Integrale zu sichern, wird dabei immer vorausgesetzt, daß die Funktionen $\psi_n(s)$ beschränkt sind. Haar hat unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}$ endliches Maß hat und daß das Orthogonalsystem vollständig[3]) (oder allgemeiner „in sich abgeschlossen") ist, eine Lösung dieses Problems gegeben.

Aus der „im Mittel" konvergierenden Fourierentwicklung

$$\psi_p(s)\,\psi_q(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{M}} \psi_p(s)\,\psi_q(s)\,\overline{\psi_r(s)}\,ds \right) \cdot \psi_r(s)$$

geht hervor, daß, wenn man das vollständige Orthogonalsystem $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$, ... als Haupteinheitensystem jenes unendlichen hyperkomplexen Systems auffaßt, das aus den beschränkten Funktionen $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(s)$ (mit konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$) besteht, die Konstanten c_{pqr} gerade die Multiplikationstabelle dieses hyperkomplexen Systems bilden.

---

[1]) A. Haar, Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 769—798; Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme, Annali di Pisa **2** (1933), S. 21—40. Die erste Arbeit behandelt nur reellwertige, die zweite auch komplexwertige Funktionensysteme.

[2]) Die zu einer komplexen Größe z konjugiert komplexe Größe wird immer mit $\bar{z}$ bezeichnet.

[3]) Wir verstehen darunter ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem im Raume aller meßbaren Funktionen, welche ein integrierbares Absolutwertquadrat besitzen.

Zwei orthogonale Funktionensysteme, die dieselbe Multiplikationstabelle besitzen, werden wir mit Haar *isomorph* nennen. Mittels einer maßtreuen Abbildung der Menge $\mathfrak{M}$ auf eine andere Menge $\mathfrak{M}'$ geht das orthogonale Funktionensystem $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s), \ldots$ offenbar in ein mit ihm isomorphes, auf $\mathfrak{M}'$ definiertes orthogonales Funktionensystem $\psi_1'(s'), \psi_2'(s'), \psi_3'(s'), \ldots$ über. Am Schlusse seiner ersten, in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit hat Haar die Behauptung ausgesprochen, daß diese Tatsache im folgenden Sinne umkehrbar ist: Zwei beliebige, auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ definierte isomorphe vollständige orthogonale Funktionensysteme können durch eine eineindeutige maßtreue Mengenabbildung der meßbaren Teilmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ ineinander übergeführt werden.

Wir wollen in dieser Arbeit diese unbegründet gebliebene Behauptung sogleich in verschiedenen Richtungen verallgemeinert beweisen[4]). Wir übertragen zunächst den Begriff der Isomorphie auf allgemeinere Funktionensysteme, dann beschäftigen wir uns mit der Frage der Funktionen- und Mengenabbildung (§ 1 bis § 3). Im § 4 wird die Frage nach der Existenz einer die Mengenabbildung erzeugenden Punktabbildung untersucht. Der letzte Paragraph berichtet endlich über die Anwendbarkeit der gewonnenen Resultate im Falle allgemeinerer Integralbegriffe.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ je ein endliches oder unendliches Intervall. Wir bezeichnen mit L_2 die Klasse aller solchen auf $\mathfrak{M}$ definierten komplexwertigen Funktionen, die auf jedem endlichen Teilintervall von $\mathfrak{M}$ meßbar sind und deren Absolutwertquadrat auf $\mathfrak{M}$ integrierbar ist. L_2' sei die analog erklärte Klasse von Funktionen auf $\mathfrak{M}'$.

Die Funktionensysteme $\{\psi(s)\}$ bzw. $\{\psi'(s')\}$ seien in L_2 bzw. in L_2' *vollständig*. Die Funktionen $\psi(s)$ gehören also zu L_2 und man kann durch geeignete Linearkompositionen $\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(s)$ jede Funktion $h(s)$ aus L_2 im Absolutwertquadrat-Integralmittel (kurz: im Mittel) beliebig genau approximieren. Entsprechendes soll auch für die Funktionen $\psi'(s')$ gelten.

Wir werden im folgenden voraussetzen, daß jede Funktion aus den Systemen $\{\psi(s)\}$ und $\{\psi'(s')\}$ fast überall *beschränkt* ist, sie sollen aber nicht notwendig eine gemeinsame Schranke besitzen.

Wir werden noch voraussetzen, daß die Systeme $\{\psi(s)\}$ und $\{\psi'(s')\}$ *isomorph* im folgenden Sinne sind: Man kann zwischen den Funktionen

---

[4]) Den speziellen Fall der isomorphen orthogonalen und reellwertigen Funktionensysteme haben wir schon in einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften an ihrer Sitzung vom 16. März 1936 eingereichten, ungarisch abgefaßten Arbeit betrachtet.

des Systems $\{\psi(s)\}$ einerseits und den Funktionen des Systems $\{\psi'(s')\}$ andererseits eine eineindeutige Zuordnung herstellen, so daß, wenn $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$ drei beliebige (nicht notwendig verschiedene) Funktionen aus $\{\psi(s)\}$ und $\psi_1'(s')$, $\psi_2'(s')$, $\psi_3'(s')$ die ihnen zugeordneten Funktionen aus $\{\psi'(s')\}$ sind, die Gleichungen

(1) $$\int_{\mathfrak{M}} \psi_1(s)\,\overline{\psi_2(s)}\,ds = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_1'(s')\,\overline{\psi_2'(s')}\,ds',$$

(2) $$\int_{\mathfrak{M}} \psi_1(s)\,\psi_2(s)\,\overline{\psi_3(s)}\,ds = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_1'(s')\,\psi_2'(s')\,\overline{\psi_3'(s')}\,ds'$$

gelten.

Sei nun $h(s)$ eine beliebige Funktion aus L_2. Es gibt wegen der Vollständigkeit des Systems $\{\psi(s)\}$ eine Folge

$$\varphi_k(s) = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki}\,\psi_{ki}(s) \qquad (k = 1, 2, 3. \ldots)$$

von Linearkompositionen der $\psi(s)$, so daß

$$\int_{\mathfrak{M}} |h(s) - \varphi_k(s)|^2\,ds \to 0, \quad \text{also} \quad \int_{\mathfrak{M}} |\varphi_k(s) - \varphi_l(s)|^2\,ds \to 0$$

für $k, l \to \infty$ gilt. Sei $\psi_{ki}'(s')$ die durch die Isomorphie zu $\psi_{ki}(s)$ zugeordnete Funktion aus $\{\psi'(s')\}$, dann gilt für die Folge

$$\varphi_k'(s') = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki}\,\psi_{ki}'(s')$$

wegen (1) die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{M}'} |\varphi_k'(s') - \varphi_l'(s')|^2\,ds' = \int_{\mathfrak{M}} |\varphi_k(s) - \varphi_l(s)|^2\,ds,$$

also ist auch die Folge $\varphi_k'(s')$ im Mittel konvergent; $h'(s')$ sei ihr Limes (dieser gehört offenbar zu L_2'). Dann gilt für jedes Paar durch die Isomorphie einander zugeordneter Funktionen $\psi(s)$, $\psi'(s')$ die Gleichung[5])

(3) $$\int_{\mathfrak{M}} h\,\overline{\psi} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_k\,\overline{\psi} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \int_{\mathfrak{M}} \psi_{ki}\,\overline{\psi}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \int_{\mathfrak{M}'} \psi_{ki}'\,\overline{\psi'} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathfrak{M}'} \varphi_k'\,\overline{\psi'} = \int_{\mathfrak{M}'} h'\,\overline{\psi'}.$$

Wir nennen eine beliebige Funktion h aus L_2 und eine Funktion h' aus L_2' einander zugeordnet, in Zeichen

$$h \longleftrightarrow h',$$

wenn die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{M}} h\,\overline{\psi} = \int_{\mathfrak{M}'} h'\,\overline{\psi'}$$

---

[5]) Die Veränderlichen s, s' werden wir, solange dies nicht zu Mißverständnissen führen kann, nicht ausschreiben.

für jedes Paar durch die Isomorphie einander zugeordneter Funktionen statt hat. Es gilt wegen (1) insbesondere: $\psi \longleftrightarrow \psi'$. Wir haben schon bewiesen, daß es zu jeder Funktion h (und ebenso zu jeder Funktion h') eine ihr zugeordnete gibt (vgl. (3)). Diese Zuordnung ist im wesentlichen eineindeutig. Ist nämlich $h \longleftrightarrow h_1'$ und $h \longleftrightarrow h_2'$, so ist $\int_{\mathfrak{R}'} (h_1' - h_2') \overline{\psi'} = 0$ für jedes ψ'. Wegen der Vollständigkeit des Systems $\{\psi'\}$ ist also $h_1' - h_2'$ zu 0, h_1' also zu h_2' äquivalent ($h_1' \sim h_2'$). Aus $h \longleftrightarrow h_1'$ und $h_1' \sim h_2'$ folgt offenbar umgekehrt: $h \longleftrightarrow h_2'$ [6]).

Wir bemerken die folgenden Eigenschaften dieser Zuordnung:

1. 1. *Aus* $h_1 \longleftrightarrow h_1'$ *und* $h_2 \longleftrightarrow h_2'$ *folgt* $c_1 h_1 + c_2 h_2 \longleftrightarrow c_1 h_1' + c_2 h'$ *für beliebige komplexe Zahlen* c_1, c_2.

1. 2. *Aus* $h_1 \longleftrightarrow h_1'$ *und* $h_2 \longleftrightarrow h_2'$ *folgt, daß* $\int_{\mathfrak{R}} h_1 \overline{h_2} = \int_{\mathfrak{R}'} h_1' \overline{h_2'}$ *ist.*

1. 3. *Ist* h *bzw.* g' *Limes im Mittel der Folge* h_n *bzw.* h_n' *und ist außerdem* $h_n \longleftrightarrow h_n'$, *so gilt auch* $h \longleftrightarrow g'$.

Beweis. Die Richtigkeit von 1. 1 ist nach der Definition evident. Für den Beweis von 1. 2 nehmen wir an, daß h_2 Limes im Mittel der Folge $\varphi_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \psi_{ki}$ ist; dann haben wir in der Tat

$$\int_{\mathfrak{R}} h_1 \overline{h_2} = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \overline{c_{ki}} \int_{\mathfrak{R}} h_1 \overline{\psi_{ki}} = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \overline{c_{ki}} \int_{\mathfrak{R}'} h_1' \overline{\psi_{ki}'}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{\mathfrak{R}'} h_1' \overline{\left(\sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \psi_{ki}' \right)} = \int_{\mathfrak{R}'} h_1' \overline{h_2'}.$$

Es folgt endlich aus den Voraussetzungen von 1. 3, wegen

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} (h - h_n) \overline{\psi} \right|^2 \leqq \int_{\mathfrak{R}} |h - h_n|^2 \cdot \int_{\mathfrak{R}} |\psi|^2$$

und

$$\left| \int_{\mathfrak{R}'} (g' - h_n') \overline{\psi'} \right|^2 \leqq \int_{\mathfrak{R}'} |g' - h_n'|^2 \cdot \int_{\mathfrak{R}'} |\psi'|^2,$$

daß für $\psi \longleftrightarrow \psi'$

$$\int_{\mathfrak{R}} h \overline{\psi} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{R}} h_n \overline{\psi} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{R}'} h_n' \overline{\psi'} = \int_{\mathfrak{R}'} g' \overline{\psi'}$$

gilt.

Unter Benutzung der Bedingung (2) und der Beschränktheit der Funktionen ψ, ψ' können wir noch weitere Eigenschaften dieser Zuordnung herleiten.

---

[6]) Wir werden im Folgenden, mit der Ausnahme von § 4, Gleichungen und Ungleichungen zwischen Funktionen so verstehen, daß sie überall mit der eventuellen Ausnahme einer Nullmenge gültig sind.

1.4. *Sind* $h_1 \longleftrightarrow h_1'$, $h_2 \longleftrightarrow h_2'$ *und gehören auch die Produkte* $h_1 h_2$ *und* $h_1' h_2'$ *zu* L_2 *bzw. zu* L_2', *so ist* $h_1 h_2 \longleftrightarrow h_1' h_2'$.

Aus (2) folgt erstens unmittelbar $\psi_1 \psi_2 \longleftrightarrow \psi_1' \psi_2'$. Konvergiert die Folge $\varphi_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \psi_{ki}$ im Mittel gegen h_2, so folgt aus den Beziehungen

$$\varphi_k \psi = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \psi_{ki} \psi \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki} \psi_{ki}' \psi' = \varphi_k' \psi',$$

$$\int_{\mathfrak{M}} |h_2 \psi - \varphi_k \psi|^2 \leqq \operatorname{Max} |\psi|^2 \cdot \int_{\mathfrak{M}} |h_2 - \varphi_k|^2 \to 0,$$

$$\int_{\mathfrak{M}'} |h_2' \psi' - \varphi_k' \psi'|^2 \leqq \operatorname{Max} |\psi'|^2 \cdot \int_{\mathfrak{M}'} |h_2' - \varphi_k'|^2 \to 0,$$

unter Benutzung von 1.3, daß $h_2 \psi \longleftrightarrow h_2' \psi'$ gilt. Man hat also definitionsgemäß für $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_1'$

$$\int_{\mathfrak{M}} h_2 \psi \overline{\psi_1} = \int_{\mathfrak{M}'} h_2' \psi' \overline{\psi_1'}, \quad \text{also} \quad \int_{\mathfrak{M}} \overline{h_2} \psi_1 \overline{\psi} = \int_{\mathfrak{M}'} \overline{h_2'} \psi_1' \overline{\psi'},$$

woraus $\overline{h_2} \psi_1 \longleftrightarrow \overline{h_2'} \psi_1'$ folgt. Es gilt endlich wegen 1.2

$$\int_{\mathfrak{M}} h_1 \cdot h_2 \overline{\psi_1} = \int_{\mathfrak{M}'} h_1' \cdot h_2' \overline{\psi_1'},$$

also $h_1 \cdot h_2 \longleftrightarrow h_1' \cdot h_2'$, w. z. b. w.

1.5. *Aus* $h \longleftrightarrow h'$ *folgt, daß* $\Re(h) \longleftrightarrow \Re(h')$, $\Im(h) \longleftrightarrow \Im(h')$: *ist insbesondere eine der Funktionen* h *und* h' *reellwertig, so ist es auch die andere.*

Es genügt offenbar zu beweisen, daß, wenn h reellwertig ist, es dann auch h' ist. Sei zunächst noch vorausgesetzt, daß h beschränkt ist und sei g' eine beliebige beschränkte Funktion aus L_2', $g \longleftrightarrow g'$. Dann gehören $h \cdot g$ und $h' \cdot g'$ sicher zu L_2 bzw. L_2', woraus wegen 1.4 und 1.2

$$\int_{\mathfrak{M}} h |g|^2 = \int_{\mathfrak{M}} h g \cdot \bar{g} = \int_{\mathfrak{M}'} h' g' \cdot \overline{g'} = \int_{\mathfrak{M}'} h' |g'|^2$$

folgt. Man sieht also, daß

$$\int_{\mathfrak{M}'} \Im(h') |g'|^2 = 0$$

ist, woraus endlich $\Im(h') = 0$ folgt.

Ist nun h reellwertig, aber unbeschränkt, so gibt es eine Folge von reellwertigen beschränkten h_n, so daß $\int_{\mathfrak{M}} |h - h_n|^2 \to 0$. Wegen 1.1 und 1.2 gilt dann auch: $\int_{\mathfrak{M}'} |h' - h_n'|^2 \to 0$. Ist g' eine beliebige reellwertige Funktion aus L_2', so haben wir

$$\int_{\mathfrak{M}'} h' g' = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{M}'} h_n' g'.$$

Da die h_n' reellwertig sind, ist es $\int_{\mathfrak{M}'} h' g'$, also h' selbst auch.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf reellwertige Paare h, h'.

1.6. *Ist* $h \longleftrightarrow h'$, *so ist eine beliebige obere (untere) Schranke von* h *auch eine obere (untere) Schranke von* h' *und umgekehrt. Ist speziell eine der Funktionen* h, h' *positiv, so ist es auch die andere.*

Beweis. Sei zunächst vorausgesetzt, daß h zwischen den Schranken A und B liegt ($A \leqq h \leqq B$). Wäre dann die Ungleichung $h' \leqq B$ ($h \longleftrightarrow h'$) nicht richtig, so gäbe es eine beschränkte Funktion g' aus L'_2, $g' \neq 0$, welche überall dort, wo $h' \leqq B$ richtig ist, verschwindet. Nun sei $g \longleftrightarrow g'$. Da $h \cdot g$ offenbar zu L_2, $h' \cdot g'$ zu L'_2 gehört, so folgt aus 1.4 und 1.2

$$\int_{\mathfrak{M}} h\,|g|^2 = \int_{\mathfrak{M}} h\,g\,.\,\bar{g} = \int_{\mathfrak{M}'} h'\,g'\cdot g' = \int_{\mathfrak{M}'} h'\,|g'|^2$$

und

$$\int_{\mathfrak{M}} |g|^2 = \int_{\mathfrak{M}'} |g'|^2.$$

Wir bekommen aus diesen Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{M}} h\,|g|^2 \leqq B \int_{\mathfrak{M}} |g|^2 = B \int_{\mathfrak{M}'} |g'|^2 < \int_{\mathfrak{M}'} h'\,|g'|^2 = \int_{\mathfrak{M}} h\,|g|^2,$$

was offenbar einen Widerspruch enthält. Es gilt also notwendig $h' \leqq B$.

Ist allgemeiner die Funktion h nur halbbeschränkt, $h \leqq B$, so ist sie allerdings Limes im Mittel einer Folge h_n aus L_2, für welche $-n \leqq h_n \leqq B$. Dann ist h' Limes im Mittel der Folge h'_n, wobei $h_n \longleftrightarrow h'_n$ ist. Es gilt aber dann nach dem soeben Bewiesenen $-n \leqq h'_n \leqq B$, woraus, wie man leicht einsieht, auch $h' \leqq B$ folgt.

1.7. *Ist* $h \longleftrightarrow h'$, *so ist* $\overset{(+)}{h} \longleftrightarrow \overset{(+)}{h'}$, $\overset{(-)}{h} \longleftrightarrow \overset{(-)}{h'}$ [7]), *also* $|h| \longleftrightarrow |h'|$.

Beweis. Die beliebige reellwertige Funktion h sei als Differenz ihrer positiven und negativen Teile aufgeschrieben: $h = \overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}$. Sei $\overset{(+)}{h} \longleftrightarrow \left(\overset{(+)}{h}\right)'$, $\overset{(-)}{h} \longleftrightarrow \left(\overset{(-)}{h}\right)'$. Wegen 1.6 sind auch $\left(\overset{(+)}{h}\right)'$ und $\left(\overset{(-)}{h}\right)'$ positiv. Aus $\overset{(+)}{h} \cdot \overset{(-)}{h} = 0$ und aus 1.2 folgt, daß $\int_{\mathfrak{M}} \left(\overset{(+)}{h}\right)' \cdot \left(\overset{(-)}{h}\right)' = 0$ ist, was nur dann bestehen kann, wenn $\left(\overset{(+)}{h}\right)' \cdot \left(\overset{(-)}{h}\right)' = 0$ ist. Durch Vergleichung der aus 1.1 folgenden Gleichung $h' = \left(\overset{(+)}{h}\right)' - \left(\overset{(-)}{h}\right)'$ mit unserem Resultat: $\left(\overset{(+)}{h}\right)' \cdot \left(\overset{(-)}{h}\right)' = 0$, erhalten wir, daß $\overset{(+)}{h'} = \left(\overset{(+)}{h}\right)'$, $\overset{(-)}{h'} = \left(\overset{(-)}{h}\right)'$, also auch

$$|h| = \overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h} \longleftrightarrow \left(\overset{(+)}{h}\right)' + \left(\overset{(-)}{h}\right)' = \overset{(+)}{h'} + \overset{(-)}{h'} = |h'|$$

gilt.

---

[7]) $\overset{(+)}{h} = \frac{1}{2}(|h| + h)$, $\overset{(-)}{h} = \frac{1}{2}(|h| - h)$.

§ 2.

Bezeichnen wir mit l eine auf $\mathfrak{M}$ definierte Funktion, die Limes einer monoton wachsenden Folge reellwertiger Funktionen aus L_2 ist; l kann gelegentlich auch auf einer Menge von positivem Maß gleich ∞ sein. Die Klasse aller Funktionen dieser Art wollen wir mit C bezeichnen. C' sei die Klasse der analog erklärten Funktionen l' auf $\mathfrak{M}'$. Die Funktionen, die zu L_2 bzw. L_2' gehören, werden wir immer zur Unterscheidung mit h bzw. h' bezeichnen; wir werden es von nun an nur mit reellwertigen h und h' zu tun haben.

Die Funktionen l und l' werden einander zugeordnet heißen, in Zeichen

$$l \longleftrightarrow l',$$

wenn es monoton wachsende Folgen h_n und h_n' gibt, so daß $h_n \to l$, $h_n' \to l'$ und $h_n \longleftrightarrow h_n'$. Es gibt zu jeder Funktion l aus C eine ihr zugeordnete; ist nämlich l Limes der monoton wachsenden Folge h_n und ist $h_n \longleftrightarrow h'$, so ist wegen 1.5, 1.1 und 1.6 auch die Folge h_n' monoton wachsend, sie strebt also gegen eine Funktion l'. Wir werden einsehen, daß im Falle, wo l selbst zu L_2 gehört, dann l' auch im früheren Sinne ihr zugeordnet ist. Dies ist eine spezielle Folgerung jener unten bewiesenen Tatsache, daß eine Funktion l aus C (von Äquivalenz natürlich abgesehen) auch im neueren Sinne nur eine ihr zugeordnete haben kann.

Seien l_1 und l_2 zwei Funktionen aus C, $l_1 \leqq l_2$. Wir zeigen, daß wenn $l_1 \longleftrightarrow l_1'$, $l_2 \longleftrightarrow l_2'$, dann auch $l_1' \leqq l_2'$ gilt. Sei l_1 bzw. l_2 Limes der monoton wachsenden Folge h_{1n} bzw. h_{2n} und N ein festgehaltener Index; es gilt dann $(h_{1N} \overset{(+)}{-} h_{2n}) \to 0$ für $n \to \infty$. Aus $h_{1n} \longleftrightarrow h_{1n}'$, $h_{2n} \longleftrightarrow h_{2n}'$ folgt wegen 1.7

$$(h_{1N} \overset{(+)}{-} h_{2n}) \longleftrightarrow (h_{1N}' \overset{(+)}{-} h_{2n}').$$

Die Folge $(h_{1N}' \overset{(+)}{-} h_{2n}')$ ist also ebenfalls monoton abnehmend, wir bezeichnen ihren Limes mit p', $p' \geqq 0$. Wegen

$$\int_{\mathfrak{M}'} (p')^2 = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{M}'} [(h_{1N}' \overset{(+)}{-} h_{2n}')]^2 = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{M}} [(h_{1N} \overset{(+)}{-} h_{2n})]^2 = 0$$

ist p' notwendig gleich 0. Daraus folgern wir, daß $h_{1N}' \leqq \lim\limits_{n \to \infty} h_{2n}' = l_2'$ und also auch $l_1' = \lim\limits_{N \to \infty} h_{1N}' \leqq l_2'$ gilt, w. z. b. w.

Sind nun die Funktionen l_1' und l_2' beide derselben Funktion l zugeordnet, so müssen die Ungleichungen $l_1' \leqq l_2'$, $l_1' \geqq l_2'$ gleichzeitig bestehen, d. h. $l_1' = l_2'$. Wir haben somit nicht nur die Eindeutigkeit der Zuordnung, sodern auch folgendes bewiesen:

2.1. *Aus* $l_1 \longleftrightarrow l_1'$, $l_2 \longleftrightarrow l_2'$, $l_1 \leqq l_2$ *folgt* $l_1' \leqq l_2'$; *speziell ist einer positiven Funktion eine positive Funktion zugeordnet.*

Weitere Eigenschaften dieser Zuordnung:

2.2. *Mit den Funktionen l_1 und l_2 gehört auch ihre obere Einhüllende,* $\sup(l_1, l_2)$ *zu* C; *ist ferner* $l_1 \longleftrightarrow l_1'$, $l_2 \longleftrightarrow l_2'$, *so gilt auch* $\sup(l_1, l_2) \longleftrightarrow \sup(l_1', l_2')$.

2.3. *Ist die Folge* $l_1, l_2, l_3, \ldots$ *monoton wachsend, so ist die Folge der zugeordneten Funktionen,* $l_1', l_2', l_3', \ldots$, *wegen* 2.1 *ebenfalls monoton wachsend; die Limites dieser Folgen,* l *und* l', *gehören zu* C *bzw.* C', *und es gilt* $l \longleftrightarrow l'$.

2.4. *Ist* $l_1 \longleftrightarrow l_1'$, $l_2 \longleftrightarrow l_2'$ *und ist* l_1 *nach oben beschränkt, so ist auch* l_1' *nach oben beschränkt, und es gilt* $l_1 - l_2 \longleftrightarrow l_1' - l_2'$, *vorausgesetzt, daß* $l_1 \geqq l_2$ *ist.*

Beweis. Aus den Beziehungen $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$, $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$ und aus 1.1, 1.7 folgt, daß die obere (untere) Einhüllende zweier reellwertigen Funktionen aus L_2 und die obere (untere) Einhüllende der ihnen zugeordneten Funktionen einander zugeordnet sind. Man sieht durch vollständige Induktion leicht ein, daß dies nicht nur für zwei, sondern auch für beliebig (endlich) viele Funktionen gilt. Streben nun die Folgen h_{1n} und h_{2n} wachsend gegen l_1 bzw. l_2 und streben die zugeordneten Folgen h_{1n}', h_{2n}' gegen l_1' bzw. l_2', so streben die einander zugeordneten Folgen: $\sup(h_{1n}, h_{2n})$ und $\sup(h_{1n}', h_{2n}')$ wachsend gegen $\sup(l_1, l_2)$ bzw. $\sup(l_1', l_2')$, woraus 2.2 folgt.

Man kann 2.3 folgenderweise einsehen. Strebe h_{nk} für $k \to \infty$ wachsend gegen l_n und sei $h_{nk} \longleftrightarrow h_{nk}'$. Dann sind $h^{(k)} = \sup(h_{1k}, h_{2k}, \ldots, h_{kk})$ und $h^{(k)'} = \sup(h_{1k}', h_{2k}', \ldots, h_{k}')$ einander zugeordnet. Die wachsende Folge $h^{(k)}$ zu L_2 gehörender Funktionen strebt offenbar gegen l, die zugeordnete Folge $h^{(k)'}$ strebt gegen l', womit 2.2 bewiesen ist.

Daß einer nach oben beschränkten Funktion l eine nach oben beschränkte Funktion zugeordnet ist, ist aus der Definition dieser Zuordnung, sowie aus 1.6 leicht zu sehen. Seien die in 2.4 vorkommenden Funktionen l_1 und l_2 Limites der wachsenden Folgen h_{1n} bzw. h_{2n}. Aus $l_1 \geqq l_2$ folgt, daß auch die Folge $h_n = (h_{1n} \overset{(+)}{-} h_{2n})$ gegen $l_1 - l_2$ konvergiert. Die monoton wachsende Folge $h^{(n)} = \inf(h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots)$ konvergiert also ebenfalls gegen $l_1 - l_2$. Es ist leicht einzusehen, daß $h^{(n)}$ Limes im Mittel der Folge $\inf(h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots, h_m)$ $(m \to \infty)$ ist. Ebenso ist $h^{(n)'} = \inf(h_n', h_{n+1}', h_{n+2}', \ldots)$ Limes im Mittel der Folge $\inf(h_n', h_{n+1}', h_{n+2}', \ldots, h_m')$. Daraus folgt zuerst, daß $h^{(n)}$ und $h^{(n)'}$ zu L_2 bzw. zu L_2' gehören, ferner (auf Grund von 1.3), daß $h^{(n)} \longleftrightarrow h^{(n)'}$ gilt. Damit ist auch 2.4 bewiesen.

Wir bemerken noch die folgende Eigenschaft dieser Zuordnung, die man mittels 2.2 und 2.3 leicht rechtfertigen kann:

2.5. *Sei* $l_1, l_2, l_3, \ldots$ *irgendeine endliche oder unendliche Folge von Funktionen aus* C *und* $l'_1, l'_2, l'_3, \ldots$ *die Folge der zugeordneten Funktionen aus* C'. *Dann gilt:* $\sup(l_1, l_2, l_3, \ldots) \longleftrightarrow \sup(l'_1, l'_2, l'_3, \ldots)$.

§ 3.

Die charakteristische Funktion $e(\mathfrak{m})$ einer meßbaren Teilmenge[8]) $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}$ gehört offenbar zu L_2. Sei $e(\mathfrak{m}) \longleftrightarrow e'$. Aus $[e(\mathfrak{m})]^2 = e(\mathfrak{m})$ folgt wegen 1.5, 1.6 und 1.4: $(e')^2 \sim e'$, d. h. die Funktion e' kann fast überall nur die Werte 0 und 1 annehmen. Es gibt also eine meßbare Teilmenge $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}'$ mit der charakteristischen Funktion $e'(\mathfrak{m}')$, für welche $e'(\mathfrak{m}') \sim e'$, also $e(\mathfrak{m}) \longleftrightarrow e'(\mathfrak{m}')$ gilt. Da das Maß einer Menge dem Integral ihrer charakteristischen Funktion gleich ist, so folgt aus 1.2, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ gleiches Maß besitzen. Wenn wir $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ einander zugeordnet nennen, in Zeichen

$$\mathfrak{m} \longleftrightarrow \mathfrak{m}',$$

dann haben wir so (von Äquivalenz abgesehen) eine eineindeutige maßtreue Zuordnung der meßbaren Teilmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ definiert,

Diese Zuordnung kann sofort auf die Klasse derjenigen Mengen erweitert werden, welche die Vereinigungsmengen wachsender, aus meßbaren Mengen gebildeter Folgen sind. Die charakteristische Funktion einer solchen Menge gehört nämlich zu C bzw. zu C', und es wird also infolge der Zuordnung $C \longleftrightarrow C'$ der charakteristischen Funktion einer solchen Menge $\mathfrak{m}$ immer die charakteristische Funktion einer Menge $\mathfrak{m}'$ zugeordnet.

Die Eigenschaften der so erklärten Mengenzuordnung

$$\mathfrak{m} \longleftrightarrow \mathfrak{m}'$$

können aus den Eigenschaften der Zuordnung $C \longleftrightarrow C'$ abgelesen werden.

Sei $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ eine endliche, oder unendliche Folge von Mengen und sei $\mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}'_i$. Aus

$$e\left(\sum_i \mathfrak{m}_i\right) = \sup\left(e(\mathfrak{m}_1), e(\mathfrak{m}_2), e(\mathfrak{m}_3), \ldots\right)$$

und

$$e'\left(\sum_i \mathfrak{m}'_i\right) = \sup\left(e'(\mathfrak{m}'_1), e'(\mathfrak{m}'_2), e'(\mathfrak{m}'_3), \ldots\right)$$

ergibt sich (mit Rücksicht auf 2.5), daß

$$\sum_i \mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \sum_i \mathfrak{m}_i$$

gilt.

---

[8]) Wir werden nur solche Mengen meßbar nennen, die endliches Maß haben.

Ist $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2$, d. h. $e(\mathfrak{m}_1) \leqq e(\mathfrak{m}_2)$, so ist wegen 2.1 auch $e'(\mathfrak{m}_1') \leqq e'(\mathfrak{m}_2')$, d. h. $\mathfrak{m}_1' \subset \mathfrak{m}_2'$. Es folgt sogar aus 2.4 die Beziehung

$$e(\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1) = e(\mathfrak{m}_2) - e(\mathfrak{m}_1) \longleftrightarrow e'(\mathfrak{m}_2') - e'(\mathfrak{m}_1') = e'(\mathfrak{m}_2' - \mathfrak{m}_1'),$$

d. h.

$$\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{m}_2' - \mathfrak{m}_1'.$$

Wegen

$$\prod_i \mathfrak{m}_i = (\sum_i \mathfrak{m}_i) - \sum_i ((\sum_k \mathfrak{m}_k) - \mathfrak{m}_i)$$

gilt für endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen und für die ihnen zugeordneten:

$$\prod_i \mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \prod_i \mathfrak{m}_i'.$$

Sei nun h eine beliebige reellwertige Funktion aus L_2 und sei A eine beliebige Konstante. Die Menge $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ ist offenbar meßbar oder wenigstens Vereinigungsmenge abzählbar unendlich vieler meßbarer Mengen. Wir behaupten, daß aus $h \longleftrightarrow h'$ auch

$$\mathfrak{m}[h \geqq A] \longleftrightarrow \mathfrak{m}'[h' \geqq A]$$

folgt.

Sei $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ die Vereinigungsmenge der monoton wachsenden Folge $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ meßbarer Mengen, $\mathfrak{m}_i \longleftrightarrow \mathfrak{m}_i'$. Dann ist

$$h \cdot e(\mathfrak{m}_i) - A \cdot e(\mathfrak{m}_i) \geqq 0,$$

woraus wegen $h \cdot e(\mathfrak{m}_i) - A \cdot e(\mathfrak{m}_i) \longleftrightarrow h' \cdot e'(\mathfrak{m}_i') - A \cdot e'(\mathfrak{m}_i')$ auch

$$h' \cdot e'(\mathfrak{m}_i') - A \cdot e'(\mathfrak{m}_i') \geqq 0$$

folgt.

Es gilt also: $\mathfrak{m}_i' \subset \mathfrak{m}'[h' \geqq A]$; die Vereinigungsmenge der $\mathfrak{m}_i'$, d. h. die zu $\mathfrak{m}[h \geqq A]$ zugeordnete Menge ist also Teilmenge von $\mathfrak{m}'[h' \geqq A]$. Durch Vertauschung der Rolle von h und h' ergibt sich nun leicht die Richtigkeit unserer Behauptung.

Für $h \geqq 0$ und $A < 0$ bekommen wir, als eine spezielle Folgerung

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}'.$$

Ist also eine der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ von endlichem Maß, so ist es auch die andere, und sie haben dann gleiches Maß.

Satz 1. *Sei auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ je ein aus beschränkten Funktionen bestehendes vollständiges Funktionensystem $\{\psi(s)\}$ bzw. $\{\psi'(s')\}$ gegeben, die einander isomorph sind. Dann kann man zwischen denjenigen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, die meßbar oder Vereinigungsmenge abzählbar unendlich vieler meßbaren Mengen sind, (von Äquivalenz abgesehen) eine eineindeutige maßtreue Zuordnung herstellen. Diese Zuordnung hat außerdem die Eigenschaft, daß einer größeren Menge eine größere Menge zugeordnet wird; die folgenden Mengenoperationen: Komplementärbildung, (auf endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen ausgeübte) Summen- bzw. Durchschnitts-*

bildung, wenn sie auf einander zugeordnete Mengen angewandt werden, liefern wieder einander zugeordnete Mengen. Die Mengen, auf welchen die beliebigen reellwertigen, (im Sinne von § 1) einander zugeordneten Funktionen $h(s)$, $h'(s')$ beide nicht kleiner als die gegebene Konstante A sind, werden einander zugeordnet.

Man sieht, daß dieser Satz die in der Einleitung zitierte Behauptung von Haar schon umfaßt. Wir werden in den folgenden Paragraphen gewisse Verfeinerungen und Verallgemeinerungen dieses Satzes untersuchen.

§ 4.

Die im Satze 1 besprochene Mengenabbildung läßt sich auch aus einer Punktabbildung erzeugen. Wir beginnen die Untersuchung dieser Frage unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ *endliche* Länge haben. Wir können auch voraussetzen, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ abgeschlossen sind, da dies mit der Hinzunahme von höchstens zwei Punkten, also von einer Nullmenge, immer erreicht werden kann.

Die auf $\mathfrak{M}$ erklärte Funktion $f(s) = s$ gehört offenbar zu L_2. Nehmen wir eine ihr zugeordnete Funktion, die zur zweiten Baireschen Klasse gehört (es gibt eine solche, da jede meßbare Funktion äquivalent einer Funktion der zweiten Baireschen Klasse ist). Aus 1.5 und 1.6 folgt, daß diese Funktion fast überall auf $\mathfrak{M}'$ Werte aus $\mathfrak{M}$ annimmt. Sind a und b $(a < b)$ die Endpunkte von $\mathfrak{M}$, so liefert das Abschneiden dieser Funktion von unten mit a, von oben mit b, eine ebenfalls zu s zugeordnete, der zweiten Baireschen Klasse gehörige Funktion, deren Wertevorrat aber ganz in $\mathfrak{M}$ liegt. Diese Funktion werden wir mit $w(s')$ bezeichnen.

Aus 1.4 folgt, daß

$$s^n \longleftrightarrow (w(s'))^n$$

gilt und zwar, wie dies aus dem vorigen Paragraphen folgt, nicht nur für $n \geqq 1$, sondern auch für $n = 0$. Es gilt also auch für ein beliebiges Polynom P die Beziehung

$$P(s) \longleftrightarrow P(w(s')).$$

Sei $g_1(s)$ eine beliebige beschränkte Funktion aus der ersten Baireschen Klasse, dann gibt es immer eine überall auf $\mathfrak{M}$ gegen sie konvergente Folge $P_n(s)$ von Polynomen. Die Funktionen $g_1(s)$ und $g_1(w(s'))$ sind offenbar Limites im Mittel der Folgen $P_n(s)$ bzw. $P_n(w(s'))$; es folgt also aus 1.3

$$g_1(s) \longleftrightarrow g_1(w(s')).$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens bekommen wir, daß auch für jede beschränkte Funktion $g_2(s)$ der zweiten Baireschen

Klasse die Beziehung

$$g_2(s) \longleftrightarrow g_2(w(s'))$$

statt hat.

Sei nun

$$v(s) \longleftrightarrow s',$$

wo $v(s)$ aus den möglichen zueinander äquivalenten Funktionen so ausgewählt sei, wie es auch $w(s')$ war. Da also $v(s)$ beschränkt ist und zu der zweiten Baireschen Klasse gehört, haben wir nach dem obigen

$$v(s) \longleftrightarrow v(w(s'))$$

und ebenso

$$w(v(s)) \longleftrightarrow w(s').$$

Daraus folgt also, daß

$$v(w(s')) \sim s',$$
$$w(v(s)) \sim s.$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}'}$ seien diejenigen (zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ äquivalenten) Teilmengen von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$, auf welchen die Gleichungen

$$s' = v(w(s')) \quad \text{bzw.} \quad s = w(v(s))$$

statthaben.

Ist $s \in \overline{\mathfrak{M}}$, so ist $v(s) \in \overline{\mathfrak{M}'}$. Es gilt dann nämlich $s = w(v(s))$, woraus $v(s) = v(w(v(s)))$ folgt; dies bedeutet eben, daß $v(s) \in \overline{\mathfrak{M}'}$ ist. Es ergibt sich ebenso, daß aus $s' \in \overline{\mathfrak{M}'}$ auch $w(s') \in \overline{\mathfrak{M}}$ folgt. Dies gibt eine Möglichkeit, zwischen $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}'}$ eine eineindeutige Punktabbildung herzustellen. Sei nämlich dem Punkte s von $\overline{\mathfrak{M}}$ immer der Punkt $s' = v(s)$ von $\overline{\mathfrak{M}'}$ zugeordnet. Dann gibt es zu jedem Punkte $s' \in \overline{\mathfrak{M}'}$ einen und nur einen Punkt $s \in \overline{\mathfrak{M}}$, welchem er zugeordnet ist, und zwar $s = w(s')$ (es gilt ja $v(w(s')) = s'$, es folgt anderseits aus $s' = v(s)$ die Gleichung $w(s') = w(v(s)) = s$). Die Funktionen $v(s)$ und $w(s')$ sind also auf $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}'}$ zueinander invers.

Diese Punktabbildung ist maßtreu. Sei $e(s)$ die charakteristische Funktion einer solchen Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$, daß $e(s)$ der zweiten Baireschen Klasse angehört. Die Beziehung

$$e(s) \longleftrightarrow e(w(s'))$$

zeigt, daß die Mengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]$[9]) gleiches Maß besitzen.

Ist nun $\mathfrak{O}$ eine Nullmenge von $\mathfrak{M}$, so gibt es Mengen $\mathfrak{U}$ von der obigen Art und von beliebig kleinem Maße, welche $\mathfrak{O}$ bedecken. Die

[9]) $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]$ bedeutet jene Teilmenge von $\mathfrak{M}'$, wo die Funktion $w(s')$ Werte aus $\mathfrak{U}$ annimmt.

Menge $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{O}]$ kann also durch Mengen von beliebig kleinem Maße $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{U}]$ bedeckt werden. Also ist auch $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{O}]$ eine Nullmenge.

Da aber jede meßbare Teilmenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}$ sich unter Hinzunahme einer Menge $\mathfrak{O}$ zu einer Menge vom Typus $\mathfrak{U}$ ergänzen läßt, bekommen wir, daß auch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'[w(s') \in \mathfrak{m}]$ gleiches Maß haben.

Dies alles bleibt offenbar auch dann gültig, wenn man statt auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ sich auf die mit ihnen äquivalenten $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{M}'}$ beschränkt. Da aber dort v und w zueinander invers sind, ist somit die Maßtreue der Punktabbildung bewiesen.

Sei nun $h(s)$ eine beliebige reellwertige, zu L_2 gehörende Funktion, diese ist äquivalent mit einer Funktion $g_2(s)$ aus der zweiten Baireschen Klasse. Dann sind auch $h(w(s'))$ und $g_2(w(s'))$ nach dem obigen äquivalent. Es gilt also

$$h(s) \longleftrightarrow h(w(s')),$$

d. h.

$$h'(s') \sim h(w(s')).$$

Dieselbe Beziehung besteht offenbar auch dann, wenn $h(s)$ komplexwertig ist; es gilt speziell

$$\psi'(s') \sim \psi(w(s'))$$

für jedes Paar ψ, ψ' durch die Isomorphie einander zugeordneter Funktionen.

Unser Resultat bleibt auch dann gültig, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ beliebige meßbare Teilmengen der Gerade sind. Wir können dann nämlich $\mathfrak{M}$ mit Ausnahme von Nullmengen eineindeutig und maßtreu auf ein abgeschlossenes endliches Intervall abbilden[10]); mit $\mathfrak{M}'$ können wir ebenso verfahren. Die Systeme $\{\psi(s)\}$ und $\{\psi'(s')\}$ transformieren sich dabei in zwei ebenfalls zueinander isomorphe, vollständige, aus beschränkten Funktionen bestehende Systeme. Die für diese Intervalle oben bewiesene Punktabbildung bestimmt auch eine Punktabbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ mit denselben Eigenschaften.

Im Falle *unendlicher* Intervalle können wir folgenderweise verfahren. Sei $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ eine aus paarweise punktfremden Mengen von endlichem Maß bestehende Folge, so daß $\sum_i \mathfrak{m}_i = \mathfrak{M}$ ist. Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgt dann, daß die zugeordneten Mengen $\mathfrak{m}_i'$ so ausgewählt werden können, daß sie paarweise punktfremd sind und ihre Summe gleich $\mathfrak{M}'$ ist (es gilt ja $\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}'$).

Sei die Funktion $e(\mathfrak{m}_i) \cdot \psi_p$ (wo $e(\mathfrak{m}_i)$ die charakteristische Funktion von $\mathfrak{m}_i$ ist) mit ψ_{ip}, $e'(\mathfrak{m}_i')\,\psi_p'$ mit ψ_{ip}' bezeichnet, dann folgt offenbar aus $\psi_p \longleftrightarrow \psi_p'$:

$$\psi_{ip} \longleftrightarrow \psi_{ip}', \text{ sowie } \psi_{ip}\psi_{iq} \longleftrightarrow \psi_{ip}'\psi_{iq}'.$$

---

[10]) Z. B. so, daß jedem Punkte von $\mathfrak{M}$ das Maß des links von ihm liegenden Teiles von $\mathfrak{M}$ zugeordnet wird.

Auf Grund von 1.2 bekommen wir also

$$\int_{\mathfrak{m}_i} \psi_{ip}\,\overline{\psi}_{iq} = \int_{\mathfrak{M}} \psi_{ip}\,\overline{\psi}_{iq} = \int_{\mathfrak{M}'} \psi'_{ip}\,\overline{\psi'_{iq}} = \int_{\mathfrak{m}'_i} \psi'_{ip}\,\overline{\psi'_{iq}}$$

und

$$\int_{\mathfrak{m}_i} \psi_{ip}\,\psi_{iq}\,\overline{\psi}_{ir} = \int_{\mathfrak{m}'_i} \psi'_{ip}\,\psi'_{iq}\,\overline{\psi}'_{ir},$$

die Systeme $\{e(\mathfrak{m}_i)\cdot\psi\}$ und $\{e'(\mathfrak{m}'_i)\cdot\psi'\}$ sind daher auf $\mathfrak{m}_i$ bzw. $\mathfrak{m}'_i$ zueinander isomorph. Da sie dort offenbar auch vollständig sind, gibt es nach dem obigen eine im wesentlichen (also von Nullmengen abgesehen) eineindeutige maßtreue Punktabbildung von $\mathfrak{m}_i$ auf $\mathfrak{m}'_i$, welche die Funktion $e(\mathfrak{m}_i)\cdot\psi$ in die Funktion $e'(\mathfrak{m}'_i)\cdot\psi'$ überführt. Durch Zusammensetzung dieser Abbildungen bekommen wir eine im wesentlichen eineindeutige maßtreue Punktabbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, welche $e(\mathfrak{m}_i)\cdot\psi$ in $e'(\mathfrak{m}'_i)\cdot\psi'$, also $\sum_i e(\mathfrak{m}_i)\cdot\psi = \psi$ in $\sum_i e'(\mathfrak{m}'_i)\cdot\psi' = \psi'$ überführt. Wir haben also den folgenden

Satz 2. *Sei auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ je ein aus beschränkten Funktionen bestehendes vollständiges Funktionensystem $\{\psi(s)\}$ bzw. $\{\psi'(s')\}$ gegeben, die zueinander isomorph sind. Es gibt dann eine im wesentlichen eineindeutige maßtreue Punktabbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, welche die beliebige Funktion $h(s)$ aus L_2 (fast überall) in die (im Sinne von § 1) ihr zugeordnete Funktion $h'(s')$ überführt.*

§ 5.

Wir beschränkten uns bisher auf den Fall, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ Intervalle sind. Unsere Ergebnisse bleiben aber auch für allgemeinere Grundmengen gültig.

Betrachten wir sogleich den allgemeinsten Fall. Es ist bekannt, daß man auch auf abstrakten Mengen einen Maßbegriff definieren kann, welcher die wesentlichen Eigenschaften des gewöhnlichen Lebesgueschen Integralbegriffs besitzt und mittels dessen man auch einen Integralbegriff einführen kann.

Sei auf einem gewissen Teilmengensystem σ der Grundmenge eine nichtnegative endlichwertige Mengenfunktion $\mu(\mathfrak{m})$ definiert, die absolut additiv im folgenden Sinne ist: ist $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge paarweise punktfremder, zu σ gehöriger Mengen, und ist überdies $\sum_i \mu(\mathfrak{m}_i)$ konvergent, so gehört auch $\sum_i \mathfrak{m}_i$ zu σ und es gilt $\mu(\sum_i \mathfrak{m}_i) = \sum_i \mu(\mathfrak{m}_i)$. Wir setzen noch voraus, daß mit $\mathfrak{m}_1$ und mit ihrer Teilmenge $\mathfrak{m}_2$ auch $\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1$ zu σ gehört; daß mit zwei Mengen auch ihre Summe und ihr Durchschnitt zu σ gehören; endlich, daß jede Teilmenge einer Menge vom Maße Null ebenfalls zu σ gehört (wir sagen, daß

$\mathfrak{m}$ vom Maße Null ist, wenn $\mu(\mathfrak{m}) = 0$ gilt). Die Mengen $\mathfrak{m}$ aus σ sollen meßbar und vom Maße $\mu(\mathfrak{m})$ heißen.

Die reellwertige Funktion f heißt meßbar, wenn der Teil jeder beliebigen meßbaren Menge, wo $f \geqq A$ ist, meßbar ist (A ist eine beliebige Konstante). Das Integral auf einer meßbaren Menge einer beliebigen, nirgends negativen, meßbaren Funktion können wir, wie üblich, als Limes von Summen definieren; das Integral auf der ganzen Grundmenge wird dann als die obere Grenze der auf allen meßbaren Teilmengen genommenen Integrale (falls diese existiert) erklärt. Die Ausdehnung dieser Definition auf Funktionen mit wechselndem Vorzeichen, sowie auf komplexwertige Funktionen geschieht in der üblichen Weise. Dieser Integralbegriff besitzt alle charakteristische Eigenschaften des gewöhnlichen Lebesgueschen, insbesondere gelten alle Konvergenzsätze. Bei der Betrachtung der Funktionen- und Mengenzuordnung in den §§ 1 bis 3 haben wir aber nur diese benutzt. Der einzige Unterschied gegen die Vorigen besteht darin, daß in diesem allgemeinen Falle die Menge, wo eine integrierbare Funktion größer als eine gegebene Konstante A ist, nicht notwendig meßbar, oder Summe von abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen sein muß. Lassen wir aber von dieser Menge die Punkte, wo die Funktion verschwindet, aus, so bekommen wir dennoch eine meßbare Menge, oder eine Summe von abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen. Für die auf diese Art reduzierten Mengen bleibt aber offenbar auch die letzte Behauptung des Satzes 1 gültig.

Als eine *Anwendung* werden wir beweisen, daß es im Hilbertschen Koordinatenraum und im Raume L_2 der auf einem Intervall im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne meßbaren, integrierbares Absolutwertquadrat besitzenden Funktionen keine zueinander isomorphen beschränkten vollständigen Systeme gibt. Für das Vektorensystem $\{\psi = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots)\}$ werden dabei die in den Isomorphie-Gleichungen (1) und (2) vorkommenden Integrale durch die Summen

$$\sum_i x_1^{(i)}\, \overline{x_2^{(i)}} \quad \text{bzw.} \quad \sum_i x_1^{(i)}\, x_2^{(i)}\, \overline{x_3^{(i)}}$$

ersetzt. Der Hilbertsche Koordinatenraum kann als ein Raum L_2 der Funktionen auf einer Grundmenge $\mathfrak{M}$ aufgefaßt werden, wo $\mathfrak{M}$ abzählbar unendlich viele Punkte und jeder Punkt das Maß 1 besitzt. Wäre dann aber unsere obige Behauptung unrichtig, so könnten wir eine maßtreue Mengenabbildung des Intervalls auf $\mathfrak{M}$ angeben, was aber unmöglich ist, da in $\mathfrak{M}$ nur Mengen von ganzzahligen Maßen vorkommen.

Der sich auf die *Punktabbildung* beziehende Satz 2 kann in diesem Maße nicht verallgemeinert werden. Wir haben ja in § 4 auch solche spezielle Eigenschaften des gewöhnlichen Lebesgueschen Maßbegriffes be-

nutzt, welche dieser abstrakte Maßbegriff nicht besitzen kann. Wir haben nämlich benutzt, daß jedes Intervall meßbar ist und daß jede meßbare Menge Teil einer solchen Menge vom gleichen Maße ist, welche offen oder Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen offenen Mengen ist ($\mathfrak{m} = \mathfrak{U} - \mathfrak{O}$). Das durch eine monoton nichtabnehmende Funktion erzeugte Lebesgue-Stieltjessche Maß besitzt aber ebenfalls diese Eigenschaften. Sind also die Integrale auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ Lebesgue-Stieltjessche, so bleibt auch Satz 2 gültig.

Der Satz 2 gilt natürlich auch für beliebige solche Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, zu denen es je ein Intervall mit je einem Lebesgue-Stieltjesschen Maßbegriff gibt, so daß $\mathfrak{M}$ auf das eine, $\mathfrak{M}'$ auf das andere Intervall im wesentlichen eineindeutig und maßtreu abgebildet werden kann.

(Eingegangen am 15. Juni 1936.)

Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged.

Einleitung.

Das auf dem Intervall (0, 1) definierte Funktionensystem $\{\cos 4\pi n s, \sin 4\pi n s\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist offenbar im Raume L_2 aller reellwertigen Funktionen, die auf diesem Intervall samt ihren Quadraten Lebesgue-integrierbar sind, nicht vollständig. Es können ja nur diejenigen Funktionen $f(s)$ durch Linearkompositionen der obigen Funktionen im Quadratintegral-Mittel approximiert werden, für welche die Äquivalenz $f(s) \sim f(s + \frac{1}{2})$ auf $(0, \frac{1}{2})$ erfüllt ist. Wählen wir nun aber aus der Gesamtheit aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen von (0, 1) diejenigen Mengen heraus, für deren charakteristische Funktionen die gleiche Äquivalenz gilt, und bezeichnen wir nur diese ausgewählten Mengen als meßbar, dann ist somit ein abstrakter Maßbegriff auf (0, 1) eingeführt; die Gesamtheit der in bezug auf diesen abstrakten Maßbegriff samt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen ist offenbar identisch mit der Gesamtheit der obigen Funktionen $f(s)$. Das Funktionensystem $\{\cos 4\pi n s, \sin 4\pi n s\}$ ist also in bezug auf diesen Maßbegriff vollständig.

Fassen wir einmal kurz zusammen, was man genauer unter einem abstrakten Maßbegriff zu verstehen pflegt. Sei auf einem Teilmengensystem σ einer abstrakten Grundmenge eine nirgends negative endlichwertige Mengenfunktion $\mu(\mathfrak{m})$ definiert, die absolut additiv im folgenden Sinne ist: sind die endlich oder abzählbar unendlich vielen zu σ gehörigen Mengen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3, \ldots$ paarweise punktfremd und ist die Summe $\sum_i \mu(\mathfrak{m}_i)$ konvergent, so enthält σ auch die Menge $\sum_i \mathfrak{m}_i$ und es gilt

$$\mu\left(\sum_i \mathfrak{m}_i\right) = \sum_i \mu(\mathfrak{m}_i).$$

Man verlangt überdies, daß σ mit zwei Mengen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ auch die Mengen $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$ enthält und ferner, daß mit einer solchen Menge $\mathfrak{m}$, für welche $\mu(\mathfrak{m}) = 0$, auch alle ihre Teilmengen zu σ gehören. Man nennt dann die zu σ gehörigen Mengen (σ)-meßbar und $\mu(\mathfrak{m})$ das Maß von $\mathfrak{m}$. Mittels eines solchen Maßbegriffs kann man dann einen Integralbegriff nach dem Vorbilde des gewöhnlichen Lebesgueschen Integrals einführen. Ein so definiertes Integral werden wir ein Maß-Integral nennen. Es hat analoge Grundeigenschaften wie das gewöhn-

liche Lebesguesche Integral, es gelten insbesondere die charakteristischen Konvergenzsätze (Sätze von Lebesgue und von B. Levi).

Ein solches Mengensystem σ hat immer Untersysteme, welche mit ungeänderter Definition der Funktion $\mu(\mathfrak{m})$ die gleichen Abgeschlossenheitseigenschaften wie σ haben. Ein solches Untersystem $\tilde{\sigma}$ wollen wir zulässig heißen. In unserem obigen Beispiel ist σ durch alle Lebesguemeßbaren Teilmengen von (0, 1) gebildet, während $\tilde{\sigma}$ nur diejenigen zu σ gehörigen Mengen umfaßt, für deren charakteristische Funktionen die genannte Äquivalenz gilt.

Das Funktionensystem $\{\cos 4\pi ns, \sin 4\pi ns\}$ ist ein einfaches Beispiel für ein „in sich abgeschlossenes" Funktionensystem. Ein solches Funktionensystem ist immer auf einem zulässigen Untersystem des Systems aller ursprünglich meßbaren Mengen vollständig.

§ 1.

Begriff der Abgeschlossenheit in sich.

Sei $\mathfrak{M}$ eine Lebesgue-meßbare, oder allgemeiner eine beliebige solche Menge, auf welcher ein abstrakter Maßbegriff und mittels dessen ein Maß-Integral definiert ist. Es sei ein System $\{\psi\}$ von auf $\mathfrak{M}$ definierten *reellwertigen beschränkten* Funktionen ψ gegeben, die sämtlich auf $\mathfrak{M}$ *meßbar* und *quadratisch integrierbar* sind. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}$ die Gesamtheit derjenigen meßbaren, quadratisch integrierbaren Funktionen, welche durch geeignete (mit reellen Koeffizienten gebildete) Linearkompositionen der ψ im Quadratintegral-Mittel beliebig genau approximiert werden können. Aus der Minkowskischen Dreiecksungleichung folgt, daß jede solche Funktion, welche durch Linearkompositionen zu $\mathfrak{L}$ gehöriger Funktionen im Quadratintegral-Mittel beliebig genau approximierbar ist, ebenfalls zu $\mathfrak{L}$ gehört.

Die Produkte von je zwei (nicht notwendig voneinander verschiedenen) im System $\{\psi\}$ enthaltenen Funktionen sind offenbar meßbar und (wegen der Beschränktheit der ψ) auch quadratisch integrierbar, sie gehören aber im allgemeinen nicht zu $\mathfrak{L}$. *Hat aber das System $\{\psi\}$ außer den schon aufgezählten noch die Eigenschaft, daß alle diese Produkte zu $\mathfrak{L}$ gehören, so werden wir es in sich abgeschlossen nennen*[1]).

[1]) A. Haar hat schon in einer Arbeit [Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 769—798] in sich abgeschlossene Funktionensysteme (von anderem Gesichtspunkt aus) behandelt. Die Haarsche Definition dieses Begriffs ist aber spezieller, als die unsere, da Haar noch fordert, daß auch die Funktion 1 (in unserer Bezeichnung) zu $\mathfrak{L}$ gehört.

Wir beweisen zwei Sätze für in sich abgeschlossene Funktionensysteme:

1. 1. *Gehören h_1 und h_2 zu $\mathfrak{L}$ und ist außerdem h_1 beschränkt, so gehört auch das Produkt $h_1 h_2$ zu $\mathfrak{L}$.*

Beweis. Es sei ψ eine beliebige Funktion aus $\{\psi\}$, $|\psi| \leqq M$, und es sei ε eine positive Zahl. Die Koeffizienten c_i seien so gewählt, daß

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1 - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i)^2 < \frac{\varepsilon}{M^2}$$

gilt.

Dann ist aber

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1 \psi - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i \psi)^2 < \varepsilon,$$

woraus folgt, daß mit den $\psi_i \psi$ auch $h_1 \psi$ zu $\mathfrak{L}$ gehört. Seien ferner die Koeffizienten c_i' so gewählt, daß

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_2 - \sum_{i=1}^{m} c_i' \psi_i)^2 < \frac{\varepsilon}{H^2}$$

gilt, wo mit H eine obere Schranke von $|h_1|$ bezeichnet ist. Dann bekommen wir

$$\int_{\mathfrak{M}} (h_1 h_2 - \sum_{i=1}^{m} c_i' \psi_i h_1)^2 < \varepsilon.$$

Mit den $h_1 \psi_i$ gehört also auch $h_1 h_2$ zu $\mathfrak{L}$.

Durch vollständige Induktion läßt sich dann beweisen, daß mit einer beschränkten Funktion h auch ihre Potenzen h^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zu $\mathfrak{L}$ gehören.

1. 2. *Sei h eine beschränkte, zu $\mathfrak{L}$ gehörige Funktion und sei H eine obere Schranke von h. Die Funktion $F(x)$ sei auf dem Intervall $[-H, H]$ stetig oder gehöre zur ersten Baireschen Klasse und es gelte dort die Ungleichung $|F(x)| \leqq C|x|$ mit einer geeigneten positiven Zahl C. Dann gehört auch $F(h)$ zu $\mathfrak{L}$.*

Beweis. Die Funktion

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

gehört ebenfalls zur ersten Baireschen Klasse und es gilt die Ungleichung $|G(x)| \leqq C$. Es gibt also eine überall auf $[-H, H]$ gegen $G(x)$ konvergierende Polynomfolge $P_n(x)$, so daß $|P_n(x)| \leqq C$ gilt. Es gilt dann offenbar: $x \cdot P_n(x) \to F(x)$.

Die Funktionen $(F(h))^2$ und $(F(h) - h \cdot P_m(h))^2$ sind integrierbar, da sie Limites der durch $4C^2h^2$ majorisierten Folgen $(h \cdot P_n(h))^2$ bzw. $(h \cdot P_n(h) - h \cdot P_m(h))^2$ für $n \to \infty$ sind. So ergibt sich auch, daß für $m \to \infty$

$$\int_{\mathfrak{M}} (F(h) - h \cdot P_m(h))^2 \to 0$$

gilt.

Da die Funktionen $h \cdot P_m(h)$ zu $\mathfrak{L}$ gehören (vgl. 1.1), gehört auch $F(h)$ zu $\mathfrak{L}$.

Sei A eine beliebige positive Zahl, dann sind die Funktionen

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } -H \leqq x < A \\ 1 \text{ für } A \leqq x \leqq H \end{cases} \text{ und } F_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } -H \leqq x \leqq -A \\ 0 \text{ für } -A < x \leqq H \end{cases}$$

offenbar von den gewünschten Eigenschaften. Die Funktionen $F_1(h)$ und $F_2(h)$ gehören also zu $\mathfrak{L}$. Wir werden die Menge der Punkte, wo h nicht kleiner als eine gegebene positive Zahl, oder, wo h nicht größer als eine gegebene negative Zahl ist, eine *Niveaumenge* von h nennen. Nach dem soeben gewonnenen Ergebnis gehören die charakteristischen Funktionen der Niveaumengen von h zu $\mathfrak{L}$.

§ 2.

Einführung des Maß-Integrals, in bezug auf welches das System $\{\psi\}$ vollständig ist.

Das System $\{\psi\}$ sei in sich abgeschlossen. Die Niveaumengen der in $\{\psi\}$ enthaltenen Funktionen besitzen also zu $\mathfrak{L}$ gehörige charakteristische Funktionen. Wir erweitern die Gesamtheit dieser charakteristischen Funktionen durch die folgenden, wiederholt angewandten Verfahren. Wir nehmen zu zwei Funktionen auch ihre oberen und unteren Einhüllenden, sowie ihre Differenz, falls diese nirgends negativ ist; wir nehmen ferner zu einer monoton wachsenden Folge auch ihren Limes, falls dieser integrierbar ist. Diese Verfahren geben offenbar immer charakteristische Funktionen; wir behaupten, daß sie sogar nicht aus $\mathfrak{L}$ hinausführen.

Mit zwei charakteristischen Funktionen e_1 und e_2 gehören ja nach 1.1 auch $e_1 e_2 = \inf(e_1, e_2)$ und folglich auch $e_1 + e_2 - e_1 e_2 = \sup(e_1, e_2)$ zu $\mathfrak{L}$. Ist endlich e_n eine gegen die integrierbare Funktion e konvergierende monoton wachsende Folge, so ist offenbar e Limes auch im Quadratintegral-Mittel der Folge e_n. Es gehört also mit den e_n auch e zu $\mathfrak{L}$.

Das so erweiterte System von charakteristischen Funktionen bestimmt ein System von Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Wir ergänzen noch dieses Mengensystem wie folgt: Gehören $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ zum System, hat $\mathfrak{m}_2$ das Maß 0 und ist $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_2$, so fügen wir auch $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}$ zum System. Das

so ergänzte System $\tilde{\sigma}$ ist offenbar ein zulässiges Untersystem (im Sinne der Einleitung) des Systems σ aller ursprünglich meßbaren Mengen. Wie man leicht einsieht, ist ein Punkt von $\mathfrak{M}$ dann und nur dann in einer zu $\tilde{\sigma}$ gehörigen Menge enthalten, wenn es eine in diesem Punkte nicht verschwindende Funktion ψ gibt. Das System $\tilde{\sigma}$ bestimmt einen neuen abstrakten Maß- und Integralbegriff. Da wir bei der Definition von $\tilde{\sigma}$ eben von den Niveaumengen der ψ ausgegangen sind, sind die ψ offenbar $(\tilde{\sigma})$-meßbar und ihre Quadrate sind $(\tilde{\sigma})$-integrierbar. Das System $\{\psi\}$ ist aber in bezug auf dieses neue Maß-Integral vollständig. Es genügt einzusehen, daß für die charakteristische Funktion e einer jeden $(\tilde{\sigma})$-meßbaren Menge das $(\tilde{\sigma})$-Integral von

$$(e - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i)^2$$

durch geeignete Wahl der Linearkomposition $\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i$ beliebig klein gemacht werden kann. Dies folgt einerseits unmittelbar daraus, daß das $(\tilde{\sigma})$-Integral einer Funktion offenbar gleich ihrem ursprünglichen Integral ist, andererseits, daß e zu $\mathfrak{L}$ gehört.

Wir bewiesen somit den folgenden

Satz 1. *Das System $\{\psi\}$ gewisser auf der Grundmenge $\mathfrak{M}$ definierter Funktionen ψ sei in bezug auf ein zugrunde gelegtes Maß-Integral in sich abgeschlossen. Dann können wir, von den Niveaumengen der ψ ausgehend, ein zulässiges Untersystem $\tilde{\sigma}$ aus dem System σ der ursprünglich meßbaren Mengen auswählen, so daß $\{\psi\}$ in bezug auf das durch $\tilde{\sigma}$ bestimmte Maß-Integral vollständig ist.*

§ 3.

Ausdehnung der Resultate auf komplexwertige Funktionensysteme.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir uns auf den Fall der reellwertigen Funktionen beschränkt. Nun wollen wir den Begriff der Abgeschlossenheit in sich auch für Systeme komplexwertiger Funktionen ausdehnen.

Wir betrachten ein System $\{\psi\}$ von solchen *komplexwertigen meßbaren* Funktionen ψ, für welche $|\psi|$ *beschränkt* und $|\psi|^2$ *integrierbar* ist. $\mathfrak{L}$ bezeichne die Gesamtheit aller solchen komplexwertigen Funktionen, welche durch geeignete Linearkompositionen der ψ mit komplexen Koeffizienten im Absolutwertquadrat-Integralmittel beliebig genau approximierbar sind.

Hat das System $\{\psi\}$ noch die Eigenschaft, daß mit zwei (nicht notwendig voneinander verschiedenen) im System enthaltenen Funktionen ψ_1

und ψ_2 auch die Produkte $\psi_1 \psi_2$ und $\psi_1 \overline{\psi}_2$[2]) zu $\mathfrak{L}$ gehören, so werden wir es *in sich abgeschlossen* nennen[3]).

Die Betrachtung der komplexwertigen in sich abgeschlossenen Systeme läßt sich leicht auf die der reellwertigen zurückführen. Ist nämlich $\{\psi\}$ in sich abgeschlossen, so gehören mit $\psi_1 \psi_2$ und $\psi_1 \overline{\psi}_2$ auch

$$\psi_1 \cdot \Re(\psi_2) = \tfrac{1}{2}(\psi_1 \psi_2 + \psi_1 \overline{\psi}_2)$$

und

$$\psi_1 \cdot \Im(\psi_2) = \frac{1}{2i}(\psi_1 \psi_2 - \psi_1 \overline{\psi}_2)$$

zu $\mathfrak{L}$. Es gibt also für jedes positive ε eine solche Linearkomposition $\sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j$, für welche die Ungleichungen

$$\int_{\mathfrak{M}} |\psi_1 \cdot \Re(\psi_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j|^2 < \varepsilon$$

und folglich

$$\int_{\mathfrak{M}} \Big[\Re(\psi_1) \cdot \Re(\psi_2) - \sum_{j=1}^{n} \big(\Re(c_j) \cdot \Re(\psi_j) - \Im(c_j) \cdot \Im(\psi_j)\big)\Big]^2$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} \Big[\Re(\psi_1 \cdot \Re(\psi_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j)\Big]^2 \leqq \int_{\mathfrak{M}} |\psi_1 \Re(\psi_2) - \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j|^2 < \varepsilon$$

statthaben.

Das Produkt $\Re(\psi_1) \cdot \Re(\psi_2)$ und ebenso die Produkte $\Re(\psi_1) \cdot \Im(\psi_2)$, $\Im(\psi_1) \cdot \Re(\psi_2)$, $\Im(\psi_1) \cdot \Im(\psi_2)$ sind also durch geeignete Linearkompositionen der $\Re(\psi)$ und $\Im(\psi)$ im Quadratintegral-Mittel beliebig genau approximierbar. Das reellwertige System $\{\Re(\psi), \Im(\psi)\}$ ist also ebenfalls in sich abgeschlossen. *Der Satz 1 bleibt also auch für komplexwertige Funktionensysteme wörtlich gültig*, wenn man unter einer Niveaumenge der komplexwertigen Funktion ψ eine Niveaumenge von $\Re(\psi)$ oder $\Im(\psi)$ versteht. (Anders ausgedrückt: bezeichne $\mathfrak{Z}$ eine solche Halbebene der komplexen z-Ebene, welche durch eine der Ungleichungen

$$\Re(z) \geqq A, \quad \Re(z) \leqq -A, \quad \Im(z) \geqq A, \quad \Im(z) \leqq -A,$$

mit gewissem $A > 0$ bestimmt ist, dann ist $\mathfrak{m}[\psi \in \mathfrak{Z}]$, d. h. die Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{M}$, wo ψ einen in $\mathfrak{Z}$ fallenden Wert annimmt, eine Niveaumenge von ψ.)

---

[2]) Die konjugierte einer komplexen Größe z wird mit $\bar{z}$ bezeichnet werden.

[3]) Auch A. Haar hat in einer Arbeit [Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme, Annali di Pisa, 2 (1933), S. 21—40], seinen Begriff der Abgeschlossenheit in sich [vgl. a. a. O.[1])] auf komplexwertige Systeme ausgedehnt. Die von ihm gegebene Definition ist aber insofern spezieller, als er noch fordert, daß auch die Funktionen $\overline{\psi}_1 \overline{\psi}_2$ und 1 zu $\mathfrak{L}$ gehören.

§ 4.

Sätze über gewisse lineare Funktionaloperationen.

Wir sind oben bei der Definition der Abgeschlossenheit in sich immer von einem solchen Integralbegriff ausgegangen, welcher mittels eines Maßbegriffs eingeführt wurde. Statt eines solchen Maß-Integrals können wir aber auch allgemeinere lineare Funktionaloperationen unserer Diskussion zugrunde legen.

$\mathfrak{M}$ sei eine beliebige Grundmenge; $\mathfrak{K}$ sei eine solche Klasse von auf $\mathfrak{M}$ definierten reellwertigen, aber nicht notwendig überall endlichwertigen Funktionen, welche mit der Funktion f auch $|f|$ und cf (wo c eine beliebige reelle Zahl ist) und ferner mit f_1 und f_2 auch $f_1 + f_2$ enthält. (In einem Punkte, wo f_1 gleich ∞, f_2 gleich $-\infty$ ist, kann die Summe $f_1 + f_2$ beliebig erklärt werden.)

Die Funktionaloperation $I[f]$, die jeder Funktion f aus $\mathfrak{K}$ eine (endliche) reelle Zahl zuordnet, besitze die folgenden Eigenschaften:

A. Sie ist *linear*, also $I[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 I[f_1] + c_2 I[f_2]$,

B. Sie ist *positiv*, also $I[f] \geqq 0$ für $f \geqq 0$,

C. Sie ist *abgeschlossen* im folgenden Sinne: ist f_n eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathfrak{K}$ und ist $\lim\limits_{n\to\infty} I[f_n]$ endlich, so gehört auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ zu $\mathfrak{K}$ und es gilt $I[\lim\limits_{n\to\infty} f_n] = \lim\limits_{n\to\infty} I[f_n]$[4]).

Aus diesen Forderungen folgt schon die Gültigkeit des folgenden Satzes: ist f_n eine konvergente Folge von Funktionen aus $\mathfrak{K}$ und ist die Folge $|f_n|$ durch eine zu $\mathfrak{K}$ gehörige Funktion majorisiert, so gehört auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ zu $\mathfrak{K}$ und es gilt $I[\lim\limits_{n\to\infty} f_n] = \lim\limits_{n\to\infty} I[f_n]$. Man beweist diesen Satz in derselben Weise, wie den Lebesgueschen Satz in der Theorie des Lebesgueschen Integrals. — Eine andere Folgerung der obigen Forderungen: ist $I[f] = 0$, $f \geqq 0$, so gehört jede solche Funktion g, für welche $0 \leqq g \leqq f$ gilt, ebenfalls zu $\mathfrak{K}$. Aus A. und C. folgt nämlich, daß $\lim\limits_{n\to\infty} (nf)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört. Da g offenbar eine mögliche Erklärung von $\lim\limits_{n\to\infty} (nf) - \lim\limits_{n\to\infty} (nf)$ ist, gehört ebenfalls zu $\mathfrak{K}$.

---

[4]) Wir bemerken, daß folgendes gilt: Bedeute $\mathfrak{K}_0$ eine solche lineare Mannigfaltigkeit von beschränkten Funktionen, welche mit einer Funktion auch ihren Absolutwert enthält. $I_0[f]$ sei eine auf $\mathfrak{K}_0$ definierte positive lineare Operation von der Eigenschaft, daß für jede monoton gegen 0 konvergierende Folge f_n von Funktionen aus $\mathfrak{K}_0$ $I_0[f_n] \to 0$ gilt. Dann läßt sich die Definition dieser Operation auf eine größere Funktionenklasse $\mathfrak{K}$ ausdehnen, so daß $\mathfrak{K}$ und die erweiterte Operation $I[f]$ die oben im Texte geforderten Eigenschaften besitzen. Vgl. P. J. Daniell, A general form of integral, Annals of Mathematics, 19 (1918), S. 279—294.

Ist auf $\mathfrak{M}$ ein Maßbegriff im Sinne der Einleitung eingeführt, so definiert $I[f] = \int_{\mathfrak{M}} f$ offenbar eine solche lineare Funktionaloperation für die Klasse $\mathfrak{K}$ aller inbezug auf diesen Maßbegriff integrierbaren Funktionen. Es gilt aber im allgemeinen nicht, daß umgekehrt jede Funktionaloperation vom obigen Typus aus einem Maßbegriff als die zugehörige Integraloperation ableitbar ist[5]).

Sei also eine solche Funktionaloperation $I[f]$ für die Funktionen aus der Klasse $\mathfrak{K}$ gegeben. Wir werden die Funktionen aus $\mathfrak{K}$ kurz integrierbar nennen. Wir beweisen einige weitere Eigenschaften dieser Funktionaloperation, die wir im folgenden benötigen werden.

4.1. *Sind die integrierbaren Funktionen f und g beide nirgends negativ und ist $\varkappa$ eine zwischen* 0 *und* 1 *liegende Zahl, so ist auch $f^{\varkappa} g^{1-\varkappa}$ integrierbar.*

Beweis[6]). Bedeute h_λ für positives λ die Funktion

$$\varkappa \lambda^{1-\varkappa} f + (1-\varkappa)\lambda^{-\varkappa} g.$$

Durchläuft λ_n alle positiven rationalen Zahlen, so gilt

$$f^{\varkappa} g^{1-\varkappa} = \lim_{n\to\infty} [\inf (h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \ldots, h_{\lambda_n})],$$

wie man dies aus der Tatsache folgern kann, daß das Minimum der Funktion $\varkappa a |x|^{1-\varkappa} + (1-\varkappa) b |x|^{-\varkappa}$ gleich $a^{\varkappa} b^{1-\varkappa}$ ist (a und b bedeuten dabei zwei nichtnegative Konstanten). Nun ist mit zwei und ebenso allgemeiner mit endlich vielen integrierbaren Funktionen auch ihre untere Einhüllende integrierbar[7]), also ist jedes Glied der monoton abnehmenden positiven Folge

$$\inf (h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \ldots, h_{\lambda_n}),$$

folglich auch ihr Limes, $f^{\varkappa} g^{1-\varkappa}$, integrierbar.

Als eine spezielle Folgerung dieses Resultates ergibt sich, daß mit zwei Potenzen einer nirgends negativen Funktion, f^{α} und f^{β}, alle Potenzen mit zwischen α und β liegenden Exponenten gleichfalls integrierbar sind.

4.2. *Sei die Funktion f nirgends negativ und beschränkt, $0 \leqq f \leqq A$, und seien f^{α} und f^{β}, $0 \leqq \alpha < \beta$, integrierbar. Ist nun die Funktion $F(x)$ auf dem Intervall $[0, A]$ stetig, oder gehört sie zur ersten Baireschen Klasse und gilt dort mit geeignetem C die Ungleichung $|F(x)| \leqq C x^{\alpha}$, so ist auch $F(f)$ integrierbar.*

---

[5]) Vgl. a. a. O. [4]).

[6]) Wir wiederholen eine analoge Schlußweise von Herrn F. Riesz, Sur l'intégrale de Lebesgue comme l'opération inverse de la dérivation, Annali di Pisa 5 (1936), S. 191—212, insbesondere S. 198—199.

[7]) Es gilt ja $\inf (f, g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$.

Beweis. Da die Funktion

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x^\alpha} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

auf dem Intervall beschränkt ist und der ersten Baireschen Klasse angehört, gibt es eine gleichmäßig beschränkte Folge $G_n(x)$ von stetigen Funktionen, welche überall auf $[0, A]$ gegen $G(x)$ strebt. Laut bekannten Approximationssätzen kann man die stetige Funktion $G_n(x)$ durch eine Linearkomposition $P_n(x)$ der Potenzen $x^\varkappa$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq \beta - \alpha$ gleichmäßig mit der Genauigkeit $\frac{1}{n}$ approximieren. Es gilt also

$$P_n(x) \to G(x), \quad x^\alpha \cdot P_n(x) \to F(x),$$
$$|x^\alpha \cdot P_n(x)| \leqq C' x^\alpha.$$

Wir haben also auch

$$f^\alpha \cdot P_n(f) \to F(f) \quad \text{und} \quad |f^\alpha \cdot P_n(f)| \leqq C' f^\alpha.$$

Wenn also $f^\alpha \cdot P_n(f)$ integrierbar ist, dann muß auch $F(f)$ integrierbar sein. Die Funktion $f^\alpha \cdot P_n(f)$ ist aber eine Linearkomposition von Potenzen $f^{\alpha+\varkappa}$ $(0 \leqq \varkappa \leqq \beta - \alpha)$, also wegen 4.1 (letzte Bemerkung) gewiß integrierbar.

4.3. *Sei f eine beschränkte Funktion mit integrierbaren α-ten und β-ten Potenzen (α und β sind zwei positive voneinander verschiedene nichtnegative ganze Zahlen, β ungerade). Dann sind $\overset{(+)}{f}{}^\varkappa$ und $\overset{(-)}{f}{}^\varkappa$ [8]), sobald $\varkappa \geqq \min(\alpha, \beta)$, integrierbar. Die charakteristischen Funktionen der Niveaumengen von f sind ebenfalls integrierbar.*

Beweis. Da β ungerade ist, gilt $\overset{(+)}{f}{}^\beta = \overset{(+)}{f^\beta} = \frac{1}{2}(f^\beta + |f^\beta|)$. Es ist also $\overset{(+)}{f}{}^\beta$ und ebenso $\overset{(-)}{f}{}^\beta$ integrierbar. Es gilt ferner offenbar

$$\overset{(+)}{f}{}^\alpha = \tfrac{1}{2} \lim_{k \to \infty} \left[\inf\left(f^\alpha, k \overset{(+)}{f}{}^\beta\right) + \left| \inf\left(f^\alpha, k \overset{(+)}{f}{}^\beta\right) \right| \right].$$

Da der in eckigen Klammern stehende Ausdruck für jedes k integrierbar ist und durch $2|f^\alpha|$ majorisiert wird, ist auch $\overset{(+)}{f}{}^\alpha$ und ebenso $\overset{(-)}{f}{}^\alpha$ integrierbar. Die α-ten und β-ten Potenzen von $\overset{(+)}{f}$ und $\overset{(-)}{f}$ sind also integrierbar.

Setzen wir $F(x) = x^\varkappa$, wo $\varkappa \geqq \min(\alpha, \beta)$ ist. Man kann leicht ein C finden, mit welchem auf $0 \leqq x \leqq \max|f|$ die Ungleichung

$$|F(x)| \leqq C x^{\min(\alpha, \beta)}$$

statt hat. Nach 4.2 sind also $F\left(\overset{(+)}{f}\right) = \overset{(+)}{f}{}^\varkappa$ und $F\left(\overset{(-)}{f}\right) = \overset{(-)}{f}{}^\varkappa$ integrierbar.

---

[8]) $\overset{(+)}{f} = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $\overset{(-)}{f} = \frac{1}{2}(|f| - f) = \overset{(+)}{f} - f$.

Sei nun A eine positive Zahl. Wir setzen

$$F_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x < A, \\ 1 & \text{für } A \leqq x. \end{cases}$$

Dann gilt auf $0 \leqq x \leqq \max |f|$ die Ungleichung $|F(x)| \leqq \left(\frac{x}{A}\right)^{\min(\alpha, \beta)}$.

Aus unserem letzten Resultat und aus 4.2 ergibt sich also, daß $F_A\left(\overset{(+)}{f}\right)$ und $F_A\left(\overset{(-)}{f}\right)$, d. h. die charakteristischen Funktionen der Niveaumengen von f, integrierbar sind.

4.4. *Seien die α-ten und β-ten Potenzen der beschränkten Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ integrierbar; α und β sind nicht negative ganze Zahlen $(0 \leqq \alpha < \beta)$, deren eine ungerade ist. Dann ist das Produkt*

$$\prod_{i=1}^{n} f_i^{\lambda_i}$$

integrierbar, sobald die Summe der nichtnegativen ganzen Zahlen λ_i nicht kleiner als α ist.

Beweis. Das betrachtete Produkt kann offenbar in der Form

$$\Sigma \pm \prod_{i=1}^{n} \left(\overset{(\pm)}{f_i}\right)^{\lambda_i}$$

(wo $\overset{(\pm)}{f}$ entweder $\overset{(+)}{f}$, oder $\overset{(-)}{f}$ bezeichnet) geschrieben werden. Wir bezeichnen die Folge der nirgends negativen Funktionen $\overset{(+)}{f_1}, \overset{(-)}{f_1}, \overset{(+)}{f_2}, \overset{(-)}{f_2}, \ldots$ auch mit $g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots$. Nach 4.3 ist $g_i^{\varkappa}$, sobald $\varkappa \geqq \alpha$, integrierbar. Wenn wir beweisen können, daß das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} g_i^{\mu_i},$$

sobald die Summe der nicht negativen Zahlen μ_i nicht kleiner als α ausfällt, integrierbar ist, dann wird zugleich auch die Behauptung von 4.4 bewiesen werden.

Ist unter den μ_i nur eins von 0 verschieden, so ist

$$\prod_{i=1}^{n} g_i^{\mu_i} = g_j^{\mu_j}$$

wegen $\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \geqq \alpha$ integrierbar (vgl. 4.3). Gilt die Behauptung immer dann, wenn unter den μ_i höchstens m von 0 verschieden sind $(m \geqq 1)$, so gilt sie auch für $m+1$ von 0 verschiedenen μ_i. Sei nämlich

$$\prod_{k=1}^{m+1} g_{i_k}^{\mu_{i_k}}$$

ein solches Produkt, $\mu_{i_k} > 0$, $m \geqq 1$. Aus $\sum_{k=1}^{m+1} \mu_{i_k} \geqq \alpha$ folgt die Ungleichung

$$\alpha - \mu_{i_{m+1}} \leqq \sum_{k=1}^{m} \mu_{i_k}.$$

Da überdies die Ungleichungen $\alpha - \mu_{i_{m+1}} < \alpha$ und $\sum_{k=1}^{m} \mu_{i_k} > 0$ bestehen, kann man eine Zahl Θ so auswählen, daß

$$0 < \Theta < 1 \text{ und } \alpha - \mu_{i_{m+1}} \leqq \alpha\Theta \leqq \sum_{k=1}^{m} \mu_{i_k}$$

gleichzeitig gelten. Dann sind aber

$$\prod_{k=1}^{m} g_{i_k}^{\frac{\mu_{i_k}}{\Theta}} \quad \text{und} \quad g_{i_{m+1}}^{\frac{\mu_{i_{m+1}}}{1-\Theta}}$$

wegen

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_{i_k}}{\Theta} \geqq \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\mu_{i_{m+1}}}{1-\Theta} \geqq \alpha$$

beide integrierbar. Es ist dann aber nach 4.1 auch

$$\prod_{k=1}^{m+1} g_{i_k}^{\mu_{i_k}} = \left(\prod_{k=1}^{m} g_{i_k}^{\frac{\mu_{i_k}}{\Theta}}\right)^{\Theta} \cdot \left(g_{i_{m+1}}^{\frac{\mu_{i_{m+1}}}{1-\Theta}}\right)^{1-\Theta}$$

integrierbar, womit alles bewiesen ist.

§ 5.

Abgeschlossenheit in sich in bezug auf eine Funktionaloperation.

Sei $\{\psi\}$ ein System von solchen auf $\mathfrak{M}$ definierten *beschränkten reellwertigen* Funktionen ψ, für welche ψ^2 und ψ^3 *in bezug auf eine lineare Funktionaloperation* $I[f]$ *vom betrachteten Typus integrierbar sind*[9]).

Die Gesamtheit aller solcher beschränkten Funktionen h, für welche h^2 und h^3 in bezug auf dieselbe lineare Funktionaloperation integrierbar sind, bilden nach 4.4 eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}^*$, in welcher durch $I[h_1 h_2]$ ein inneres Produkt und durch $\|h\| = (I[h^2])^{1/2}$ eine Norm definiert ist. Es gilt offenbar auch die Dreiecksungleichung: $\|h_1 + h_2\| \leqq \|h_1\| + \|h_2\|$.

---

[9]) Im Falle der Maßintegrale konnten wir statt der Integrierbarkeit von ψ^3 die Meßbarkeit von ψ voraussetzen. Aus der Meßbarkeit und Beschränktheit von ψ, sowie aus der Integrierbarkeit von ψ^2 folgte ja schon auch die Integrierbarkeit von ψ^3.

Statt der dritten Potenz könnten wir ebensogut eine Potenz von irgendeinem anderen positiven ungeraden Exponenten unseren Betrachtungen zugrunde legen. Wir bevorzugen die dritte Potenz, da diese den Bedürfnissen von § 6 am besten entspricht.

$\mathfrak{L}^{**}$ sei derjenige Teil von $\mathfrak{L}^{*}$, für deren Elemente h der Ausdruck $\|h - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i\|$ durch geeignete Wahl der mit reellen Zahlen c_i gebildeten Linearkomposition $\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i$ kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl gemacht werden kann. Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß $\mathfrak{L}^{**}$ eine lineare Mannigfaltigkeit ist und daß, wenn es zu einem g aus $\mathfrak{L}^{*}$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ ein h aus $\mathfrak{L}^{**}$ mit $\|g - h\| < \varepsilon$ gibt, dann auch g zu $\mathfrak{L}^{**}$ gehört.

Die ψ und ihre Linearkompositionen gehören offenbar zu $\mathfrak{L}^{**}$. *Hat das System $\{\psi\}$ noch die Eigenschaft, daß das Produkt von irgend zwei (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Funktionen aus $\{\psi\}$ zu $\mathfrak{L}^{**}$ gehört, so werden wir es (in bezug auf die Funktionaloperation $I[f]$) in sich abgeschlossen nennen.*

5.1. *Ist $\{\psi\}$ in sich abgeschlossen und gehören h_1 und h_2 zu $\mathfrak{L}^{**}$, so gehört auch $h_1 \cdot h_2$ zu $\mathfrak{L}^{**}$.*

Beweis. Man hat nur den Beweis von 1.1 zu wiederholen, indem man $\int_{\mathfrak{M}} f$ durch $I[f]$ ersetzt. Durch Anwendung von 4.4 kann man leicht einsehen, daß die Operation $I[f]$ für alle im Beweise vorkommenden Funktionen tatsächlich definiert ist.

Es gehören also insbesondere mit einer Funktion h auch ihre Potenzen h^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zu $\mathfrak{L}^{**}$.

5.2. *Sei h eine Funktion aus $\mathfrak{L}^{**}$. Die Funktion $F(x)$ sei auf dem Intervall $[-\max|h|, \max|h|]$ stetig, oder gehöre zur ersten Baireschen Klasse, und es gelte dort die Ungleichung $|F(x)| \leqq C|x|$ mit einem geeigneten C. Die Funktion $F(h)$ gehört dann auch zu $\mathfrak{L}^{**}$.*

Beweis. Die Polynomfolge $P_n(x)$ sei ebenso wie beim Beweise von 1.2 bestimmt. Die Funktionen

$$(F(h) - h \cdot P_m(h))^2, \quad (F(h))^2 \quad \text{bzw.} \quad (F(h))^3$$

sind offenbar integrierbar, da sie Limites der durch je ein konstantes Vielfaches von h^2 bzw. $|h^3|$ absolut majorisierten Folgen

$$(h \cdot P_n(h) - h \cdot P_m(h))^2, \quad (h \cdot P_n(h))^2 \quad \text{bzw.} \quad (h \cdot P_n(h))^3$$

sind. Ebenso ergibt sich, daß

$$\|F(h) - h \cdot P_m(h)\| \to 0 \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

gilt, womit bewiesen ist, daß mit den $h \cdot P_m(h)$ auch $F(h)$ zu $\mathfrak{L}^{**}$ gehört.

Die charakteristischen Funktionen der Niveaumengen einer zu $\mathfrak{L}^{**}$ gehörigen Funktion gehören also auch zu $\mathfrak{L}^{**}$.

Ebenso, wie im § 2 können wir nun, von den Niveaumengen der ψ ausgehend, ein System σ von Mengen $\mathfrak{m}$ mit zu $\mathfrak{L}^{**}$ gehörigen charakteristischen Funktionen $e(\mathfrak{m})$ konstruieren. Durch $\mu(\mathfrak{m}) = I[e(\mathfrak{m})]$ wird für diese Mengen ein abstraktes Maß definiert. Das System $\{\psi\}$ ist in bezug auf diesen Maßbegriff offenbar vollständig.

Satz 1*. *Wenn das System $\{\psi\}$ von auf $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen in bezug auf eine lineare Funktionaloperation $I[f]$ in sich abgeschlossen ist, dann kann man, von den Niveaumengen der ψ ausgehend, einen Maß- und mittels dessen einen Integralbegriff auf $\mathfrak{M}$ einführen, so daß für jede in bezug auf diesen Integralbegriff integrierbare Funktion f die Operation $I[f]$ definiert und gleich dem Integral von f ist und so daß ferner $\{\psi\}$ in bezug auf diesen Integralbegriff vollständig ist.*

Man kann dieses Ergebnis leicht auch auf *komplexwertige* Systeme $\{\psi\}$ ausdehnen. Wir fordern dann, daß der Absolutwert von jedem ψ aus $\{\psi\}$ beschränkt sei, daß für die zweiten und dritten Potenzen von $\mathfrak{R}(\psi)$ und $\mathfrak{J}(\psi)$ die zugrunde gelegte Funktionaloperation $I[f]$ definiert sei, endlich, daß der Ausdruck $\|\varphi - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i\| = (I[|\varphi - \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i|^2])^{1/2}$ für jedes φ von der Gestalt $\psi_1 \psi_2$ oder $\psi_1 \overline{\psi}_2$ (ψ_1, ψ_2 aus $\{\psi\}$) durch geeignete Wahl der mit komplexen Zahlen c_i gebildeten Linearkomposition $\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i$ beliebig klein gemacht werden kann. Die Betrachtung dieses Falles läßt sich ebenso, wie in § 3 auf den Fall der reellwertigen Systeme zurückführen.

§ 6.

Isomorphe in sich abgeschlossene Funktionensysteme.

Die gewonnenen Ergebnisse ermöglichen die Ausdehnung von Sätzen über isomorphe vollständige auf isomorphe in sich abgeschlossene Funktionensysteme.

Die Systeme $\{\varphi\}$ und $\{\varphi'\}$ von gewissen auf den Grundmengen $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ definierten komplexwertigen beschränkten Funktionen seien in bezug auf je ein auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ zugrunde gelegtes Maßintegral vollständig. Sie heißen isomorph, wenn man zwischen den φ und φ' eine eineindeutige Zuordnung, $\varphi \longleftrightarrow \varphi'$, herstellen kann, so daß für beliebige einander zugeordnete Paare, $\varphi_1 \longleftrightarrow \varphi_1'$, $\varphi_2 \longleftrightarrow \varphi_2'$, $\varphi_3 \longleftrightarrow \varphi_3'$, die Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_1 \overline{\varphi}_2 = \int_{\mathfrak{M}'} \varphi_1' \overline{\varphi_2'} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{M}} \varphi_1 \varphi_2 \overline{\varphi}_3 = \int_{\mathfrak{M}'} \varphi_1' \varphi_2' \overline{\varphi_3'}$$

bestehen.

Es gilt dann der folgende Satz[10]):

Man kann zwischen denjenigen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, die entweder meßbar oder Vereinigungsmengen von abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen sind, eine solche (von Äquivalenz abgesehen) eineindeutige, maßtreue Zuordnung herstellen, welche noch die folgenden Eigenschaften hat: Sie ist invariant gegenüber den (auf endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen angewandten) Mengenoperationen[11]), sie ordnet ferner für jedes Paar φ, φ' durch die Isomorphiebeziehung $\varphi \longleftrightarrow \varphi'$ miteinander verknüpfter Funktionen die zu gleichen Niveaus gehörigen Niveaumengen[12]) $\mathfrak{m}[\varphi \in \mathfrak{Z}]$ und $\mathfrak{m}'[\varphi' \in \mathfrak{Z}]$ einander zu.

Sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige solche Borelsche Menge der komplexen z-Ebene, welche den Punkt $z = 0$ nicht enthält. Die Mengen $\mathfrak{m}[\varphi \in \mathfrak{B}]$ und $\mathfrak{m}'[\varphi' \in \mathfrak{B}]$ sind offenbar beide meßbar oder Vereinigungsmengen abzählbar unendlichvieler meßbarer Mengen. Sie sind durch die obige Mengenzuordnung einander zugeordnet, da man sie offenbar durch dieselben Mengenoperationen aus zu gleichen Niveaus gehörigen φ- und φ'-Niveaumengen gewinnen kann. Bedeutet $\mathfrak{B}^*$ eine solche Borelsche Menge in der komplexen z-Ebene, deren Abstand vom Punkte $z = 0$ positiv ausfällt, so werden wir $\mathfrak{m}[\varphi \in \mathfrak{B}^*]$ eine Niveaumenge im weiteren Sinne (i. w. S.) von φ und $\mathfrak{m}'[\varphi' \in \mathfrak{B}^*]$ die zum gleichen Niveau gehörige Niveaumenge i. w. S. von φ' nennen. Diese sind immer meßbar, einander zugeordnet und also vom gleichen Maße.

Seien nun die Systeme $\{\psi\}$ und $\{\psi'\}$ von gewissen auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ definierten Funktionen beide *in sich abgeschlossen* (in bezug auf je ein Maßintegral oder allgemeiner in bezug auf je eine lineare Funktionaloperation $I[f]$ bzw. $I'[f']$). Sie sind *isomorph*, wenn eine eineindeutige Zuordnung $\psi \longleftrightarrow \psi'$ zwischen den ψ und ψ' hergestellt werden kann, so daß für beliebige $\psi_1 \longleftrightarrow \psi_1'$, $\psi_2 \longleftrightarrow \psi_2'$, $\psi_3 \longleftrightarrow \psi_3'$ die Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{M}} \psi_1 \overline{\psi}_2 = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_1' \overline{\psi_2'} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{M}} \psi_1 \psi_2 \overline{\psi}_3 = \int_{\mathfrak{M}'} \psi_1' \psi_2' \overline{\psi_3'},$$

bzw.

$$I[\psi_1 \overline{\psi}_2] = I'[\psi_1' \overline{\psi_2'}] \quad \text{und} \quad I[\psi_1 \psi_2 \overline{\psi}_3] = I'[\psi_1' \psi_2' \overline{\psi_3'}]$$

bestehen.

Durch Zusammenfassung der oben für vollständige Systeme erwähnten Tatsachen mit den Sätzen 1 und 1* ergibt sich der folgende

---

[10]) Vgl. Béla v. Sz. Nagy, Über isomorphe vollständige Funktionensysteme, Math. Zeitschr. 43 (1937), S. 1—16.

[11]) Bildung von Unterschied-, Durchschnitt- und Vereinigungsmengen.

[12]) Vgl. das Ende von § 3.

Satz 2. *Sind die auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}'$ definierten in sich abgeschlossenen Funktionensysteme $\{\psi\}$, $\{\psi'\}$ isomorph, so haben die zu gleichen Niveaus gehörigen Niveaumengen (im weiteren Sinne), $\mathfrak{m}[\psi \in \mathfrak{B}^*]$ und $\mathfrak{m}'[\psi' \in \mathfrak{B}^*]$, eines beliebigen durch die Isomorphie einander zugeordneten Paares: ψ, ψ', gleiches Maß (d. h. es sind für die charakteristischen Funktionen dieser Mengen die Operationen $I[f]$ bzw. $I'[f']$ definiert und nehmen den gleichen Wert an). Bekommt man ferner aus ψ-Niveaumengen durch sukzessive Ausübung der (immer auf höchstens abzählbar unendlich viele Mengen angewandten) Mengenoperationen eine meßbare Menge, so geben die auf die zu gleichen Niveaus gehörigen ψ'-Niveaumengen ausgeübten gleichen Mengenoperationen eine ebenfalls meßbare Menge von demselben Maße.*

(Eingegangen am 24. August 1936.)

On the class of integral functions of finite order having the same zeroes as a given function and whose derivatives have the same zeroes as the derivative of the given function.

By

V. Ganapathy Iyer in Madras University (S. India).

1. Introduction: Let $g(z)$ be an integral function of finite order Let $\{\alpha_n\}$ denote the distinct zeroes of g arranged according to non-decreasing moduli. Let $N(\alpha_n)$ denote the multiplicity of the zero α_n. We denote by $C(g)$ the class of all functions f of finite order such that f has the same zeroes as g and f' has the same zeroes as g', the zeroes being counted according to their multiplicity. The object of this paper is to study the class $C(g)$.

Several problems allied to the one mentioned above have been studied by different writers. The most interesting of these results is the one due to Polya[1]) which says that if $g(z)$, $g'(z)$ and $g''(z)$ have all the same zeroes but for a finite number, then $g = e^{P(z)}Q(z)$ where $P(z)$ and $Q(z)$ are polynomials. In other words, all the three functions have only a finite number of zeroes. The problem studied in this paper is slightly different. It is to ascertain the class of functions which constitute the class $C(g)$. It is shown that when g has a zero and $C(g)$ contains a function f which is not a constant multiple of g then every function of $C(g)$ is a constant multiple of either g or f. It is further proved that except when $N(\alpha_n)$ behaves in a particular manner, all functions of $C(g)$ can be calculated from a knowledge of g alone. It is shown by an example that, in the exceptional case, there can be two

[1]) Math. Zeitschr. 12, S. 38; Nyt Tiddsskrift (1921), S. 14—21; cf. also W. Saxer, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 208, where a more general result is proved from which Polya's theorem is derived as a particular case. I have not been able to find out whether the problem as set forth in this paper has been discussed before.

distinct functions in $C(g)$. In Polya's result mentioned above no hypothesis is made on the order of g. In order that the results of this paper may hold it is essential that g and the functions of $C(g)$ must be of finite order. For instance, let v be an arbitrary integral function, $h = \frac{e^{vg}-1}{g}$ and $f = g e^{\int h g' dz}$; then $f' = g' e^{vg + \int h g' dz}$ so that for every v there is an f in $C(g)$; but the function f is no longer of finite order even when g is of finite order.

2. We first prove the following theorem:

Theorem (1): *Let f be a function of $C(g)$, where g has at least one zero. Let f be not a constant multiple g. Then every other function of $C(g)$ is a constant multiple either of g or f.*

Note: If there exists no f which is not a constant multiple of g, then $C(g)$ is composed of constant multiples of g. The case when g has no zero is included in theorem 2 below.

Proof: We omit the trivial case when g is a constant or a polynomial; if this be so $C(g)$ is composed of constant multiples of g. Let f be a function of $C(g)$ not a constant multiple of g. If f and g are of finite order so are f' and g'. Let $f = e^u g$; $f' = e^v g'$, where u, v are polynomials and u' is not identically zero since f is not a constant multiple of g. Let h be any other function of $C(g)$. Let $h = e^w g$ and $h' = e^y g'$, w, y being polynomials. If $w' \equiv 0$ then h is a constant multiple g and the theorem is proved. Let $w' \not\equiv 0$. By differentiation, we get

$$\frac{g'}{g} = \frac{u'}{e^{v-u}-1} = \frac{w'}{e^{y-w}-1}. \tag{1}$$

Now, $v-u$ cannot be a constant; for if it is, it is such that $e^{v-u}-1 \neq 0$ since otherwise $u' \equiv 0$; if $e^{v-u}-1 \neq 0$ is a constant, (1) gives on integration

$$g = A e^{Bu}$$

where A and B are non-zero constants, so that g has no zero, contrary to our hypothesis. Hence $v-u$ is not a constant. The same is true of $y-w$ since $w' \not\equiv 0$. Now, $\frac{g'}{g}$ is a meromorphic function with simple poles at α_n and residues equal to $N(\alpha_n)$. So (1) gives

$$\frac{u'(\alpha_n)}{v'(\alpha_n) - u'(\alpha_n)} = N(\alpha_n) = \frac{w'(\alpha_n)}{y'(\alpha_n) - w'(\alpha_n)} \tag{2}$$

if n is sufficiently large. Since $v - u$ is not a constant $\frac{g'}{g}$ has infinity of poles so that (2) gives

$$\frac{u'(z)}{v'(z) - u'(z)} \equiv \frac{w'(z)}{y'(z) - w'(z)} \tag{3}$$

because both sides are rational functions. Combining (1) and (3) we get

$$\frac{v' - u'}{e^{v-u} - 1} \equiv \frac{y' - w'}{e^{y-w} - 1}. \tag{4}$$

This gives on integration

$$1 - e^{-(v-u)} \equiv A[1 - e^{-(y-w)}] \tag{5}$$

where $A \neq 0$ is a constant. From (4) and (5) we deduce by another integration

$$e^{-(v-u)} \equiv A e^{-(y-w)} + B \tag{6}$$

where B is zero since otherwise $e^{-(v-u)}$ will have zeroes. Hence (5) gives $A = 1$. Combinig (4), (5) and (6) we get

$$v' - u' \equiv y' - w'$$

so that (3) gives $u'(z) \equiv w'(z)$ so that $h = a e^u g = af$ where a is a constant. Therefore h is a constant multiple of f and the theorem is proved.

3. We next prove

Theorem (2): *Let g be such that there exists no integer $d > 0$ such that*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n^d} = l$$

exists and is not zero. Let f be any other function of $C(g)$. Then one of the following relations must hold:

$$(\alpha) \qquad f = Ag,$$

$$(\beta) \qquad f = Be^u + D, \qquad g = E(B + De^{-u}),$$

$$(\gamma) \qquad f = Fe^{Gu}, \qquad g = He^{Ku}$$

where A, B, D, E, F, G, H, K are non-zero constants and u is a polynomial.

Proof: In the notation of § 2, let $f = e^u g$, $f' = e^v g'$. If $u' \equiv 0$, the relation (α) holds and the theorem is proved. Let $u' \not\equiv 0$. By differentiation, we have

$$\frac{g'}{g} = \frac{u'}{e^{v-u} - 1}. \tag{7}$$

If $v - u$ is a constant, it is such that $e^{v-u} - 1 \neq 0$ since otherwise $u' \equiv 0$. Integrating (7) we get

$$g = a e^{bu}, \qquad f = a e^{(b+1)u}$$

which are of the form (γ). Suppose now that $v - u$ is not a constant so that $v' - u' \not\equiv 0$. As in § 2,

$$\frac{u'(\alpha_n)}{v'(\alpha_n) - u'(\alpha_n)} = N(\alpha_n). \tag{8}$$

Consider the class of polynomials

$$P_n(z) = v'(z) - u'(z) - \frac{u'(z)}{N(\alpha_n)}. \tag{9}$$

We have, by (8) $P_n(\alpha_n) = 0$. If $N(\alpha_n)$ contains a bounded subsequence, it contains another composed of constant terms so that (9) gives a relation of the form $v' - d\,u' \equiv 0$ where d is a constant not equal to one since $v' - u' \not\equiv 0$. Using this in (7) and integrating we get

$$g^{d-1} = \lambda[1 - e^{-(v-u)}] \tag{10}$$

from which we deduce that $d - 1 = 1$ since $1 - e^{-(v-u)}$ has only simple zeroes after a certain stage and g is an integral function. Hence $d = 2$ or $v - 2u$ is a constant. Using this in (10) we arrive at a relation of the form (β). We are now left with the case $N(\alpha_n) \to \infty$ as $n \to \infty$. In this case, (9) shows that the degree of $v' - u'$ is less than that of u'. If d is the difference in the degrees, we get from (8)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n^d} = l$$

exists and is not zero. This last result contradicts our hypothesis. Hence, if $v - u$ is not a constant, $N(\alpha_n)$ contains a bounded subsequence and this leads to a relation of the form (β) as shown above. This proves the theorem.

4. The following results are direct deductions from theorem (2):

Theorem (3): *Let $g(z)$ be a function of finite order such that* $\lim_{n \to \infty} N(\alpha_n) < \infty$ *or more generally* $\lim_{n \to \infty} \frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$. *Then g and all the functions of $C(g)$ satisfy one of the relations* (α), (β), or (γ).

Theorem (4): *Under the conditions of theorem* (3), *if g' has an infinity of zeroes, then $C(g)$ is composed of constant multiples of g.*

Proof: If (β) or (γ) holds, g' has only a finite number of zeroes namely, those of $u'(z)$. Therefore under the present hypothesis, (α) holds. This theorem shows that if g is an integral function of finite order, the multiplicities of whose zeroes are bounded and whose derivative has an infinity of zeroes it is uniquely determined but for a constant factor.

5. Theorem (5): *If the exponent of convergence of the zeroes of g be non-integral (the number zero being considered an integer) $C(g)$ is composed of constant multiples of g.*

Proof: We shall show that when there is an integer $d > 0$ such that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n^d} = l \neq 0 \tag{11}$$

the exponent of convergence is an integer. The numbers α_n are but for a finite number the roots of the equations $v - u = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. These roots are asymptotically equivilent to $|2k\pi|^{\frac{1}{m}}$, there being m such roots at most, m being the degree of $v - u$. Hence by (11), the exponent is $m + d$. So, under the hypothesis of the present theorem (α), (β) or (γ) must hold. If (β) holds, the exponent is equal to the degree of u; if (γ) holds it is zero. Hence (α) must hold.

Theorem (6): *If $g(z)$ is of non-integral order, $C(g)$ is composed of constant multiples of g.*

6. Theorem (7): *Under the hypothesis of theorem (2), let f'' and g'' have the same zeroes. Then $f = Ag$ unless the functions are of the first order, in which case (β) or (γ) holds with $u = az + b$.*

Proof: If (β) or (γ) holds we find that the pairs

$$\left.\begin{aligned} u'' + u'^2 &= 0 \\ u'' - u'^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

or

$$\left.\begin{aligned} u'' + Gu'^2 &= 0 \\ u'' + Ku'^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

must have the same roots. The first is possible only if $u'' \equiv 0$ and the second only if either $u'' \equiv 0$ or $G = K$. If $u'' \equiv 0$. u is of the first degree. If $G = K$, (γ) reduces to (α).

6. We conclude with an example to show that in the exceptional case of theorem (2), there can be two distinct functions in $C(g)$ as contemplated in theorem (1). Let

$$\left\{\begin{aligned} f &= e^{\frac{2\pi i z^3}{3}} \times g, \\ g &= e^{-\frac{\pi i z^3}{3} + \frac{z^2}{2}} \times \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{n^2} e^{z^2}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Here the zeroes are $z = \pm n$ repeated n^2 times so that $\frac{N(\alpha_n)}{\alpha_n^2} = 1 \neq 0$. Obviously ($\alpha$) does not hold. Nor does (β) or (γ) since g' has an in-

finity of zeroes. We shall show that f' and g' have the same zeroes. By differentiation, we get

$$\frac{g'}{g} = -\pi i z^2 + z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2zn^2}{z^2-n^2} + 2z\right) \tag{13}$$

$$= -\pi i z^2 + z + 2z^3 \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}$$

$$= -\pi i z^2 + z + z(\pi z \cot \pi z - 1)$$

$$= -\pi i z^2 + \pi i z^2 \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}$$

$$= \frac{2\pi i z^2}{e^{2\pi i z}-1}$$

Also,

$$\frac{f'}{g'} = e^{\frac{2\pi i z^3}{3}}\left[2\pi i z^2 \frac{g}{g'} + 1\right] = e^{\frac{2\pi i z^3}{3} + 2\pi i z}$$

by (13), so that f' and g' have the same zeroes.

(Eingegangen am 25. Oktober 1936.)

Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume*).

Von

W. Hantzsche in Dresden.

Eine n-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit [1]) $\mathfrak{M}^n$ [2]) heißt in einen m-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^m$ topologisch *eingelagert*, wenn $\mathfrak{M}^n$ eine Teilmenge von $\mathfrak{R}^m$ ist.

An allgemeinen Sätzen sind bisher über die Möglichkeit, eine Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum einzulagern, nur wenige bekannt.

So kann man z. B. leicht [3]) zeigen, daß jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit, allgemeiner jeder n-dimensionale Komplex, sich in den $(2n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum legen läßt.

Wir ermitteln im folgenden notwendige Bedingungen, denen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ genügen muß, damit sie in den $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^{n+1}$ eingelagert werden kann. Unwesentlich, aber bequem ist es dabei, den euklidischen Raum, eine offene Mannigfaltigkeit, durch einen „unendlich fernen" Punkt zur geschlossenen $(n+1)$-Sphäre $\mathfrak{S}^{n+1}$ zu schließen.

§ 1.

Einlagerung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in die $(n+1)$-Sphäre $\mathfrak{S}^{n+1}$.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Ermittlung von Bedingungen für die Einlagerung von $\mathfrak{M}^n$ in $\mathfrak{S}^{n+1}$ ist der *Alexandersche Dualitätssatz*, der uns Beziehungen zwischen den numerischen Invarianten (Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten) eines in $\mathfrak{S}^{n+1}$ eingelagerten endlichen r-dimensio-

*) Die vorliegende Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Halle als Dissertation angenommen. Sie entstand im Gedankenaustausch mit Herrn H. Wendt in Dresden. Die Problemstellung verdanke ich den Herren W. Threlfall und H. Seifert in Dresden, die mich auch bei der Abfassung der Arbeit unterstützten.

[1]) Eine (geschlossene) n-dimensionale Mannigfaltigkeit ($n > 0$) ist ein zusammenhängender endlicher n-dimensionaler Komplex, der in jedem Punkte dieselben Homologiegruppen hat wie die $(n-1)$-Sphäre. $\mathfrak{M}^n$ heißt homogen, wenn jeder Punkt eine topologisch auf die n-dimensionale Vollkugel abbildbare Umgebung hat. Vgl. Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner 1934, S. 236.

[2]) Die oberen Indizes geben die Dimensionen der Komplexe, Simplexe usw. an.

[3]) Vgl. S. 46 von [1]).

nalen Komplexes $\mathfrak{K}^r$ und denen des Komplementärraumes $\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{K}^r$ liefert. Bezeichnen wir die Bettische Zahl der Dimension i eines Komplexes $\mathfrak{L}^m$ mit $p^i(\mathfrak{L}^m)$ und seine Torsionsgruppe der Dimension i mit $\mathfrak{T}^i(\mathfrak{L}^m)$, so lautet der Alexandersche Dualitätssatz[4]):

$$(1) \qquad p^i(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{K}^r) = p^{n-i}(\mathfrak{K}^r) + \delta_{i,0} - \delta_{i,n}, \qquad \delta_{j,k} = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq k, \\ 1 \text{ für } j = k. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \mathfrak{T}^i(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{K}^r) = \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{K}^r),$$

Formel (1) gilt auch für die Bettischen Zahlen mod m.

Für eine in $\mathfrak{S}^{n+1}$ eingelagerte n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ folgt aus diesem Satze zunächst, daß $\mathfrak{M}^n$ orientierbar ist und $\mathfrak{S}^{n+1}$ in zwei Gebiete zerlegt, die als offene Punktmengen der $(n+1)$-Sphäre (oder was auf dasselbe hinauskommt: des Zahlenraumes) unendliche Komplexe sind. Für die nullte Bettische Zahl von $\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n$ gilt nämlich nach dem Alexanderschen Dualitätssatz:

$$p^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = p^n(\mathfrak{M}^n) + 1,$$

entsprechend für die Bettischen Zahlen mod 2, die Zusammenhangszahlen q:

$$q^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = q^n(\mathfrak{M}^n) + 1.$$

Für eine nichtorientierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ ist nun $p^n = 0$ und $q^n = 1$, was $p^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = 1$ und $q^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = 2$ ergeben würde, im Widerspruch damit, daß für jeden Komplex $p^0 = q^0$ ist. $\mathfrak{M}^n$ muß also orientierbar sein; dann ist aber: $p^n = q^n = 1$ und mithin:

$$p^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = q^0(\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n) = 2.$$

Daß aber die Zusammenhangszahl der Dimension 0 den Wert 2 hat, bedeutet, daß $\mathfrak{S}^{n+1}$ durch $\mathfrak{M}^n$ in zwei Gebiete zerlegt wird.

Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{S}^2$ die durch den unendlich fernen Punkt geschlossene euklidische Ebene und $\mathfrak{M}^1$ eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve. Aus dem Alexanderschen Dualitätssatz folgt für diesen Sonderfall, daß eine geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, also der *Jordansche* Kurvensatz.

Für die folgenden Untersuchungen ist es notwendig, an die Einlagerung die weitere Bedingung zu stellen, *simplizial* zu sein, d. h. es soll eine simpliziale Zerlegung von $\mathfrak{S}^{n+1}$ geben, von der $\mathfrak{M}^n$ ein Teilkomplex ist. Unter dieser Voraussetzung sind die abgeschlossenen Hüllen der beiden Gebiete, in die eine orientierbare $\mathfrak{M}^n$ die $\mathfrak{S}^{n+1}$ zerlegt, berandete Mannigfaltigkeiten (Beweis im Anhang I). Unter einer solchen versteht man einen Komplex, dessen Verdoppelung[5]) eine Mannigfaltigkeit ist.

---

[4]) Alexandroff-Hopf, Topologie 1. Band, 1935, S. 440.

[5]) S. 129 des unter [1]) angegebenen Buches.

Von den beiden berandeten Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir eine als Innenraum $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1}$, die andere als Außenraum $\bar{\mathfrak{A}}^{n+1}$. Unter $\mathfrak{I}^{n+1}$ und $\mathfrak{A}^{n+1}$ verstehen wir die offenen Mannigfaltigkeiten $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1} - \mathfrak{M}^n$ und $\bar{\mathfrak{A}}^{n+1} - \mathfrak{M}^n$.

Die Homologiegruppen der berandeten Mannigfaltigkeit $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1}$ und der offenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{I}^{n+1}$ stimmen überein[6]). Daß jede geschlossene Kette von $\mathfrak{I}^{n+1}$ zugleich eine Kette von $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1}$ ist, ist klar. Umgekehrt ist jede geschlossene k-Kette C^k von $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) homolog einer k-Kette, die ganz im Innern von $\bar{\mathfrak{I}}^{n+1}$ verläuft, also zu $\mathfrak{I}^{n+1}$ gehört. Dies folgt aus dem Hilfssatz, den wir im Anhang II beweisen.

Wir können nun eine notwendige Bedingung dafür ableiten, daß eine orientierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2m}$ von gerader Dimension $n = 2m$ in $\mathfrak{S}^{2m+1}$ einlagerbar ist. Die Charakteristik des Innenraumes $\bar{\mathfrak{I}}^{2m+1}$ sei $\bar{N}$, die der Randmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2m}$ von $\bar{\mathfrak{I}}^{2m+1}$ sei N. Durch Verdopplung von $\bar{\mathfrak{I}}^{2m+1}$ erhält man eine $(2m+1)$-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, deren Charakteristik offenbar $2\bar{N} - N$ beträgt. Nun ist aber die Charakteristik einer Mannigfaltigkeit ungerader Dimension stets Null. Man hat daher $N = 2\bar{N}$ und damit den

Satz 1: *Eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension $2m$ läßt sich höchstens dann in den $\mathfrak{R}^{2m+1}$ simplizial einlagern, wenn ihre Charakteristik eine gerade Zahl ist.*

Ein Beispiel für orientierbare Mannigfaltigkeiten gerader Dimension mit ungerader Charakteristik sind die komplexen projektiven Räume $\mathfrak{L}^{4n}$ der Dimension $4n$[7]). Die Homologiegruppen der geraden Dimensionen von $\mathfrak{L}^{4n}$ sind nämlich freie zyklische Gruppen von einer Erzeugenden, die der ungeraden bestehen aus dem Nullelemente allein. Die Charakteristik von $\mathfrak{L}^{4n}$ hat also den Wert $N = 2n + 1$. Die projektiven Räume $\mathfrak{L}^{4n}$ sind also sicher nicht in den $\mathfrak{R}^{4n+1}$ simplizial einlagerbar[8]).

---

[6]) Einen Beweis dafür gibt auch Lefschetz, Topology (New York) 1930, S. 154, Theorem II.

[7]) Van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen **102** (1929), S. 362.

[8]) Die projektiven Räume sind *regulär durch Gleichungen* in *keinen* euklidischen Raum einlagerbar, d. h. es gibt kein Gleichungssystem $f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, f_{m-n}(x_1, \ldots, x_m) = 0$ von der Art, daß die Funktionen f_i stetig differenzierbar in den kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ wären und die Funktionalmatrix den

Wir gehen nun dazu über, aus dem Alexanderschen Dualitätssatz weitere Folgerungen für die Einlagerung einer $\mathfrak{M}^n$ in $\mathfrak{S}^{n+1}$ zu ziehen.

Setzen wir in den Formeln (2) für die Torsionsgruppen an Stelle von $\mathfrak{R}^r$ die berandete Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$, so liefert dies wegen $\mathfrak{S}^{n+1} - \overline{\mathfrak{J}}^{n+1} = \mathfrak{A}^{n+1}$

$$\mathfrak{T}^i(\mathfrak{A}^{n+1}) = \mathfrak{T}^{n-i-1}(\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}). \tag{3a}$$

Auf den Komplex $\mathfrak{A}^{n+1} + \mathfrak{J}^{n+1}$ angewandt, geben die Formeln (2) wegen $\mathfrak{S}^{n+1} - (\mathfrak{A}^{n+1} + \mathfrak{J}^{n+1}) = \mathfrak{M}^n$

$$\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{A}^{n+1} + \mathfrak{J}^{n+1})$$

oder

$$\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{A}^{n+1}) + \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{J}^{n+1}), \tag{3b}$$

da $\mathfrak{A}^{n+1}$ und $\mathfrak{J}^{n+1}$ punktfremde Gebiete sind.

Setzen wir in (3b) die Gleichungen (3a) ein und berücksichtigen, daß, wie aus Anhang II folgt,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{J}^{n+1}) &= \mathfrak{T}^{n-i-1}(\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}), \\ \mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{A}^{n+1}) &= \mathfrak{T}^{n-i-1}(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}) \end{aligned} \tag{3c}$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{T}^i(\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}) + \mathfrak{T}^{n-i-1}(\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}) \tag{3}$$

und ebenso

$$\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n) = \mathfrak{T}^i(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}) + \mathfrak{T}^{n-i-1}(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}). \tag{3}$$

Rang $m-n$ hätte und das vorliegende Gleichungssystem einen n-dimensionalen projektiven Raum im m-dimensionalen euklidischen Raum darstellte (vgl. E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comment. math. helv. 8 (1936), S. 305—353). Von der regulären Einlagerung *durch Gleichungen* ist die schlechthin oder *lokal* reguläre Einlagerung zu unterscheiden. Von der lokal regulären Einlagerung wird nur verlangt, daß in der Umgebung jeden Punktes die Mannigfaltigkeit sich durch Gleichungen $f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, f_{m-n}(x_1, \ldots, x_m) = 0$ darstellen läßt mit einer Funktionalmatrix vom Range $m-n$; diese Funktionen dürfen aber jetzt von Punkt zu Punkt wechseln. Da man alsdann die $m-n$ Gleichungen nach $m-n$ der Koordinaten auflösen kann, so läßt sich die lokal regulär einlagerbare Mannigfaltigkeit auch in Parameterform (mit Hilfe Gaußscher Koordinaten $u_1, \ldots, u_n$) geben: $x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n)$, $\ldots$ $x_m = x_m(u_1, \ldots, u_n)$, wobei die Funktionen $x_1, \ldots, x_m$ stetig differenzierbar sind und die Funktionalmatrix den Rang n hat; aber nicht für alle Punkte lassen sich die gleichen Gaußschen Koordinaten verwenden. Ein Beispiel für eine *lokal* regulär, aber nicht regulär *durch Gleichungen* einlagerbare Mannigfaltigkeit werden wir später S. 48 geben: die projektive Ebene im euklidischen vierdimensionalen Raume.

Entsprechend liefern die Formeln (1) des Alexanderschen Dualitätssatzes:

$$p^i(\mathfrak{A}^{n+1}) = p^{n-i}(\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}) + \delta_{i,0} - \delta_{i,n}, \tag{4a}$$

$$p^i(\mathfrak{M}^n) = p^{n-i}(\mathfrak{A}^{n+1}) + p^{n-i}(\mathfrak{I}^{n+1}) + \delta_{i,0} - \delta_{i,n}, \tag{4b}$$

$$\begin{aligned} p^i(\mathfrak{I}^{n+1}) &= p^i(\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}), \\ p^i(\mathfrak{A}^{n+1}) &= p^i(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}), \end{aligned} \tag{4c}$$

$$\begin{aligned} p^i(\mathfrak{M}^n) &= p^i(\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}) + p^{n-i}(\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}), \\ p^i(\mathfrak{M}^n) &= p^i(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}) + p^{n-i}(\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Wir erhalten somit den

Satz 2: *Läßt sich eine orientierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ in den euklidischen Raum $\mathfrak{R}^{n+1}$ simplizial einlagern, so sind ihre numerischen Invarianten durch die des Innenraumes (und ebenso durch die des Außenraumes) vollständig bestimmt nach den Formeln* (3) *und* (4).

Nicht bestimmen dagegen im allgemeinen die Invarianten der einlagerbaren Mannigfaltigkeit umgekehrt die Invarianten des Innen- und Außenraumes. Es gibt also Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$, die sich auf zwei verschiedene Weisen in den $\mathfrak{R}^{n+1}$ einlagern lassen, so daß der Innenraum der einen Einlagerung in seinen Bettischen Zahlen und seinen Torsionskoeffizienten weder mit dem Innen- noch mit dem Außenraume der anderen Einlagerung übereinstimmt. Ein Beispiel für eine solche Mannigfaltigkeit behandeln wir in § 4.

Aus den Formeln (3) und (4) lassen sich für die Einlagerung von $\mathfrak{M}^n$ zwei Bedingungen erschließen.

I. Hat die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ gerade Dimension $n = 2m$, so finden wir aus den Formeln (4) für die Bettische Zahl der Dimension m:

$$p^m(\mathfrak{M}^{2m}) = 2\,p^m(\overline{\mathfrak{I}}^{2m+1}),$$

d. h. *die Bettische Zahl $p_m(\mathfrak{M}^{2m})$ ist eine gerade Zahl.* Diese Eigenschaft von $p^m(\mathfrak{M}^{2m})$ läßt sich offenbar auch direkt aus dem S. 40 (Satz 1) abgeleiteten Ergebnisse herleiten, daß die Charakteristik N einer in $\mathfrak{S}^{2m+1}$ einlagerbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2m}$ eine gerade Zahl ist.

II. Ist die Dimension der einzulagernden Mannigfaltigkeit ungerade $n = 2m+1$, so bekommt man aus den Formeln (3) für die Dimension m die Beziehung

$$\mathfrak{T}^m(\mathfrak{M}^{2m+1}) = \mathfrak{T}^m(\overline{\mathfrak{I}}^{2m+2}) + \mathfrak{T}^m(\overline{\mathfrak{I}}^{2m+2}). \tag{5}$$

Wir erhalten damit den

Satz 3: *Ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit ungerader Dimension $\mathfrak{M}^{2m+1}$ in $\mathfrak{S}^{2m+2}$ simplizial einlagerbar, so ist die Torsionsgruppe der Dimension m von $\mathfrak{M}^{2m+1}$ direkte Summe zweier isomorpher Gruppen. Für*

die Torsionskoeffizienten bedeutet dies, daß stets eine gerade Anzahl von ihnen gleichen Wert haben müssen.

Aus dieser Forderung erhält man sofort, daß sich die *reellen projektiven Räume* $\mathfrak{P}^{4n-1}$ der Dimension $2m+1 = 4n-1$ nicht in den $\mathfrak{R}^{4n}$ einlagern lassen, denn die Homologiegruppe der Dimension $m = 2n-1$ ist dort die Gruppe der Ordnung 2[9]). Hier ist also nur ein Torsionskoeffizient vorhanden. Insbesondere läßt sich danach der dreidimensionale projektive Raum $\mathfrak{P}^3$ nicht in den $\mathfrak{R}^4$ einlagern. Über die projektiven Räume $\mathfrak{P}^{4n+1}$ kann man mit Hilfe der obigen Formeln nichts aussagen. Die projektiven Räume gerader Dimension sind nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten und lassen sich daher schon nach S. 39 nicht einlagern.

Die Bedingungen I und II sind die einzigen Beziehungen zwischen den Bettischen Zahlen und den Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{M}^n$, die sich aus den Formeln (3a), (3b), (3c), (3) und (4a), (4b), (4c), (4) gewinnen lassen. Denn bei gegebener Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n)$ kann man, wenn $n = 2m+1$ ist, eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{T}^i(\mathfrak{M}^n)$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ zur Gruppe $\mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{J}^{n+1})$ ernennen. Dann ist $\mathfrak{T}^m(\mathfrak{J}^{n+1}) = \mathfrak{T}^m(\mathfrak{A}^{n+1})$ durch die Bedingung II und durch Formel (3c) bestimmt. Aus (3b) folgt $\mathfrak{T}^{n-i-1}(\mathfrak{A}^{n+1})$ und aus (3a) $\mathfrak{T}^i(\mathfrak{A}^{n+1})$ und ebenso $\mathfrak{T}^i(\mathfrak{J}^{n+1})$. — Entsprechend kann man die Bettischen Zahlen $p^{n-i}(\mathfrak{J}^{n+1})$ im Einklang mit Formel (4b) für $i = 0, 1, \ldots, m$ beliebig vorgeben, und man berechnet aus den Formeln (4a) bis (4) die übrigen Bettischen Zahlen von $\mathfrak{J}^{n+1}$ und $\mathfrak{A}^{n+1}$. Eine ähnliche Schlußweise gilt im Fall $n = 2m$.

§ 2.

Einlagerung 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in die $\mathfrak{S}^4$.

Wir wollen uns nun im folgenden dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^3$ zuwenden und die Möglichkeit ihrer Einlagerung in $\mathfrak{S}^4$ untersuchen.

Aus Formel (5) folgt für $n = 3$, also für $m = 1$ die Beziehung:

$$\mathfrak{T}^1(\mathfrak{M}^3) = \mathfrak{T}^1(\bar{\mathfrak{J}}^4) + \mathfrak{T}^1(\bar{\mathfrak{J}}^4).$$

und damit der

Satz 4: *Wenn eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ simplizial in die vierdimensionale Sphäre $\mathfrak{S}^4$ eingelagert werden kann, so ist ihre Torsionsgruppe der Dimension 1 direkte Summe von zwei einander isomorphen Gruppen, d. h. die Torsionskoeffizienten gleichen Wertes sind stets in gerader Zahl vorhanden.*

---

[9]) Die Homologiegruppen der projektiven Räume findet man in dem unter [1]) zitierten Buch S. 118.

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich danach also bestimmt nicht einlagern, wenn sie eine ungerade Zahl von Torsionskoeffizienten hat.

Es lassen sich damit sicher nicht einlagern: Die *Linsenräume* (p, q)[10]), da sie einen einzigen Torsionskoeffizienten vom Werte p besitzen, der *Oktaederraum*[10]), der einen einzigen Torsionskoeffizienten vom Werte 3 hat und der *hyperbolische Dodekaederraum*[10]) mit drei Torsionskoeffizienten vom Werte 5.

Die notwendige Bedingung des Satzes 4 für die Homologiegruppe einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$, die in $\mathfrak{S}^4$ eingelagert werden kann, läßt sich nicht verschärfen. Den Nachweis erbringen wir dadurch, daß wir zu jeder abelschen Gruppe $\mathfrak{H}^1$ mit endlich vielen Erzeugenden, deren Torsionsgruppe die Bedingung des Satzes 4 erfüllt, eine in $\mathfrak{S}^4$ liegende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ konstruieren, die $\mathfrak{H}^1$ zur Homologiegruppe der Dimension 1 hat. Die allgemeinste abelsche Gruppe $\mathfrak{H}^1$, die der verlangten Bedingung genügt, ist die direkte Summe aus p^1 freien zyklischen Gruppen und $2r$ zyklischen Gruppen der Ordnungen $t_1, t_1; t_2, t_2; \ldots; t_r, t_r$. Dabei kann auch $t_i = t_j$ sein.

Wir werden die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ als *Umgebungsmannigfaltigkeit* eines gewissen zweidimensionalen in $\mathfrak{S}^4$ liegenden Komplexes konstruieren. Gesetzt, es sei gelungen, in der 4-Sphäre, die wir uns wieder als den durch einen unendlich fernen Punkt geschlossenen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^4$ denken, einen aus geradlinigen Simplexen bestehenden Flächenkomplex $\mathfrak{F}^2$ zu konstruieren, dessen Homologiegruppe der Dimension 1 die direkte Summe von p^1 freien zyklischen Gruppen und r zyklischen Gruppen der Ordnungen $t_1, t_2, \ldots, t_r$ ist, während sich die zweite Homologiegruppe auf das Nullelement reduziert. Wir erweitern dann die simpliziale Zerlegung des Flächenkomplexes zu einer geradlinigen des ganzen $\mathfrak{R}^4$. Durch Normalunterteilung der simplizialen Zerlegung des $\mathfrak{R}^4$ läßt sich immer erreichen, daß jedes k-Simplex, das alle $k+1$ Ecken auf dem eingelagerten Komplex $\mathfrak{F}^2$ hat, ganz dem Flächenkomplexe angehört. Wir betrachten nun alle mit $\mathfrak{F}^2$ inzidenten $(k+1)$-Simplexe ($k = 0, 1, 2, 3$) der simplizialen Zerlegung des $\mathfrak{R}^4$, die höchstens $k+1$ Ecken auf dem Flächenkomplex haben. Jedes solche $(k+1)$-Simplex $\mathfrak{E}^{k+1}$ wird mit $\mathfrak{F}^2$ eine $(r+1)$-dimensionale Seite $\mathfrak{s}^{r+1}$ gemeinsam haben, und es gibt in $\mathfrak{E}^{k+1}$ eine gegenüberliegende Seite $\mathfrak{t}^{k-r-1}$, von der kein Punkt auf $\mathfrak{F}^2$ liegt. Wir verbinden nun jeden Punkt von $\mathfrak{t}^{k-r-1}$ mit allen Punkten von $\mathfrak{s}^{r+1}$. Damit wird das Simplex $\mathfrak{E}^{k+1}$ stetig mit Strecken so ausgefüllt, daß jeder seiner Punkte genau

[10]) Vgl. S. 213, 218 von [1]).

auf einer solchen liegt [11]). Die Gesamtheit der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken von allen mit $\mathfrak{F}^2$ inzidenten Simplexen $\mathfrak{E}^k$ bildet, wie wir im Anhang III beweisen, eine dreidimensionale homogene Mannigfaltigkeit, die *Umgebungsmannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^3$ des Flächenkomplexes.

Diese zerlegt den $\mathfrak{R}^4$ in einen Innenraum $\mathfrak{I}^4$, in dem der Flächenkomplex selbst liegt, und einen Außenraum $\mathfrak{A}^4$. Die Homologiegruppen von $\mathfrak{I}^4$ stimmen mit denen von $\mathfrak{F}^2$ überein. Es läßt sich nämlich $\mathfrak{I}^4$ stetig auf $\mathfrak{F}^2$ zusammenziehen, indem man jeden Punkt von $\mathfrak{I}^4$ auf der durch ihn hindurchgehenden Strecke nach $\mathfrak{F}^2$ laufen läßt. Diese stetige Abbildung von $\mathfrak{I}^4$ auf $\mathfrak{F}^2$ bewirkt eine homomorphe Abbildung der Homologiegruppe $\mathfrak{H}^i(\mathfrak{I}^4)$ auf die Homologiegruppe $\mathfrak{H}^i(\mathfrak{F}^2)$. Dieser Homomorphismus ist aber offenbar ein Isomorphismus. Man findet also:

$$\begin{aligned} p^1(\mathfrak{I}^4) &= p^1(\mathfrak{F}^2), \\ p^2(\mathfrak{I}^4) &= p^2(\mathfrak{F}^2) = 0, \\ \mathfrak{T}^1(\mathfrak{I}^4) &= \mathfrak{T}^1(\mathfrak{F}^2), \end{aligned}$$

also nach (3) und (4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^1(\mathfrak{M}^3) &= \mathfrak{T}^1(\mathfrak{I}^4) + \mathfrak{T}^1(\mathfrak{I}^4) = \mathfrak{T}^1(\mathfrak{F}^2) + \mathfrak{T}^1(\mathfrak{F}^2) \\ p^1(\mathfrak{M}^3) &= p^1(\mathfrak{I}^4) + p^2(\mathfrak{I}^4) = p^1(\mathfrak{F}^2). \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}^3$ hat also tatsächlich die gewünschte Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$.

Was nun die Konstruktion des Komplexes $\mathfrak{F}^2$ betrifft, so ist klar, daß es genügt, $r + p^1$ Komplexe $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_r, \mathfrak{F}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{F}_{r+p^1}$ anzugeben, deren Homologiegruppen der Dimension 1 zyklisch von den Ordnungen $t_1, \ldots, t_r, \infty, \ldots, \infty$ sind, während die Homologiegruppen der Dimension 2 nur aus dem Nullelemente bestehen. Verbindet man je zwei aufeinanderfolgende dieser Komplexe, die punktfremd im $\mathfrak{R}^4$ liegen mögen, durch Strecken, so ergibt sich der gewünschte Komplex $\mathfrak{F}^2$. — Für $\mathfrak{F}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{F}_{r+p^1}$ wählen wir die Ränder von p^1 punktfremden Dreiecken. — Um die Flächenkomplexe $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_r$, z. B. $\mathfrak{F}_1$, zu konstruieren, gehen wir von einer Kreisscheibe aus und teilen ihren Rand in t_1 gleiche Teile, die wir im gleichen Sinne orientieren und alle mit Erhaltung der Orientierung identifizieren wollen. Der Rand der Kreisscheibe ist somit eine t_1-mal durchlaufene Kreislinie a geworden. Die Homologiegruppe der Dimension 1 des so erhaltenen Flächenkomplexes $\mathfrak{F}_1$ ist offenbar die zyklische Gruppe der Ordnung t_1, die der Dimension 2 besteht aus dem Nullelemente allein.

---

[11]) $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+2}, \mu_1, \ldots, \mu_{k-r}$ seien die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P von $\mathfrak{E}^{k+1}$. Die durch P hindurchgehende Strecke wird dann von den Punkten mit den baryzentrischen Koordinaten $\varrho\,\lambda_1, \ldots, \varrho\,\lambda_{r+2}, \sigma\,\mu_1, \ldots, \sigma\,\mu_{k-r}$, $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$ gebildet. Bei variablem Punkt P liegen die Mittelpunkte aller dieser Strecken in der Hyperebene $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{r+2} = \mu_1 + \ldots + \mu_{k-r}$. Der Schnitt dieser Hyperebene mit dem Simplex $\mathfrak{E}^{k-1}$ ist eine Zelle $\mathfrak{a}^k$.

Es soll dieser Flächenkomplex $\mathfrak{F}_1$ simplizial in den $\mathfrak{R}^4$ gelegt werden. Dazu gehen wir so vor, daß wir zunächst einen aus $\mathfrak{F}_1$ herausgeschnittenen „Kreisring" $\mathfrak{f}_1$ simplizial in einen dreidimensionalen Teilraum $\mathfrak{R}^3$ des $\mathfrak{R}^4$ einlagern. $\mathfrak{f}_1$ soll zu einem Randkreise den Rand von $\mathfrak{F}_1$ besitzen, also die t_1-mal durchlaufende Kreislinie a. Wir schneiden nun diesen Kreisring zu t_1 kongruenten Rechtecken längs t_1 Strecken α_i $(i = 1, \ldots, t_1)$ auf, die von den Endpunkten der Kreislinien a auf dem äußeren Randkreise nach dem inneren Randkreise des Kreisringes führen (Fig. 1 entspricht dem Fall $t_1 = 3$). In jedem Rechtecke werden zwei parallele Seiten von den Schnittlinien α_i und α_{i+1} gebildet (wir setzen $\alpha_{t_1+1} = \alpha_1$), von den anderen parallelen Seiten ist die eine die Kreislinie a, die andere ist ein Teil des inneren Randes des Kreisringes. Diese t_1 Rechtecke kleben wir im $\mathfrak{R}^3$ längs der Kreislinien a aneinander. Es entsteht ein Gebilde, das einem aus t_1 Blättern bestehenden Buche ähnelt. Die Grund- und Dachkanten der Blätter, die den Kanten α_i entsprechen, sind noch zu identifizieren. Lassen wir zwei benachbarte Rechteckebenen den Winkel $\frac{2\pi}{t_1}$ bilden, so können wir bei geeigneter Anordnung der Blätter annehmen, daß Grund- und Dachkanten durch eine Verschraubung um den Winkel $\frac{2\pi}{t_1}$ zugeordnet werden. Bei der allen Blättern gemeinsamen Kante sind die Endpunkte zu identifizieren, sie entspricht der Kreislinie a. Biegt man diese Kante im $\mathfrak{R}^3$ zu einer Kreislinie zusammen und führt gleichzeitig die genannte Verschraubung aus, so ist $\mathfrak{f}_1$ ohne Selbstdurchdringungen in den $\mathfrak{R}^3$ gelegt. Die zu a parallelen Seiten der Rechtecke schließen sich dabei zu einer einzigen geschlossenen Kurve b. Diesen Komplex kann man nun offenbar in einen geradlinigen simplizialen verwandeln. — Wir projizieren nun die Kurve b von einem Punkt des $\mathfrak{R}^4$, der nicht dem Teilraum $\mathfrak{R}^3$ angehört. $\mathfrak{f}_1$ zusammen mit dem Projektionskegel bildet dann eine simpliziale Einlagerung von $\mathfrak{F}_1$ in den $\mathfrak{R}^4$, wie wir sie suchten.

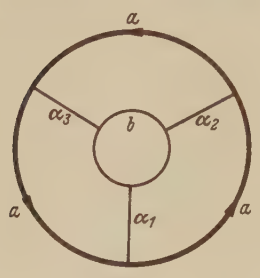


Fig. 1.

§ 3.

Einlagerung des Quaternionenraumes in den $\mathfrak{R}^4$.

Dreht man in einer projektiven Ebene eine Gerade (das ist ein topologischer Kreis) um einen ihrer Punkte durch den Winkel π, so überstreicht sie dabei die projektive Ebene vollständig. Wir benutzen diese Eigenschaft der projektiven Ebene, um sie in den $\mathfrak{R}^4$ einzulagern.

Bewegt man einen Kreis im $\mathfrak{R}^4$ unter Festhaltung eines seiner Punkte derart, daß er mit Umkehrung der Orientierung mit sich zur Deckung kommt, so wird er gerade eine projektive Ebene überstreichen. Eine solche Drehung läßt sich folgendermaßen ausführen. Wir betrachten im $\mathfrak{R}^4$ einen dreidimensionalen linearen Teilraum und in ihm kartesische Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Der dreidimensionale Halbraum $\mathfrak{H}^3$, in dem $\xi_3 \geqq 0$ ist, werde nun um seine zweidimensionale Begrenzungsebene $\xi_3 = 0$ mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit gedreht, so daß er nach der Zeit 2π wieder mit sich zur Deckung gekommen ist. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 kartesische Koordinaten im $\mathfrak{R}^4$ und ist zur Zeit 0 etwa

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3, \quad x_4 = 0$$

so ist zur Zeit v

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3 \cos v, \quad x_4 = \xi_3 \sin v. \tag{1}$$

Im Halbraum $\mathfrak{H}^3$ betrachten wir nun einen Kreis k, dessen Durchmesser die Strecke OQ der ξ_3 Achse: $0 \leqq \xi_3 \leqq 2$ sei (Fig. 2). k möge sich gleichförmig um diesen Durchmesser drehen und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}$, so daß also k in der Zeit 2π mit Umkehrung der Orientierung mit sich zur Deckung gekommen ist. Liegt k zur Zeit 0 in der $\xi_1 \xi_3$-Ebene und bezieht man die Punkte P von k auf den Parameter $u = \measuredangle OMP$ (Fig. 2) so findet man für die Koordinaten von P zur Zeit v

$$\xi_1 = \sin u \cos \frac{v}{2},$$

$$\xi_2 = \sin u \sin \frac{v}{2}, \tag{2}$$

$$\xi_3 = 1 - \cos u.$$

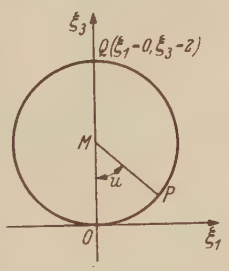


Fig. 2.

Führt man nun gleichzeitig die Drehung des Kreises k im Halbraum $\mathfrak{H}^3$ und die Drehung des Halbraumes $\mathfrak{H}^3$ im $\mathfrak{R}^4$ aus, so beschreibt k im $\mathfrak{R}^4$ während der Zeit 2π eine Fläche, die nach obiger Überlegung der projektiven Ebene homöomorph ist. Denn nach der Zeit 2π ist k mit Umkehrung der Orientierung mit sich zur Deckung gekommen, während der Punkt O und nur dieser dauernd fest geblieben ist. Die Parameterdarstellung der Fläche erhält man durch Zusammenfassung der Gleichungen (1) und (2):

$$x_1 = \sin u \cos \frac{v}{2},$$

$$x_2 = \sin u \sin \frac{v}{2},$$

$$x_3 = (1 - \cos u) \cos v, \tag{3}$$

$$x_4 = (1 - \cos u) \sin v.$$

Wir überzeugen uns noch davon, daß die Einlagerung *lokal* regulär[8]) ist, d. h. die Funktionalmatrix von $x_1, \ldots, x_4$ nach den (nötigenfalls passend abgeänderten) Parametern den Rang 2 hat. Sicher hat die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{4}$$

den Rang 2 für alle Punkte $u \neq 0$. Denn der Tangentialvektor

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}, \frac{\partial x_4}{\partial u}\right)$$

an den Kreis k steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}, \frac{\partial x_4}{\partial v}\right).$$

Für $u = 0$, d. h. im Punkte O hat dagegen die Funktionalmatrix (4) den Rang 1. Doch liegt das nur an einer Parametersingularität. Aus den ersten beiden Gleichungen (3) ergibt sich nämlich

$$\sin^2 u = x_1^2 + x_2^2, \quad x_2 : x_1 = \tan \frac{v}{2}$$

und daher

$$\cos v = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \sin v = \frac{2 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Durch Einsetzen in die letzten beiden Gleichungen (3) ergibt sich also

$$x_3 = (1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$x_4 = (1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \frac{2 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Dabei sind die Wurzeln mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen, da $\cos u$ in der Umgebung von $u = 0$ positiv ist. Durch Benutzung der Parameter x_1 und x_2 erweist sich also die Einlagerung auch im Punkte O als lokal regulär.

Für die so eingelagerte projektive Ebene können wir im $\mathfrak{R}^4$ eine *Umgebungsmannigfaltigkeit* definieren: Man errichte in jedem ihrer Punkte im $\mathfrak{R}^4$ alle Normalen von der Länge $\bar{\varepsilon}$, wobei ε so klein ist, daß sich zwei Normalen nicht schneiden[12]). Ihre Endpunkte bilden dann die Umgebungsmannigfaltigkeit. Auf die Beziehung der hier eingeführten Umgebungsmannigfaltigkeit zu der von S. 45 gehen wir nicht ein.

---

[12]) Dies ist immer möglich, wenn eine Fläcne zweimal stetig differentierbar in den $\mathfrak{R}^4$ eingelagert ist und die Funktionalmatrix in jedem Punkt der Fläche den Rang 2 besitzt, was in unserem Falle erfüllt ist. Für den Beweis vgl. H. Seifert: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschr. 41 (1936), Anhang 1.

Wir untersuchen die eben konstruierte Umgebungsmannigfaltigkeit im folgenden näher. Es ist dies ein gefaserter[13]) Raum, wenn man als eine Faser die Endpunkte aller Normalen in einem Punkte der projektiven Ebene wählt. Die Zerlegungsfläche[13]) dieses Raumes ist dann die projektive Ebene selbst. In der Umgebungsmannigfaltigkeit zeichnen wir auf jeder Faser einen Punkt durch einen bestimmten Normalvektor auf der projektiven Ebene aus. Wir zeigen zunächst, daß dieses so auf der projektiven Ebene gewonnene Normalenfeld sich bis auf den Punkt $u = 0$ stetig annehmen läßt.

Errichtet man auf dem Halbkreisbogen $\xi_1 \geqq 0$ des Ausgangskreises ($v = 0$) die inneren Normalen und führt diese bei der Bewegung (3) des Kreises mit, so wird mit Ausschluß des Punktes $u = 0$ jedem Punkte (u, v) der projektiven Ebene ein Vektor zugeordnet werden, wenn man den Parameter v in der Gleichung (3) nicht von 0 bis 2π, sondern von 0 bis 4π laufen läßt. Der Halbkreis überstreicht dann gerade die projektive Ebene, auf der diese Vektoren auch wirklich Normalen sind. Denn der Vektor steht senkrecht auf zwei Tangenten, der Halbkreistangente und der Tangente an den Bahnkreis, den der Anfangspunkt des Vektors bei der Drehung beschreibt. Die Vektorkomponenten im Punkte (u, v) sind nämlich:

$$\left(\sin u \cos \frac{v}{2}, \quad \sin u \sin \frac{v}{2}, \quad \cos u \cos v, \quad \cos u \sin v\right),$$

die Komponenten des Tangentialvektors an die Bahnkurve aber:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}, \frac{\partial x_4}{\partial v}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \sin u \sin \frac{v}{2}, \frac{1}{2} \sin u \cos \frac{v}{2}, -(1 - \cos u) \sin v, (1 - \cos u) \cos v\right).$$

Da das skalare Produkt dieser beiden Vektoren Null ist, stehen sie, wie verlangt, aufeinander senkrecht. Das so erhaltene Normalenfeld ist offenbar außer im Punkt $u = 0$ stetig.

Die Gesamtheit der durch dieses Feld auf den Fasern ausgezeichneten Punkte bildet eine in der Umgebungsmannigfaltigkeit liegende Fläche. Wenn wir u, um den Nullpunkt O auszuschließen, von $u = \varepsilon$ bis $u = \pi$ laufen lassen, ist dies eine gelochte projektive Ebene. Denn die Anfangspunkte der Normalen bilden offenbar eine gelochte projektive Ebene und da bei Ausschluß des Nullpunktes die Beziehung zwischen Anfangs- und Endpunkten umkehrbar eindeutig und stetig ist, so erfüllen die Endpunkte dieselbe Fläche.

[13]) H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. 60 (1933).

In der Umgebungsmannigfaltigkeit der durch (3) dargestellten Fläche, wo u von ε bis π läuft, kann also die gelochte projektive Ebene so eingelagert werden, daß sie von jeder Faser genau einmal durchsetzt wird. Sie ist die Zerlegungsfläche dieser (berandeten) Umgebungsmannigfaltigkeit.

Wir wollen nunmehr die von den Endpunkten der Normalen gebildete Fläche in der Umgebung von $u = 0$ untersuchen. Im Punkte $u = 0$ durchläuft der Endpunkt des Vektors bei der betrachteten Bewegung des Kreisbogens die dem Punkte $u = 0$ entsprechende Faser H genau zweimal, während im Nachbarpunkte $u = \varepsilon$ die Spitze des Vektors auf einer Kreislinie bewegt wird, die nur einen Punkt mit jeder Faser der Umgebungsmannigfaltigkeit, die sie trifft, gemeinsam hat und den Lochrand der projektiven Ebene bildet. Lassen wir ε nach Null gehen, so sehen wir, daß die gelochte projektive Ebene so in der Umgebungsmannigfaltigkeit zu liegen kommt, daß ihr Lochrand in die zweimal durchlaufene Faser übergeht. Jede andere Faser durchsetzt diese Fläche in genau einem Punkte. Nehmen wir eine Faserumgebung[14]) der Faser H heraus, so erhalten wir einen gefaserten Raum, der, da keine Ausnahmefasern auftreten, als Klassenraum[14]) durch die Faserinvarianten

$$(O\,n, \quad k = 1)$$

charakterisiert wird. Dabei weist O auf die Orientierbarkeit des Umgebungsraumes, n auf die Nichtorientierbarkeit der Zerlegungsfläche hin, k gibt das Geschlecht (Kreuzhaubenzahl) der Zerlegungsfläche an. Die in den Umgebungsraum gelegte Fläche schneidet die Oberfläche der herausgenommenen Faserumgebung in einem Querkreis Q_0. Für Q_0 gilt offenbar:

$$Q_0 H^{\pm 2} \sim 0.$$

Damit tritt zu den Invarianten des Klassenraumes bei passender Raumorientierung die Invariante $b = 2$. Unser gefaserter Raum ist dann charakterisiert durch das Symbol

$$(O\,n,\ k = 1 \mid b = 2).$$

Nach den Faserinvarianten ist der Umgebungsraum der projektiven Ebene der Quaternionenraum[15]), den wir damit als in die 4-Sphäre $\mathfrak{S}^4$ einlagerbar nachgewiesen haben. Die Fundamentalgruppe ist daher die Quaternionengruppe und hat im Einklang mit S. 43 zwei Torsionskoeffizienten der Dimension 1 vom Werte 2.

---

[14]) Vgl. die in [13]) zitierte Arbeit.

[15]) W. Threlfall und H. Seifert, Topologische Untersuchungen der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes, Math. Annalen 107 (1932), S. 571.

§ 4.

Wesentlich verschiedene Einlagerungen der topologischen Summe zweier Produkte aus drei Kreisen in die 4-Sphäre $\mathfrak{S}^4$.

Wenn eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ in die $(n+1)$-Sphäre $\mathfrak{S}^{n+1}$ eingelagert ist, so sind die Homologiegruppen von $\mathfrak{S}^{n+1} - \mathfrak{M}^n$ nach dem Alexanderschen Dualitätssatze durch diejenigen von $\mathfrak{M}^n$ bestimmt. Auch über die Art und Weise, wie sich diese Homologiegruppen in die von Innengebiet $\mathfrak{I}^{n+1}$ und Außengebiet $\mathfrak{A}^{n+1}$ aufspalten, gibt der Alexandersche Dualitätssatz gewissen Aufschluß. Es müssen nämlich die Formeln (3 a) und (4 a) des § 1 bestehen. Aus ihnen folgt, daß für $n = 2$ nicht nur die Homologiegruppe von $\mathfrak{I}^3 + \mathfrak{A}^3$, sondern sogar die von $\mathfrak{I}^3$ und $\mathfrak{A}^3$ einzeln durch die Homologiegruppen der eingelagerten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^2$ bestimmt sind. Es ist nämlich $p^1(\mathfrak{I}^3) = p^1(\mathfrak{A}^3)$. Anders ist das von $n = 3$ ab. Wir werden ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ angeben, die sich auf zwei verschiedene Weisen so in die $\mathfrak{S}^4$ einlagern läßt, daß die Homologiegruppen des Innengebietes der ersten Einlagerung weder mit den Homologiegruppen des Innengebietes noch mit denen des Außengebietes der zweiten Einlagerung übereinstimmen.

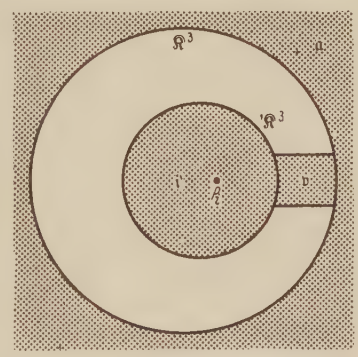


Fig. 3.

Zu dem Zwecke gehen wir von dem topologischen Produkte $\mathfrak{R}^3$ dreier Kreise aus, das wir irgendwie simplizial in $\mathfrak{S}^4$ eingelagert denken. i sei das Innen-, a das Außengebiet und P_i ein Punkt von i. Durch eine passende ähnliche Verkleinerung mit dem Ähnlichkeitszentrum P_i können wir $\mathfrak{R}^3$ in eine ganz in i liegende Mannigfaltigkeit $'\mathfrak{R}^3$ überführen, deren Innengebiet i' sei. Schließlich verbinden wir i' und a durch einen vierdimensionalen Zylinder v, dessen „Basisflächen" dreidimensionale Elemente auf $'\mathfrak{R}^3$ bzw. $\mathfrak{R}^3$ sind. In Fig. 3 haben wir dies schematisch dargestellt. Dann ist $\mathfrak{i}' + \mathfrak{v} + \mathfrak{a} = \mathfrak{A}$ das (in Fig. 3 durch Punktierung angegebene) Außengebiet einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$, die offenbar die topologische Summe aus $'\mathfrak{R}^3$ und $\mathfrak{R}^3$ ist. Wir wollen die Bettische Zahl p^1 des Außengebietes $\mathfrak{A}$ berechnen. Es ist

$$p^1(\mathfrak{A}) = p^1(\mathfrak{i}') + p^1(\mathfrak{a}) = p^1(\mathfrak{i}) + p^1(\mathfrak{a}) = p^1(\mathfrak{S}^4 - \mathfrak{R}^3) = p^2(\mathfrak{R}^3) = 3.$$

Ferner ergibt sich die Bettische Zahl des Innengebietes $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{M}^3$ aus

$$p^1(\mathfrak{I}) + p^1(\mathfrak{A}) = p^1(\mathfrak{I} + \mathfrak{A}) = p^2(\mathfrak{S}^4 - \mathfrak{I} - \mathfrak{A})$$
$$= p^2(\mathfrak{M}^3) = p^1(\mathfrak{M}^3) = 2\,p^1(\mathfrak{R}^3) = 6,$$

also $p^1(\mathfrak{I}) = 3$.

Nun legen wir zweitens $\mathfrak{M}^3$ auf folgende Weise in $\mathfrak{S}^4$. Das topologische Produkt $\mathfrak{K}^3$, das wie zuvor in $\mathfrak{S}^4$ liegen möge, wird wiederum ähnlich verkleinert, aber diesmal von einem im Außengebiet $\mathfrak{a}$ liegenden Ähnlichkeitszentrum P_a. Ist $'\mathfrak{K}^3$ die ähnliche Verkleinerung, die ganz im Außengebiet von $\mathfrak{K}^3$ liege und $\mathfrak{i}'$ das Innengebiet von $'\mathfrak{K}^3$, so verbinden wir $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}$ durch einen vierdimensionalen Zylinder $\mathfrak{v}$, dessen „Basisflächen" Vollkugeln auf $'\mathfrak{K}^3$ bzw. $\mathfrak{K}^3$ sind (Fig. 4). $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}' + \mathfrak{v} = \mathfrak{J}$ ist dann ein Gebiet, dessen Rand $\mathfrak{M}^3$ die topologische Summe von $\mathfrak{K}^3$ und $'\mathfrak{K}^3$ ist. Nun ist

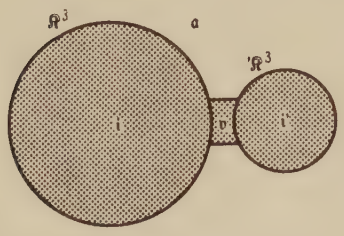


Fig. 4.

$$p^1(\mathfrak{J}) = p^1(\mathfrak{i}) + p^1(\mathfrak{i}') = 2\,p^1(\mathfrak{i})$$

eine gerade Zahl, im Gegensatz zur ersten Einlagerung, wo p^1 für das Innen- und Außengebiet 3 war.

Anhang I.

Satz: *Ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ Teilkomplex einer simplizialen Zerlegung der $(n+1)$-Sphäre $\mathfrak{S}^{n+1}$, so sind die beiden endlichen Teilkomplexe, nämlich „Innenraum" $\mathfrak{J}^{n+1}$ plus $\mathfrak{M}^n$ (mit $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ bezeichnet) und „Außenraum" $\mathfrak{A}^{n+1}$ plus $\mathfrak{M}^n$ (mit $\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}$ bezeichnet) berandete Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: $\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}$ ist offenbar eine von $\mathfrak{M}^n$ berandete Pseudomannigfaltigkeit. Man hat zu beweisen, daß ihre Verdoppelung eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}^{n+1}$ ist, d. h. daß die Homologiegruppen in jedem Punkte die der n-Sphäre sind. Nur für die Punkte von $\mathfrak{M}^n$ ist dies zweifelhaft, für die übrigen ist es erfüllt, weil sie eine ganz in $\mathfrak{S}^{n+1}$ gelegene Umgebung haben. Sei nun P ein auf $\mathfrak{M}^n$ liegender Punkt von $\mathfrak{B}^{n+1}$. Wir konstruieren eine simpliziale Zerlegung von $\mathfrak{S}^{n+1}$ (durch Unterteilung der vorgegebenen), die P zur Ecke hat. Der $(n+1)$-dimensionale Simplexstern von $\mathfrak{S}^{n+1}$, der P zum Mittelpunkt hat, möge den Außenrand $\mathfrak{C}^n$ haben. $\mathfrak{C}^n$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die die Homologiegruppen der n-Sphäre hat, da $\mathfrak{S}^{n+1}$ eine Mannigfaltigkeit ist. $\mathfrak{M}^n$ hat mit $\mathfrak{C}^n$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{n-1}$ gemein, nämlich den Außenrand des Simplexsternes um P in bezug auf $\mathfrak{M}^n$, und $\mathfrak{M}^{n-1}$ hat die Homologiegruppe der $(n-1)$-Sphäre, weil $\mathfrak{M}^n$ nach Voraussetzung Mannigfaltigkeit ist. $\mathfrak{M}^{n-1}$ zerlegt $\mathfrak{C}^n$ nach dem Alexanderschen Dualitätssatz in zwei Gebiete $\mathfrak{A}^n$ und $\mathfrak{J}^n$. Die Verdoppelung $\mathfrak{B}^{n+1}$ setzt sich aus zwei zu $\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}$ homöomorphen Komplexen zusammen, die wir mit $\overline{\mathfrak{A}}_1^{n+1}$

und $\overline{\mathfrak{A}}_2^{n+1}$ bezeichnen wollen. Der Simplexstern von $\mathfrak{B}^{n+1}$, der P zum Mittelpunkt hat, ist die Verdoppelung des Simplexsternes von $\overline{\mathfrak{A}}^{n+1}$ mit P als Mittelpunkt. Seinen Außenrand nennen wir:

$$\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}_1^n + \mathfrak{a}_2^n,$$

wo $\mathfrak{a}_1^n$ alle zu $\overline{\mathfrak{A}}_1^{n+1}$, $\mathfrak{a}_2^n$ alle zu $\overline{\mathfrak{A}}_2^{n+1}$ gehörigen Simplexe enthält. Von dem Komplex $\mathfrak{a}^n$ haben wir zu beweisen, daß er die Homologiegruppen der n-Sphäre hat. Sei z^k eine geschlossene Kette auf $\mathfrak{a}^n$. Wir beweisen, daß sie nullhomolog ist, außer wenn $k = 0$ oder n ist. Zu dem Zwecke wird z^k in zwei Teile z_1^k und z_2^k zerlegt. z_1^k enthält alle Simplexe, die zu $\mathfrak{a}_1^n$, z_2^k alle die zu $\mathfrak{a}_2^n$ gehören, so daß die zu $\mathfrak{M}^{n-1}$ gehörigen Simplexe von z^k den beiden Teilen gemeinsam sind. Der Rand von z_1^k, den wir mit $Rd\, z_1^k$ bezeichnen, ist eine geschlossene $(n-1)$-Kette von $\mathfrak{M}^{n-1}$ und ist dort nullhomolog, da $\mathfrak{M}^{n-1}$ dieselben Homologiegruppen wie die $(n-1)$-Sphäre hat. z_1^k läßt sich daher durch Simplexe von $\mathfrak{M}^{n-1}$ zu einer geschlossenen Kette von $\mathfrak{a}_1$ ergänzen. Diese ist auf $\mathfrak{C}^n$ nullhomolog, falls $k \neq 0$, n ist. Man kann daher in sie eine Kette z^{k+1} von $\mathfrak{C}^n$ einspannen. Von dieser nennen wir den zu a_1^n gehörigen Teil z_a^{k+1}. Es ist $Rd\, z_a^{k+1} = z_1^k - m_1^k$, wo m_1^k auf $\mathfrak{M}^{n-1}$ liegt.

Also ist $z_1^k \sim m_1^k$ auf $\mathfrak{a}_1^n$ und ebenso $z_2^k \sim m_2^k$ auf $\mathfrak{a}_2^n$ und damit $z^k \sim m_1^k + m_2^k$ auf $\mathfrak{a}^n$. Die rechte Seite ist nullhomolog auf $\mathfrak{M}^{n-1}$, also erst recht auf $\mathfrak{a}^n$, außer wenn $k = n-1$ ist; in diesem Falle ist sie homolog einem Vielfachen der Kette, die aus den kohärent orientierten Simplexen von $\mathfrak{M}^{n-1}$ besteht. Diese Kette ist aber nullhomolog in $\mathfrak{a}^n$, weil sie ein Vielfaches von $Rd\, A_1^n$ ist, wo die Kette A_1^n aus allen kohärent orientierten Simplexen von $\mathfrak{a}_1^n$ besteht. Daher ist jede k-Kette von $\mathfrak{a}^n$ nullhomolog, falls $k \neq 0$ oder n ist. Daß die Homologiegruppen der Dimension 0 und n von $\mathfrak{a}^n$ freie Gruppen von einer Erzeugenden sind, ist klar.

Anhang II.

Hilfssatz: *Jede k-Kette einer berandeten Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$, deren Rand ganz im Inneren von $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ liegt, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ist homolog einer ganz im Inneren gelegenen k-Kette.*

Beweis: In $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ betrachten wir eine feste simpliziale Zerlegung von der Art, daß ein Simplex, dessen Ecken alle auf dem Rande $\mathfrak{M}^n$ von $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ liegen, selbst zu $\mathfrak{M}^n$ gehört. Es sei nun C^k eine simpliziale Kette von $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ und $Rd\, C^k$ ganz im Inneren von $\overline{\mathfrak{J}}^{n+1}$ gelegen, insbesondere unter Umständen die $(k-1)$-Kette Null. Wenn C^k gewisse k-Simplexe oder Seiten von k-Simplexen mit $\mathfrak{M}^n$ gemeinsam hat, so werden diese nach folgendem Verfahren beseitigt: Liegt ein k-Simplex $\mathfrak{E}^k$ von C^k auf $\mathfrak{M}^n$, so ist $\mathfrak{E}^k$ Rand eines $(k+1)$-Simplexes, das bis auf die

Seite $\mathfrak{E}^k$ ganz im Inneren von $\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}$ liegt. Subtrahiert man von C^k den Rand dieses passend orientierten $(k+1)$-Simplexes, so ergibt sich eine zu C^k homologe Kette, die ein k-Simplex weniger mit $\mathfrak{M}^n$ gemeinsam hat. Auf diese Weise beseitigt man alle auf $\mathfrak{M}^n$ liegenden k-Simplexe von C^k.

Bezeichnen wir die so entstehende zu C^k homologe Kette der Einfachheit halber wieder mit C^k, so sei nunmehr $\mathfrak{E}^j$ ein Simplex höchster Dimension, das Seitensimplex eines k-Simplexes von C^k ist und auf $\mathfrak{M}^n$ liegt ($j = 0$ oder 1 oder ... oder $k-1$). Wir betrachten alle mit $\mathfrak{E}^j$ inzidenten Simplexe von $\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}$, und in jedem das $\mathfrak{E}^j$ gegenüberliegende Simplex. Diese gegenüberliegenden Simplexe bilden eine berandete Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$. Denn bildet man die Verdoppelung von $\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}$, so machen in dieser Mannigfaltigkeit die $\mathfrak{E}^j$ gegenüberliegenden Simplexe in allen mit $\mathfrak{E}^j$ inzidenten Simplexen eine Mannigfaltigkeit, nämlich die Umgebungsmannigfaltigkeit von $\mathfrak{E}^j$ hinsichtlich der Verdoppelung aus. Die Umgebungsmannigfaltigkeit ist aber die Verdopplung von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$. — Nun betrachten wir die Kette C_U^k derjenigen k-Simplexe von C^k, die $\mathfrak{E}^j$ zur Seite haben, und in jedem solchen k-Simplex das $\mathfrak{E}^j$ gegenüberliegende Simplex; es hat die Dimension $k-j-1$. Diese gegenüberliegenden Simplexe liegen alle auf $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ und zwar im Inneren von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$. Denn läge eine Ecke auf dem Rande, so läge auch eine Ecke eines zu C^k gehörigen und mit $\mathfrak{E}^j$ inzidenten Simplexes auf dem Rande, und $\mathfrak{E}^j$ wäre daher nicht ein Simplex höchster Dimension. Die gegenüberliegenden Simplexe bilden somit eine $(k-j-1)$-Kette K^{k-j-1}, die ganz im Innern von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ liegt. Sie ist geschlossen, weil im anderen Falle $Rd\, C^k$ nicht ganz im Innern von $\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}$ liegen würde, sondern ein mit $\mathfrak{E}^j$ inzidentes Simplex enthielte. — K^{k-j-1} ist in $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ nullhomolog, da $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ als Umgebungsmannigfaltigkeit eines Randsimplexes einer berandeten Mannigfaltigkeit dieselben Homologiegruppen hat wie ein $(n-j)$-dimensionales Element. Es läßt sich daher in K^{k-j-1} eine in $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ gelegene Kette $\overline{C}^{k-j}$ einspannen, und diese dürfen wir ganz im Innern von $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ annehmen. Denn $\overline{\mathfrak{U}}^{n-j}$ ist eine berandete Mannigfaltigkeit von niedrigerer Dimension als $\overline{\mathfrak{I}}^{n+1}$. Auf Grund eines Induktionsschlusses nehmen wir den Hilfssatz für solche berandete Mannigfaltigkeiten als bewiesen an; für die 1-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit, die Strecke, gilt er offenbar. Nun bilden wir die gegenseitige Projektion (vgl. Anhang III) des Randes von $\mathfrak{E}^j$ mit der Kette $\overline{C}^{k-j}$, falls $j > 0$. Wenn dagegen $j = 0$, so fällt die gegenseitige Projektion fort. Die gegenseitige Projektion ist eine Kette $\overline{C}^k$, die denselben Rand hat wie C_U^k, nämlich die gegenseitige Projektion des Randes von $\mathfrak{E}^j$ mit der Kette K^{k-j-1}. $\overline{C}^k$ ist ferner homolog zu C_U^k. Ersetzt man in C^k die Teilkette C_U^k durch $\overline{C}^k$, so entsteht eine Kette $C_1^k \sim C^k$, die eine j-dimensionale Seite weniger auf

dem Rande $\mathfrak{M}^n$ liegen hat. So kann man der Reihe nach alle Simplexe, in denen C^k den Rand berührt, beseitigen und damit ganz C^k vom Rande abdrängen.

Anhang III.

Wir gehen von einem in den $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^{n+1}$ eingelagerten zusammenhängenden endlichen Komplex $\mathfrak{L}^m$ $(m \leqq n+1)$ aus. $\mathfrak{L}^m$ bestehe aus geradlinigen Simplexen des $\mathfrak{R}^{n+1}$. $\mathfrak{L}^m$ sei simplizial zerlegt. Wir erweitern seine simpliziale Zerlegung zu einer des gesamten $\mathfrak{R}^{n+1}$, was möglich ist, da $\mathfrak{L}^m$ nur aus endlich vielen Simplexen besteht. Durch Normalunterteilung erreichen wir ferner, daß jedes k-Simplex, das alle seine $k+1$ Ecken auf $\mathfrak{L}^m$ liegen hat, ganz zu $\mathfrak{L}^m$ gehört. Wir betrachten nun alle $(k+1)$-Simplexe $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ der simplizialen Zerlegung des $\mathfrak{R}^{n+1}$, die eine $(r+1)$-dimensionale Seite $\mathfrak{s}_\mu^{r+1}$ $(r = -1, 0, 1, \ldots, k-1)$ auf $\mathfrak{L}^m$ liegen haben. In jedem solchen Simplexe gibt es eine $\mathfrak{s}_\mu^{r+1}$ gegenüberliegende Seite $\mathfrak{t}_\mu^{k-r-1}$, die keinen Punkt mit $\mathfrak{L}^m$ gemeinsam hat. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ geht genau eine geradlinige Strecke (projizierende Strecke), deren Randpunkte auf $\mathfrak{s}_\mu^{r+1}$ bzw. $\mathfrak{t}_\mu^{k-r-1}$ (vgl. Fußnote [11]) auf S. 45) liegen. Halbieren wir alle projizierenden Strecken, so bildet die Gesamtheit der Mittelpunkte eine k-dimensionale konvexe Zelle $\mathfrak{a}_\mu^k$. Jedem $(k+1)$-Simplexe $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ des $\mathfrak{R}^{n+1}$, das eine $(r+1)$-dimensionale Seite $\mathfrak{s}_\mu^{r+1}$ auf $\mathfrak{L}^m$ liegen hat, wird damit umkehrbar eindeutig eine k-dimensionale Zelle $\mathfrak{a}_\mu^k$ zugeordnet. Offenbar sind zwei Zellen $\mathfrak{a}_\mu^k$ und $\mathfrak{a}_\nu^l$ dann und nur dann inzident, wenn es die zugeordneten Simplexe $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ und $\mathfrak{E}_\nu^{l+1}$ sind. Die Gesamtheit der k-dimensionalen Zellen $\mathfrak{a}_\mu^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ bildet einen n-dimensionalen reinen[16]) Zellenkomplex $\mathfrak{U}^n$. $\mathfrak{U}^n$ bezeichnen wir als den *Umgebungskomplex* von $\mathfrak{L}^m$ in bezug auf $\mathfrak{R}^{n+1}$. Wir beweisen nun den

Satz: *Der Umgebungskomplex eines in den $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^{n+1}$ eingelagerten zusammenhängenden, aus endlich vielen geradlinigen Simplexen bestehenden m-dimensionalen Komplexes $\mathfrak{L}^m$ $(m \leqq n+1)$ in bezug auf den $\mathfrak{R}^{n+1}$ ist eine homogene Mannigfaltigkeit.*

$\mathfrak{L}^m$ braucht kein reiner Komplex zu sein.

Beweis: Zu der von den Zellen $\mathfrak{a}_\mu^k$ gebildeten Zellteilung von $\mathfrak{U}^n$ gibt es, wie zu jeder eines reinen Sternkomplexes, eine duale Sternteilung in bezug auf $\mathfrak{U}^n$. $\mathfrak{b}_\mu^{n-k}$ sei der zu $\mathfrak{a}_\mu^k$ duale $(n-k)$-dimensionale Stern. Wir wollen nachweisen, daß dessen Außenrand $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$ eine Sphäre ist.

[16]) Seifert-Threlfall, Topologie (1934), S. 48.

1. $\mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$ sei ein Stern von $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$. Der zu $\mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$ duale Stern ist die Zelle $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$, die $\mathfrak{a}_\mu^k$ zur Seite hat; andererseits gehört der duale Stern einer jeden Zelle $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$, die $\mathfrak{a}_\mu^k$ zur Seite hat, zu $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$. Zwei Sterne $\mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$ und $\mathfrak{b}_{\nu'}^{n-k-l'}$ sind dann und nur dann inzident, wenn es die dazu dualen Zellen $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$ und $\mathfrak{a}_{\nu'}^{k+l'}$ sind. Die eben gemachten Aussagen sind richtig, weil beim Übergang zur dualen Sternteilung die Inzidenzen erhalten bleiben.

2. Es sei nun $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ das nach obigem der Zelle $\mathfrak{a}_\mu^k$ zugeordnete $(k+1)$-Simplex des $\mathfrak{R}^{n+1}$, $\mathfrak{E}_\nu^{k+l+1}$ das $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$ zugeordnete $(k+l+1)$-Simplex. Die Simplexe $\mathfrak{E}_\nu^{k+l+1}$ sind offenbar gerade die Simplexe des $\mathfrak{R}^{n+1}$, die das Simplex $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ zur Seite haben. Ihre gegenseitigen Inzidenzen sind die gleichen wie die der entsprechenden Zellen $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$. Betrachten wir in jedem Simplex $\mathfrak{E}_\nu^{k+l+1}$ das $\mathfrak{E}_\mu^{k+1}$ gegenüberliegende Simplex $\mathfrak{g}_\nu^{l-1}$, so haben auch die Simplexe $\mathfrak{g}_\nu^{l-1}$ dieselben Inzidenzen wie die Simplexe $\mathfrak{E}_\nu^{k+l+1}$, infolgedessen die gleichen wie die Zellen $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$.

Da die $\mathfrak{a}_\nu^{k+l}$ andererseits nach 1. ebenso inzident sind wie die $\mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$, so haben bei der Zuordnung:

$$\mathfrak{g}_\nu^{l-1} \longleftrightarrow \mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$$

die $\mathfrak{g}_\nu^{l-1}$ schließlich dieselben Inzidenzen wie die $\mathfrak{b}_\nu^{n-k-l}$. Da die Dimensionen $l-1$ und $n-k-l$ der zuletzt zugeordneten Sterne und Simplexe $n-k-1$, d. h. die Dimension von $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$ zur Summe haben, so bilden die Simplexe $\mathfrak{g}_\nu^{l-1}$ den zu $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$ dualen und damit einen zu $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$ homöomorphen Sternkomplex. Nach einem sogleich zu beweisenden Hilfssatz 1 ist nun aber der von den Simplexen $\mathfrak{g}_\nu^{l-1}$ gebildete Komplex eine Sphäre. Dies gilt somit auch für den Außenrand $\mathfrak{B}_\mu^{n-k-1}$ des dualen Sternes $\mathfrak{b}_\mu^{n-k}$ der Zelle $\mathfrak{a}_\mu^k$ in bezug auf $\mathfrak{U}^n$, was wir zunächst beweisen wollten.

Um nun von $\mathfrak{U}^n$ nachzuweisen, daß es eine (homogene) Mannigfaltigkeit ist, zeigen wir, daß jeder Punkt P von $\mathfrak{U}^n$ eine n-dimensionale Vollkugel als Umgebung besitzt. $\mathfrak{a}_\mu^k$ sei die Zelle niedrigster Dimension, die P als inneren Punkt enthält. Es ist dann keine Einschränkung anzunehmen, daß P der Mittelpunkt von $\mathfrak{a}_\mu^k$ ist. Ist $k = n$, so ist nichts zu beweisen. Sei daher $k < n$. Der Simplexstern $\mathfrak{St}_\mu^n$ der Normalunterteilung von $\mathfrak{U}^n$ mit dem Mittelpunkt P ist dann die gegenseitige Projektion[17]) des

[17]) Unter der *gegenseitigen Projektion* zweier simplizialer Komplexe $\mathfrak{P}^r$ und $\mathfrak{Q}^s$ verstehen wir den simplizialen Komplex $\mathfrak{R}^{r+s+1}$, dessen Nullsimplexe (Ecken) aus den sämtlichen Nullsimplexen P_ϱ von $\mathfrak{P}^r$ und Q_σ von $\mathfrak{Q}^s$ bestehen und in dem

Außenrandes von $\mathfrak{a}_\mu^k$ und dem Außenrand der dualen Zelle $\mathfrak{b}_\mu^{n-k}$. Da diese Außenränder, wie wir gesehen haben, Sphären sind, so gilt nach Hilfssatz 2 gleiches von der gegenseitigen Projektion. Der Außenrand von $\mathfrak{St}_\mu^n$ ist also eine $(n-1)$-Sphäre und somit $\mathfrak{St}_\mu^n$ eine Vollkugel. Damit ist der Satz bewiesen, und es bleiben noch die Hilfssätze 1 und 2 nachzutragen.

In einer geradlinigen simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{R}^{n+1}$ betrachten wir ein Simplex $\mathfrak{E}^k$ und alle $(k+l)$-Simplexe $\mathfrak{E}_r^{k+l}$ $(l=0, 1, \ldots, n+1-k)$, die $\mathfrak{E}^k$ zur Seite haben. $\mathfrak{g}_r^{l-1}$ sei die $\mathfrak{E}^k$ gegenüberliegende Seite von $\mathfrak{E}_r^{k+l}$. Dann gilt der

Hilfssatz 1: *Die Gesamtheit $\mathfrak{C}^{n-k}$ der Simplexe $\mathfrak{g}_r^{l-1}$ bildet eine $(n-k)$-dimensionale Sphäre.*

Beweis: $\mathfrak{E}^k$ bestimmt einen k-dimensionalen linearen Raum $\mathfrak{L}^k$. Wir betrachten alle möglichen $(k+1)$-dimensionalen linearen Halbräume mit dem Rande $\mathfrak{L}^k$. Jeder trifft $\mathfrak{C}^{n-k}$ in genau einem Punkte, und umgekehrt bestimmt jeder Punkt von $\mathfrak{C}^{n-k}$ zusammen mit $\mathfrak{L}^k$ einen $(k+1)$-dimensionalen linearen Halbraum. $\mathfrak{C}^{n-k}$ ist also homöomorph zur Menge dieser Halbräume. Diese Menge ist aber, wie man am Durchschnitt mit einer zu $\mathfrak{L}^k$ total senkrechten Hyperebene von $n+1-k$ Dimensionen erkennt, homöomorph zur $(n-k)$-dimensionalen Sphäre.

Wir beweisen schließlich den

Hilfssatz 2: *Die gegenseitige Projektion aus einer k-Sphäre $\mathfrak{S}^k$ und einer k_1-Sphäre $\mathfrak{S}^{k_1}$ ist eine $(k+k_1+1)$-Sphäre $\mathfrak{S}^{k+k_1+1}$.*

Beweis: Seien $P_1^{(\varepsilon_1)}, P_2^{(\varepsilon_2)}, \ldots, P_{k+k_1+2}^{(\varepsilon_{k+k_1+2})}$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ die $2(k+k_1+2)$ Punkte $(\varepsilon_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \varepsilon_2, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, \varepsilon_{k+k_1+2})$ des auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung O bezogenen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^{k+k_1+2}$. Dann spannen die Punkte $(O, P_1^{(\varepsilon_1)}, \ldots, P_{k+k_1+2}^{(\varepsilon_{k+k_1+2})})$ ein $(k+k_1+2)$-dimensionales Simplex auf. Die Gesamtheit dieser Simplexe machen ein $(k+k_1+2)$-dimensionales Element

---

die Ecken $P_a, \ldots, P_c, Q_b, \ldots, Q_d$ dann und nur dann ein Simplex aufspannen, wenn die Ecken $P_a, \ldots, P_c$ ein Simplex von $\mathfrak{P}^r$ und $Q_b, \ldots, Q_d$ ein Simplex von $\mathfrak{Q}^s$ aufspannen. Der Fall, daß die Menge der Ecken $P_a, \ldots, P_c$ oder die der Ecken $Q_b, \ldots, Q_d$ leer ist, ist inbegriffen, d. h. die Simplexe von $\mathfrak{Q}^s$ und $\mathfrak{P}^r$ gehören selbst mit zu $\mathfrak{R}^{r+s+1}$. Durch diese Angabe sind die Simplexe und ihre Inzidenzen und damit $\mathfrak{R}^{r+s+1}$ vollständig bestimmt. — Eine gleichwertige invariante Definition der gegenseitigen Projektion ist die folgende: Man bilde das topologische Produkt aus $\mathfrak{P}^r$, $\mathfrak{Q}^s$ und der Einheitsstrecke $0 \leqq t \leqq 1$ und identifiziere darin alle Punkte $P \times Q \times 0$ bei festgehaltenem P von $\mathfrak{P}^r$ und veränderlichem Q von $\mathfrak{Q}^s$, und ebenso alle Punkte $P \times Q \times 1$ bei festgehaltenem Q von $\mathfrak{Q}^s$ und veränderlichem P von $\mathfrak{P}^r$.

aus, dessen Rand eine $(k + k_1 + 1)$-dimensionale Sphäre $\mathfrak{S}^{k+k_1+1}$ ist. Ein beliebiges Simplex von $\mathfrak{S}^{k+k_1+1}$ hat die Gestalt:

$$(P_i^{(\varepsilon_i)}, P_j^{(\varepsilon_j)}, \ldots, P_t^{(\varepsilon_t)}) \qquad (i < j < \ldots < t)\ ^{18}).$$

Entsprechend bilden in der durch $\overrightarrow{OP_1^{(1)}}, \ldots, \overrightarrow{OP_{k_1+1}^{(1)}}$ bestimmten Hyperebene E^{k_1+1} die Simplexe $(O, P_1^{(\varepsilon_1)}, \ldots, P_{k_1+1}^{(\varepsilon_{k_1+1})})$ ein (k_1+1)-dimensionales Element mit dem Rande $\mathfrak{S}^{k_1}$ und die Simplexe $(O, P_{k_1+2}^{(\varepsilon_{k_1+2})}, \ldots, P_{k+k_1+2}^{(\varepsilon_{k+k_1+2})})$ ein solches mit dem Rande $\mathfrak{S}^k$ in der zu E^{k_1+1} total senkrechten Hyperebene.

Ein beliebiges Simplex von $\mathfrak{S}^{k+k_1+2}$ $(P_i^{(\varepsilon_i)}, P_j^{(\varepsilon_j)}, \ldots, P_m^{(\varepsilon_m)}, P_r^{(\varepsilon_r)}, \ldots, P^{(\varepsilon_t)})$ mit $(i < j < \ldots < m \leqq k_1 + 1;\ k_1 + 2 \leqq r < \ldots < t)$ ist offenbar die gegenseitige Projektion aus dem zu $\mathfrak{S}^{k_1}$ gehörigen Simplexe $(P_i^{(\varepsilon_i)}, P_j^{(\varepsilon_j)}, \ldots, P_m^{(\varepsilon_m)})$ und dem $\mathfrak{S}^k$ angehörenden Simplex $(P_r^{(\varepsilon_r)}, \ldots, P_t^{(\varepsilon_t)})$. Andererseits ist die gegenseitige Projektion von einem beliebigen Simplex $(P_i^{(\varepsilon_i)}, P_j^{(\varepsilon_j)}, \ldots, P_m^{(\varepsilon_m)})$ $(i < j < \ldots\ m \leqq k_1 + 1)$ von $\mathfrak{S}^{k_1}$ mit einem beliebigen Simplex $(P_r^{(\varepsilon_r)}, \ldots, P_t^{(\varepsilon_t)})$ $(k_1 + 2 \leqq r < \ldots < t)$ von $\mathfrak{S}^k$ ein solches von $\mathfrak{S}^{k+k_1+2}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}^{k+k_1+2}$ die gegenseitige Projektion aus $\mathfrak{S}^k$ und $\mathfrak{S}^{k_1}$ ist.

---

[18]) Die simpliziale Zerlegung von $\mathfrak{S}^{k+k_1+1}$ ist die oktaedrale; vgl. S. 52 von [1]).

(Eingegangen am 27. Dezember 1936.)

Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels*).

Von

Eberhard Mettler in Hannover.

Inhalt.

Einleitung 60

I. Abschnitt.

Allgemeine Entwicklungen.

§ 1. Transformation auf Normalkoordinaten 61
1. Die Bewegungsgleichungen und ihre Variationsgleichungen . . 61
2. Einführung von Normalkoordinaten 63

§ 2. Die Reihenentwicklungen 65
1. Asymptotische Lösungen erster Art. Formale Reihenentwicklung 65
2. Periodische Lösungen und asymptotische Lösungen zweiter Art. Formale Reihenentwicklung 68
3. Über die Konvergenz der Reihen 72

II. Abschnitt.

Kreiselbewegungen.

§ 3. Die kanonischen Gleichungen des Kreisels 76
1. Berechnung von H 76
2. Die stationären Bewegungen 79
3. Die charakteristische Gleichung 81

§ 4. Die Kreiselbewegungen 88
1. Das allgemeine Bild der Bewegungen 88
2. Numerische Beispiele 92

*) Von der Abteilung für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigte Dissertation. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Dr. Grammel und Prof. Dr. Pfeiffer.

Einleitung.

Das Problem des unsymmetrischen schweren Kreisels, d. h. die Frage, wie sich ein beliebig geformter starrer Körper, der in einem Punkt reibungsfrei aufgehängt ist, unter dem Einfluß der Schwerkraft bewegt, ist eines der wichtigsten Probleme der analytischen Mechanik, aber in seiner Allgemeinheit noch völlig ungelöst. Obwohl schon bei einer ganzen Anzahl von speziellen Kreiseln die Bewegungen ganz oder teilweise bekannt sind (die Fälle von Euler, Lagrange, Kowalewski, Hess usw.), so weiß man doch von dem allgemeinen Körper, über dessen Massenverteilung nichts vorausgesetzt wird, außerordentlich wenig. Man kennt die Staudeschen Drehungen und einige wenige durch Näherungsverfahren berechnete Bewegungen, die man kurz teils als Nachbarbewegungen einer regulären Präzession, teils als pseudoreguläre Präzessionen bezeichnen kann[1]).

In der vorliegenden Arbeit werden als Lösungen der Kreiselgleichungen unendliche Reihen aufgestellt, welche periodische und asymptotische Bewegungen des allgemeinen Kreisels darstellen. Solche partikulären Bewegungen spielen bekanntlich im Dreikörperproblem eine besonders wichtige Rolle als Ausgangspunkt und Grundlage zur Erforschung der Bahnkurven. Deshalb ist die Verwendung ähnlicher analytischer Methoden im Kreiselproblem naheliegend und verspricht interessante Aufschlüsse über bestimmte Bewegungsklassen des allgemeinen Kreisels. Die Berechnung unserer Reihen zeigt darum auch eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit manchen Methoden der Störungsrechnung.

Als Differentialgleichungen verwenden wir nicht wie üblich die Eulerschen Kreiselgleichungen trotz ihres einfachen symmetrischen Baues. Denn ihre isolierte Stellung innerhalb der Mechanik zeigt sich als Nachteil; man hat bei Benutzung eines der allgemeinen Gleichungssysteme der Dynamik von vornherein gewisse Methoden und Sätze zur Verfügung, welche die Integration sehr erleichtern. Wir behandeln aus diesem Grund das Problem mit Hilfe seiner kanonischen Gleichungen. Diese haben den Vorzug, daß man die zyklische Koordinate ψ rasch eliminieren und dann mit Hilfe von Berührungstransformationen auf einfache Weise passende Koordinaten einführen kann.

Der I. Abschnitt hat dementsprechend die Aufgabe, bekannte Ergebnisse aus dem Gebiet der periodischen und asymptotischen Lösungen von Differentialgleichungen für die kanonischen Gleichungen eines mechanischen Systems von der Art des Kreisels nutzbar zu machen. Dabei soll eine so abgerundete Darstellung dieser mathematischen Grundlagen

[1]) Vgl. zu der Problemlage den Bericht von R. Grammel in Geiger-Scheel, Handbuch der Physik 5 (1927), S. 425.

gegeben werden, daß in erster Linie die praktische Berechnung der Bewegungen — das letzte Ziel der Mechanik — deutlich wird. Im Hinblick auf diese Hauptidee des ersten Abschnitts müssen viele an sich bekannte Entwicklungen ausführlicher dargestellt werden als das sonst üblich ist.

Der II. Abschnitt bringt die Einzelausführung der Theorie für den Kreisel, die Diskussion der damit aufgestellten Lösungen und schließlich noch einige Beispiele zu ihrer numerischen Berechnung.

I. Abschnitt.

Allgemeine Entwicklungen.

§ 1.

Transformation auf Normalkoordinaten.

1. Die Bewegungsgleichungen und ihre Variationsgleichungen.

Wir betrachten ein konservatives dynamisches System von drei Freiheitsgraden, das die Hamiltonsche Funktion

$$(1)\quad H = H_{11}p_1^2 + 2H_{12}p_1p_2 + H_{22}p_2^2 + 2H_{13}p_1p_3 + 2H_{23}p_2p_3 + H_{33}p_3^2 + U$$

der kanonisch konjugierten Variabeln p_k, q_k $(k = 1, 2, 3)$ besitzt. H_{ik} und U seien dabei analytische Funktionen der zwei Koordinaten q_1, q_2 allein, so daß q_3 eine zyklische Koordinate darstellt.

Die kanonischen Gleichungen des Systems sind

$$(2\text{a})\qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad (k = 1, 2)$$

$$(2\text{b})\qquad \dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3}, \qquad \dot{p}_3 = 0.$$

Setzt man für p_3 eine beliebige Konstante, so bilden die Gleichungen (2a) für sich ein kanonisches System mit vier Variabeln. Nach seiner Lösung folgt q_3 aus (2b) durch eine Quadratur.

Setzt man in (2a) $\dot{q}_k = \dot{p}_k = 0$, so ist

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

ein Gleichungssystem für die jetzt konstanten Größen

$$q_k = q_{k0}, \qquad p_k = p_{k0}, \qquad (k = 1, 2)$$

und aus (2b) kommt dazu

$$\dot{q}_{30} = \omega = \text{const}, \qquad q_{30} = \omega t + c'.$$

Die Bewegungen, welche dieser Schar von Lösungen der kanonischen Gleichungen entsprechen, heißen stationär.

Die Funktionen H_{ik} und U entwickeln wir in Potenzreihen von $q_k - q_{k0}$. Durch die Transformation

$$(3) \qquad \begin{cases} q_k = q_k' + q_{k0}, \\ p_k = p_k' + p_{k0} \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

geht dann (1) über in die Form

$$(4) \quad H = \tfrac{1}{2}[a_{11} q_1'^2 + 2a_{12} q_1' q_2' + a_{22} q_2'^2 + 2a_{13} q_1' p_1' + 2a_{23} q_2' p_1' + a_{33} p_1'^2 + 2a_{14} q_1' p_2' + 2a_{24} q_2' p_2' + 2a_{34} p_1' p_2' + a_{44} p_2'^2] + \sum_{\substack{m_1+m_2+n_1+n_2 \geqq 3 \\ n_1+n_2 \leqq 2}} A_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1'^{m_1} q_2'^{m_2} p_1'^{n_1} p_2'^{n_2},$$

wo das konstante Glied als unwesentlich weggelassen ist und die Glieder ersten Grades verschwinden.

Aus (4) leitet man die sogenannten Variationsgleichungen oder Gleichungen der kleinen Schwingungen ab, indem man in (4) nur die Glieder zweiter Ordnung beibehält[2]). Man bekommt, wenn man a_{hl} auch mit a_{lh} bezeichnet,

$$(5) \qquad \begin{cases} -\dot{p}_k' = a_{k1} q_1' + a_{k2} q_2' + a_{k3} p_1' + a_{k4} p_2', \\ \dot{q}_k' = a_{k+2,1} q_1' + a_{k+2,2} q_2' + a_{k+2,3} p_1' + a_{k+2,4} p_2'. \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

Für die partikulären Integrale dieser Gleichungen macht man den Ansatz

$$q_k' = u_k e^{\varrho t}, \qquad p_k' = v_k e^{\varrho t} \qquad (k = 1, 2)$$

und findet durch Einsetzen

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{k1} u_1 + a_{k2} u_2 + a_{k3} v_1 + a_{k4} v_2 = -\varrho v_k \\ a_{k+2,1} u_1 + a_{k+2,2} u_2 + a_{k+2,3} v_1 + a_{k+2,4} v_2 = \varrho u_k \end{cases}$$

mit der Lösbarkeitsbedingung

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\varrho & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}+\varrho \\ a_{31}-\varrho & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42}-\varrho & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie heißt charakteristische Gleichung und hat die Wurzeln ϱ_l $(l = 1, \ldots, 4)$. Damit werden die Lösungen von (5)

$$(8) \qquad q_{kl}' = u_{kl} e^{\varrho_l t}, \qquad p_{kl}' = v_{kl} e^{\varrho_l t} \qquad (k = 1, 2;\ l = 1, \ldots, 4).$$

Da die Determinante sich nicht ändert, wenn man ϱ durch $-\varrho$ ersetzt, ist sie ein Polynom zweiten Grades in ϱ^2, und die Wurzeln $\varrho_1 \ldots \varrho_4$ sind paarweise entgegengesetzt gleich. Wir bezeichnen sie sogleich so, daß

$$(9) \qquad \varrho_3 = -\varrho_1, \qquad \varrho_4 = -\varrho_2$$

wird. Den Fall verschwindender oder gleicher Wurzeln schließen wir für die folgenden Rechnungen aus (vgl. S. 65).

---

[2]) Man beschränkt sich aber in der Folge *nicht* etwa auf diese Glieder.

2. Einführung von Normalkoordinaten[3]).

Wir führen neue Veränderliche ein, in denen die Variationsgleichungen eine besonders einfache Form erhalten, wie sie in der Theorie der kleinen Schwingungen gebräuchlich ist. Dort werden solche Veränderliche als Haupt- oder Normalkoordinaten bezeichnet.

Für jede der vier Wurzeln ϱ_l der charakteristischen Gleichung (7) findet man aus (6) ein Wertsystem $u_{1l}, u_{2l}, v_{1l}, v_{2l}$. Mit diesen 16 Größen, deren Determinante von Null verschieden ist, bilden wir die lineare Koordinatentransformation

$$(10) \qquad \begin{cases} q'_k = u_{k1} q''_1 + u_{k2} q''_2 + u_{k3} p''_1 + u_{k4} p''_2, \\ p'_k = v_{k1} q''_1 + v_{k2} q''_2 + v_{k3} p''_1 + v_{k4} p''_2. \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

Trägt man (10) in (4) ein, so werden die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades in p''_k, q''_k bei entsprechender Bezeichnung

$$a^*_{hl} = a_{11} u_{1h} u_{1l} + a_{12} (u_{1h} u_{2l} + u_{2h} u_{1l}) + \ldots + a_{13} (u_{1h} v_{1l} + v_{1h} u_{1l}) + \ldots + a_{44} v_{2h} v_{2l}. \quad (h, l = 1, \ldots, 4)$$

Es ist also

$$a^*_{hl} = a^*_{lh}.$$

Den Ausdruck a^*_{hl} erhält man auch, wenn man die Gleichungen (6) der Reihe nach mit u_{1h}, u_{2h}, v_{1h}, v_{2h} multipliziert und addiert. Es folgt

$$a^*_{hl} = -\varrho_l \sum_{k=1}^{2} (u_{kh} v_{kl} - u_{kl} v_{kh})$$

und durch Tausch von l und h

$$a^*_{lh} = \varrho_h \sum_{k=1}^{2} (u_{kh} v_{kl} - u_{kl} v_{kh}),$$

also

$$(\varrho_h + \varrho_l) \sum_{k=1}^{2} (u_{kh} v_{kl} - u_{kl} v_{kh}) = 0.$$

Für $\varrho_h + \varrho_l \neq 0$, d. h. nach (9) für $h, l \neq 1, 3$ und $h, l \neq 2, 4$ verschwindet also der Summenausdruck und damit a^*_{hl}. Dagegen fallen a^*_{13} und a^*_{24} nicht auch weg, weil (10) eine lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante ist und die Glieder zweiten Grades von H eine ebensolche quadratische Form bilden. Sie werden also einfach

$$a^*_{13} q''_1 p''_1 + a^*_{24} q''_2 p''_2.$$

---

[3]) Vgl. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, Berlin 1924, § 184. Die Transformation ist dort für stabile Bewegungen (rein imaginäre ϱ_l) ausgeführt, während sie hier auch auf instabile Bewegungen angewendet wird.

Wir haben nun weiter festzustellen, unter welchen Bedingungen die Transformation (10) eine Berührungstransformation ist, so daß man aus dem neuen H wieder die kanonischen Gleichungen ableiten darf. Diese Bedingungen kann man mit Hilfe der bekannten Lagrangeschen Klammerausdrücke[4]) darstellen in der Form

$$[q_i'' p_i''] = 1, \qquad [q_i'' p_k''] = 0, \quad (i = 1, 2; k = 1, 2; i \neq k)$$
$$[p_i'' p_k''] = 0, \qquad [q_i'' q_k''] = 0 \quad (i = 1, 2; k = 1, 2).$$

Sie werden nach (10)

$$\sum_{k=1}^{2} (u_{kh} v_{kl} - u_{kl} v_{kh}) = \begin{cases} 1 \text{ für } h, l = 1, 3; 2, 4. \\ 0 \text{ für alle andern} \\ \text{Ziffernpaare } h, l. \end{cases} \tag{11}$$

Da durch (6) über die Werte von u_{kl}, v_{kl} noch nicht verfügt ist, sondern nur über ihre Verhältnisse, so sind die Gleichungen (11) erfüllbar durch geeignete Wahl dieser Werte.

Lassen wir die Striche an den neuen Variabeln weg, so hat H jetzt die Gestalt

$$H = \varrho_1 p_1 q_1 + \varrho_2 p_2 q_2 + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2 \geqq 3} B_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2}. \tag{12}$$

Für die Wurzeln ϱ_l von (7) unterscheiden wir nun vier Fälle, welche Verschiedenheiten in der weiteren Gestalt von H bedingen.

1. Fall. ϱ_1, ϱ_2 sind reell und positiv.

Die Transformation (10) ist reell und (12) hat reelle Koeffizienten B.

2. Fall. ϱ_1, ϱ_2 sind konjugiert komplex mit positivem Realteil.

Bezeichnen wir die zu a konjugiert komplexe Zahl mit $\bar{a}$, so gilt wegen $\varrho_1 = \bar{\varrho}_2$ nach (6) und (9) für die Koeffizienten von (10)

$$u_{k1} = \bar{u}_{k2}, \qquad v_{k1} = \bar{v}_{k2},$$
$$u_{k3} = \bar{u}_{k4}, \qquad v_{k3} = \bar{v}_{k4}.$$

Es kommt daher in (12) zu jedem $B_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ auch der konjugiert komplexe Koeffizient $\bar{B}_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ vor, und es ist

$$\bar{B}_{m_1 m_2 n_1 n_2} = B_{m_2 m_1 n_2 n_1}. \tag{13}$$

In diesen beiden Fällen benutzen wir H in der Form (12).

3. Fall. $\varrho_1 = i s_1$ ist rein imaginär, ϱ_2 reell, außerdem $s_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$. $u_{k2}, v_{k2}, u_{k4}, v_{k4}$ sind also reell. Weiter setzen wir

$$u_{k3} = 2i\bar{u}_{k1},$$
$$v_{k3} = 2i\bar{v}_{k1}.$$

Das ist möglich, ohne daß die Erfüllbarkeit von (11) berührt wird.

---

[4]) Siehe z. B. Whittaker, a. a. O., S. 316.

Jetzt führen wir eine weitere Berührungstransformation der in (12) enthaltenen Variabeln aus, die definiert ist durch die Gleichungen

$$q_k^* = \frac{\partial S}{\partial p_k^*}, \qquad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2) \tag{14}$$

mit

$$S = q_1 p_1^* + \frac{i}{2} p_1^{*2} - \frac{i}{4} q_1^2 + q_2 p_2^*.$$

Dann geht H, wenn wir das Zeichen $*$ an den neuen Veränderlichen wieder weglassen, über in die reelle Form

$$H = \frac{s_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \varrho_2 p_2 q_2 + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2 \geqq 3} C_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2}. \tag{15}$$

4. Fall. $\varrho_1 = i s_1$, $\varrho_2 = i s_2$ sind rein imaginär, außerdem $s_1 > 0$, $s_2 > 0$. Wir setzen

$$u_{k3} = 2i\bar{u}_{k1}, \qquad u_{k4} = 2i\bar{u}_{k2},$$
$$v_{k3} = 2i\bar{v}_{k1}, \qquad v_{k4} = 2i\bar{v}_{k2}.$$

Durch die Berührungstransformation, die durch (14) und

$$S = \sum_{k=1}^{2} \left(q_k p_k^* + \frac{i}{2} p_k^{*2} - \frac{i}{4} q_k^2 \right)$$

bestimmt ist, wird (12) (das Zeichen $*$ weggelassen)

$$H = \sum_{k=1}^{2} \frac{s_k}{2}(p_k^2 + q_k^2) + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2 \geqq 3} D_{m_1 m_2 n_1 n_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \tag{16}$$

wieder mit reellen Koeffizienten D.

Ausgeschlossen werden die Fälle

$$\varrho_1 = m\varrho_2 \quad \text{oder} \quad \varrho_2 = m\varrho_1, \tag{17}$$

wo m eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist. Sie stellen in der nun folgenden Berechnung der Reihen Ausnahmefälle dar, weil sie die Bildung der Reihenglieder unmöglich machen.

§ 2.

Die Reihenentwicklungen.

1. Asymptotische Lösungen erster Art. Formale Reihenentwicklung[5]).

Wir setzen in dieser Ziffer die Fälle 1 und 2 von S. 64 voraus. Die kanonischen Gleichungen werden nach (12)

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_k &= \varrho_k q_k \\ \dot{p}_k &= -\varrho_k p_k \end{aligned}\right\} + \text{Glieder zweiten und höheren Grades in } p_k, q_k \qquad (k = 1, 2). \tag{18}$$

[5]) Vgl. dazu E. Picard, Traité d'analyse, tome III, 1. édition 1896, S. 17 ff., S. 185 ff.

Für ihre Integrale machen wir den Ansatz

$$(19) \qquad \begin{cases} q_k = \lambda q_{k1} + \lambda^2 q_{k2} + \lambda^3 q_{k3} + \ldots, \\ p_k = \lambda p_{k1} + \lambda^2 p_{k2} + \lambda^3 p_{k3} + \ldots \end{cases} \qquad (k = 1, 2).$$

Die Bedeutung der kleinen Größe λ wird sich unten als Proportionalitätsfaktor der Integrationskonstanten ergeben. Sie soll die Berechnung der Reihen übersichtlicher machen.

Man hat (19) in (18) einzusetzen und alles nach Potenzen von λ zu ordnen. Dann zerfällt durch Potenzvergleich das System (18) in eine unendliche Folge von linearen Gleichungen. Man findet

$$(20_1) \qquad \begin{cases} \dot{q}_{k1} = \varrho_k q_{k1}, \\ \dot{p}_{k1} = -\varrho_k p_{k1} \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

und allgemein

$$(20_r) \qquad \begin{cases} \dot{q}_{kr} = \varrho_k q_{kr} + R_{kr}(t), \\ \dot{p}_{kr} = -\varrho_k p_{kr} + S_{kr}(t) \end{cases} \qquad (k = 1, 2),$$

wo R_{kr}, S_{kr} Polynome von Integralen der früheren Gleichungen (20) sind. Beispielsweise ist

$$(21_2) \qquad \begin{cases} R_{12} = B_{2010} q_{11}^2 + B_{1110} q_{11} q_{21} + B_{0210} q_{21}^2 \\ \quad + 2 B_{1020} q_{11} p_{11} + 2 B_{0120} q_{21} p_{11} + B_{1011} q_{11} p_{21} + B_{0111} q_{21} p_{21} \\ \quad + 3 B_{0030} p_{11}^2 + 2 B_{0021} p_{11} p_{21} + B_{0012} p_{21}^2, \end{cases}$$

$$(21_3) \qquad \begin{cases} R_{13} = B_{3010} q_{11}^3 + B_{2110} q_{11}^2 q_{21} + 2 B_{1021} q_{11} p_{11} p_{21} \\ \qquad\qquad + B_{0211} q_{21}^2 p_{21} + \ldots \\ \quad + 2 B_{2010} q_{11} q_{12} + B_{1110} (q_{11} q_{22} + q_{12} q_{21}) \\ \qquad\qquad + 2 B_{1020} (q_{11} p_{12} + p_{11} q_{12}) + \ldots, \end{cases}$$

und allgemein entstehen R_{kr}, S_{kr} aus (19) durch Zusammenfassen aller Glieder mit λ^r auf der rechten Seite von (18).

Die Gleichungen (20) können der Reihe nach gelöst werden. Um ein Divergieren der Reihen (19) zu verhindern, benutzen wir jedenfalls nur diejenigen Integrale von (20_1), die mit der Zeit nicht unbegrenzt zunehmen, also

$$(22_1) \qquad \begin{cases} q_{k1} = 0, \\ p_{k1} = c_k e^{-\varrho_k t} \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

mit den willkürlichen Konstanten c_k. Damit bildet man die Funktionen R_{kr}, S_{kr} (beispielsweise (21_2)) in der Form

$$(23) \qquad \begin{cases} R_{kr} = \sum\limits_{\mu+\nu=r} c_1^\mu c_2^\nu \beta_{kr}^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2)t}, \\ S_{kr} = \sum\limits_{\mu+\nu=r} c_1^\mu c_2^\nu \gamma_{kr}^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2)t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (k = 1, 2) \\ (\mu, \nu \geqq 0, \text{ ganz}), \end{matrix}$$

wo also zunächst $r = 2$ zu setzen ist, und findet dann als Integrale von (20_r)

$$(22_r) \qquad \begin{cases} q_{kr} = \sum\limits_{\mu+\nu=r} c_1^{\mu} c_2^{\nu} Q_{kr}^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t}, \\ p_{kr} = \sum\limits_{\mu+\nu=r} c_1^{\mu} c_2^{\nu} P_{kr}^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t} \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

gleichfalls für $r = 2$. Die Konstanten sind darin, wie man durch Einsetzen feststellt,

$$(24) \qquad Q_{kr}^{\mu\nu} = \frac{-\beta_{kr}^{\mu\nu}}{\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2 + \varrho_k}, \qquad P_{kr}^{\mu\nu} = \frac{-\gamma_{kr}^{\mu\nu}}{\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2 - \varrho_k}.$$

Die Integration von (20_2) ist so ausgeführt, daß die dabei wieder auftretenden partikulären Integrale (22_1) weggelassen sind. Ebenso soll bei allen folgenden Gleichungen (20_r) verfahren werden.

Die Formeln (22_r) bis (24), die bisher nur für $r = 2$ aufgestellt sind, gelten, wie wir jetzt zeigen, auch für alle $r > 2$. Nehmen wir nämlich an, (22_r) bis (24) sei bewiesen für $r = 2, 3, \ldots, n-1$, so gelangt man von (22_1) bis (22_{n-1}) auch jetzt zu der Form (23) für $r = n$, wenn man sich klarmacht, daß die R_{kn}, S_{kn} aus der rechten Seite von (18) durch Zusammenfassen aller Glieder mit λ^n hergestellt sind, wobei also nach (22_1) bis (22_{n-1}) nur e-Funktionen mit $\mu + \nu = n$ entstehen. Der Ansatz (22_n) führt dann durch Einsetzen in (20_n) wiederum auf die Konstanten (24). Jeder Schritt ist dabei durchführbar, weil unter den Einschränkungen (17) für die ϱ_l kein Nenner in (24) verschwinden kann.

Wir haben somit als Integrale von (18) die Reihen (19) mit den Gliedern (22) gefunden, die den Differentialgleichungen formal genügen. Die in § 1, Ziffer 1 benutzten ursprünglichen Koordinaten p_k, q_k ergeben sich nach (10) und (3) als lineare Kombinationen davon. Außerdem bleibt nach (2b) noch $q_3 = \int \frac{\partial H}{\partial p_3} dt$ zu berechnen. Man hat dazu $\frac{\partial H}{\partial p_3}$ $= 2H_{13}(p_1' + p_{10}) + 2H_{23}(p_2' + p_{20}) + 2H_{33}p_3$ nach Potenzen von q_k', p_k' zu entwickeln, die gewonnenen Lösungen q_k', p_k' einzutragen und alles nach Potenzen von λ zu ordnen. So entsteht eine Reihe

$$(25) \qquad \dot{q}_3 = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+\nu=n} c_1^{\mu} c_2^{\nu} \beta_{3n}^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t},$$

die gliedweise nach t zu integrieren ist.

Die durch die Reihen dargestellte Bewegung nähert sich asymptotisch einer stationären Bewegung, ohne je ganz mit ihr zusammenzufallen. Doch besteht in den Fällen 1 und 2 ein Unterschied in ihrem geometrischen Bild. Im 1. Fall, d. h. bei reellem ϱ_1 und ϱ_2, ist die Bewegung aperiodisch. Im 2. Fall findet man zunächst p_{11} und p_{21} in (22_1) konjugiert komplex, wenn man $c_1 = \bar{c}_2$ wählt. Damit folgt aber für alle r

$$q_{1r} = \bar{q}_{2r}, \qquad p_{1r} = \bar{p}_{2r},$$

weil dann wegen (13) jeweils die beiden oberen Gleichungen (20_r) zueinander konjugiert komplex werden, ebenso die beiden unteren. Die Reihen (19) setzen sich deshalb in (10) zu reellen Lösungen q_k', p_k' zusammen; die Reihenglieder sind von der Gestalt $e^{-n\varkappa t}\frac{\sin}{\cos}\nu\sigma t$. Die Bewegungen haben also jetzt den Charakter gedämpfter Schwingungen, nach deren Abklingen wiederum die stationäre Bewegung übrigbleibt.

2. Periodische Lösungen und asymptotische Lösungen zweiter Art. Formale Reihenentwicklung.

Wir setzen in dieser Ziffer die Fälle 3 und 4 von S. 64, 65 voraus und behandeln zunächst den 3. Fall. Fall 4 wird sich dabei von selbst erledigen.

Die kanonischen Gleichungen, die aus (15) abgeleitet werden, lauten

$$(26)\qquad \left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= s_1 p_1 \\ \dot{p}_1 &= -s_1 q_1 \\ \dot{q}_2 &= \varrho_2 q_2 \\ \dot{p}_2 &= -\varrho_2 p_2 \end{aligned}\right\} + \text{Glieder zweiten und höheren Grades in } p_k, q_k.$$

Für ihre Integrale machen wir wie in Ziffer 1 den Ansatz

$$(27)\qquad \left.\begin{aligned} q_k &= \lambda q_{k1} + \lambda^2 q_{k2} + \lambda^3 q_{k3} + \dots \\ p_k &= \lambda p_{k1} + \lambda^2 p_{k2} + \lambda^3 p_{k3} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (k = 1, 2).$$

Zur Berechnung der Reihenglieder muß jedoch hier eine etwas andere und kompliziertere Methode verwendet werden aus Gründen, die sich sogleich zeigen werden.

Wir führen dazu zwei Hilfsvariable

$$w_k = \alpha_k t \qquad (k = 1, 2)$$

ein, so daß

$$(28)\qquad \dot{q}_k = \alpha_1 \frac{\partial q_k}{\partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial q_k}{\partial w_2}, \quad \dot{p}_k = \alpha_1 \frac{\partial p_k}{\partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial p_k}{\partial w_2}$$

wird, und setzen

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= s_1 + \lambda^2 \alpha_{12} + \lambda^3 \alpha_{13} + \dots \\ \alpha_2 &= \varrho_2 + \lambda^2 \alpha_{22} + \lambda^3 \alpha_{23} + \dots \end{aligned}\right.$$ [6]).

---

[6]) Derartige Hilfsvariable w_k zusammen mit Reihen der Art (29) werden in der Störungstheorie vielfach verwendet. Vgl. Handbuch der Physik 5 [s. Fußnote [1])], S. 358. Sie dienen dort wie hier dazu, säkulare Glieder (vgl. unten) zu vermeiden. Die folgenden Ausführungen fußen außerdem auf J. Horn, Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **131**, S. 224. Ferner: J. Horn, Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen, ZS. f. Math. u. Phys. **48** (1903), S. 400 und **52** (1905), S. 1.

Die Reihen (27) werden mit (28) und (29) in (26) eingetragen und alles nach Potenzen von λ geordnet. Wieder zerfällt das System (26) in unendlich viele lineare Gleichungssysteme. Man erhält

$$(30_r)\quad \begin{cases} s_1\dfrac{\partial q_{1r}}{\partial w_1}+\varrho_2\dfrac{\partial q_{1r}}{\partial w_2}= s_1 p_{1r}+\left[V_{1r}-\alpha_{1,r-1}\dfrac{\partial q_{11}}{\partial w_1}-\alpha_{2,r-1}\dfrac{\partial q_{11}}{\partial w_2}\right],\\ s_1\dfrac{\partial p_{1r}}{\partial w_1}+\varrho_2\dfrac{\partial p_{1r}}{\partial w_2}=-s_1 q_{1r}+\left[W_{1r}-\alpha_{1,r-1}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial w_1}-\alpha_{2,r-1}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial w_2}\right],\\ s_1\dfrac{\partial q_{2r}}{\partial w_1}+\varrho_2\dfrac{\partial q_{2r}}{\partial w_2}= \varrho_2 q_{2r}+\left[V_{2r}-\alpha_{1,r-1}\dfrac{\partial q_{21}}{\partial w_1}-\alpha_{2,r-1}\dfrac{\partial q_{21}}{\partial w_2}\right],\\ s_1\dfrac{\partial p_{2r}}{\partial w_1}+\varrho_2\dfrac{\partial p_{2r}}{\partial w_2}=-\varrho_2 p_{2r}+\left[W_{2r}-\alpha_{1,r-1}\dfrac{\partial p_{21}}{\partial w_1}-\alpha_{2,r-1}\dfrac{\partial p_{21}}{\partial w_2}\right]. \end{cases}$$

Die V_{kr}, W_{kr} sind darin wie in Ziffer 1 die R_{kr} und S_{kr} Polynome von Integralen der früheren Gleichungen (30_{r-1}), $(30_{r-2})\ldots$ [von der Art (21)]; außerdem enthalten sie hier wegen (28) und (29) die Ableitungen dieser Integrale. Für $r=1$ fallen die eckigen Klammern weg.

Wir lösen (30_r) sukzessive für $r=1, 2, \ldots$ und lassen als Integrale von (30_1) wiederum nur solche Funktionen zu, die mit der Zeit nicht unbegrenzt zunehmen, also

$$(31_1)\quad \begin{cases} q_{11}=c_1\sin(w_1+\varepsilon), & q_{21}=0,\\ p_{11}=c_1\cos(w_1+\varepsilon), & p_{21}=c_2 e^{-w_2}. \end{cases}$$

c_1, c_2 und ε sind dabei Integrationskonstante. Dann bildet man zunächst für $r=2$ die Funktionen V_{kr}, W_{kr} in der Form

$$(32)\quad \begin{cases} V_{kr}=\sum\limits_{\mu+\nu\leqq r} c_1^{r-\nu}c_2^{\nu}\left(\beta_{kr}^{\mu\nu}\cos\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}+\mathfrak{b}_{kr}^{\mu\nu}\sin\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}\right),\\ W_{kr}=\sum\limits_{\mu+\nu\leqq r} c_1^{r-\nu}c_2^{\nu}\left(\gamma_{kr}^{\mu\nu}\sin\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}+\mathfrak{g}_{kr}^{\mu\nu}\cos\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}\right),\\ (\mu,\nu\geqq 0,\ \text{ganz};\ k=1,2). \end{cases}$$

Für die Integrale von (30_r) machen wir deshalb den Ansatz

$$(31_r)\quad \begin{cases} q_{kr}=\sum\limits_{\mu+\nu\leqq r} c_1^{r-\nu}c_2^{\nu}\left(Q_{kr}^{\mu\nu}\cos\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}+\mathfrak{Q}_{kr}^{\mu\nu}\sin\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}\right),\\ p_{kr}=\sum\limits_{\mu+\nu\leqq r} c_1^{r-\nu}c_2^{\nu}\left(P_{kr}^{\mu\nu}\sin\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}+\mathfrak{P}_{kr}^{\mu\nu}\cos\mu(w_1+\varepsilon)e^{-\nu w_2}\right),\\ (\mu,\nu\geqq 0,\quad \text{ganz};\quad k=1,2) \end{cases}$$

und führen ihn in (30_r) ein. Das liefert eine Reihe von linearen Gleichungen für die Konstanten; beispielsweise folgen $Q_{1r}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{Q}_{1r}^{\mu\nu}$, $P_{1r}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{P}_{1r}^{\mu\nu}$ für jedes Ziffernpaar μ, ν mit Ausnahme von $\mu=1$, $\nu=0$ (s. unten) aus dem Gleichungssystem

$$(33)\quad \begin{cases} s_1\mathfrak{Q}_{1r}^{\mu\nu}-\nu\varrho_2 P_{1r}^{\mu\nu}-\mu s_1\mathfrak{P}_{1r}^{\mu\nu}=\gamma_{1r}^{\mu\nu},\\ s_1 Q_{1r}^{\mu\nu}+\mu s_1 P_{1r}^{\mu\nu}-\nu\varrho_2\mathfrak{P}_{1r}^{\mu\nu}=\mathfrak{g}_{1r}^{\mu\nu},\\ -\nu\varrho_2 Q_{1r}^{\mu\nu}+\mu s_1\mathfrak{Q}_{1r}^{\mu\nu}-s_1\mathfrak{P}_{1r}^{\mu\nu}=\beta_{1r}^{\mu\nu},\\ -\mu s_1 Q_{1r}^{\mu\nu}-\nu\varrho_2\mathfrak{Q}_{1r}^{\mu\nu}-s_1 P_{1r}^{\mu\nu}=\mathfrak{b}_{1r}^{\mu\nu} \end{cases}$$

mit der Determinante

$$\Delta = \nu^2 \varrho_2^2 [\nu^2 \varrho_2^2 + 2 s_1^2 (\mu^2 + 1)] + s_1^4 (\mu^2 - 1)^2. \tag{34}$$

Die Gleichungen der übrigen Konstanten mit ihren Determinanten sind einfacher und sollen nicht angeschrieben werden.

Die Formeln (31_r) bis (34) sind nun für $r = 2$ aufgestellt. Die Ziffernfolgen $\mu, \nu = 1, 0$ und $0, 1$ kommen darin für $r = 2$ nicht vor. Deshalb verschwinden die Determinanten der eben angeführten Gleichungen [z. B. (34)] nicht, und die Berechnung von q_{k2} und p_{k2} läßt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Sie werden dabei wie angegeben homogene Polynome der Integrationskonstanten c_1 und c_2 vom Grade $r = 2$.

Geht man jetzt an die Rechnung für $r = 3$ heran und bildet die Funktionen V_{k3}, W_{k3}, so treten darin, wie etwa der ähnlich gebaute Ausdruck R_{13} [Gleichung (21_3)] zeigt, die Anfangsglieder (31_1) in Produkten zu drei Faktoren und damit nach bekannten trigonometrischen Formeln wieder isoliert auf. Solche „kritische Glieder" müssen wir auch in den Ansatz (31_3) für die Integrale von (30_3) einführen. Während nun für die Konstanten der übrigen Terme wieder die Gleichungen (33) usf. mit nicht verschwindenden Determinanten auftreten, werden diese Determinanten für die kritischen Glieder Null, so daß sich deren Konstante nur für ganz bestimmte Werte der α_{k2} bestimmen lassen. Für andere Werte wäre der Ansatz (31_3) nicht zureichend, denn es würden säkulare Glieder auftreten, die w_1 und w_2 außerhalb der sin, cos und e-Funktionen enthalten.

Wir wollen jedoch die Überlegung statt für $r = 3$ sogleich für den allgemeinen Fall durchführen. Es seien also q_{kr}, p_{kr} für $r = 2, 3, \ldots, n-1$ in der Form (31_r) berechnet. Ferner sei α_{kr} bestimmt für $r = 2, 3, \ldots, n-2$, und zwar, wie wir vorausnehmen wollen, in der Gestalt $\alpha_{kr} = A_{kr} c_1^r$, wo A_{kr} nicht von c_2 abhängt. Offenbar sind diese Voraussetzungen für den Fall $n = 3$, der bis jetzt erledigt wurde, alle erfüllt, wenn man $A_{k1} = 0$ annimmt. Wir zeigen, daß man q_{kn}, p_{kn} und $\alpha_{k,n-1}$ in derselben Form berechnen kann.

Zunächst folgt aus der Entstehung von V_{kr}, W_{kr}, daß (31_{n-1}) wieder die Form (32) für V_{kn}, W_{kn} ergibt. Alsdann führt aber der Ansatz (31_n) wie oben für $\mu + \nu \neq 1$ auf (33) und die übrigen Gleichungen, die ohne Schwierigkeit lösbar sind. Für $\mu, \nu = 0, 1$ und $1, 0$ dagegen kommen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} s_1 c_1^n (\mathfrak{Q}_{1n}^{10} - \mathfrak{P}_{1n}^{10}) &= c_1^n \beta_{1n}^{10} - \alpha_{1,n-1} c_1 \\ s_1 c_1^n (\mathfrak{Q}_{1n}^{10} - \mathfrak{P}_{1n}^{10}) &= c_1^n \gamma_{1n}^{10} + \alpha_{1,n-1} c_1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} -s_1 (Q_{1n}^{10} + P_{1n}^{10}) &= \mathfrak{b}_{1n}^{10} \\ s_1 (Q_{1n}^{10} + P_{1n}^{10}) &= \mathfrak{g}_{1n}^{10} \end{aligned}\right\}, \tag{35}$$

$$c_1^{n-1} c_2 \mathfrak{g}_{2n}^{01} + \alpha_{2,n-1} c_2 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir

$$\alpha_{2,n-1} = -c_1^{n-1} \mathfrak{g}_{2n}^{01}. \tag{36a}$$

Das erste System (35) ist nur lösbar, wenn die zwei rechten Seiten gleich sind. Diese Bedingung ist erfüllt für

$$\alpha_{1,\,n-1} = \tfrac{1}{2}\, c_1^{n-1}(\beta_{1\,n}^{1\,0} - \gamma_{1\,n}^{1\,0}). \tag{36b}$$

Außerdem stellt das zweite Sytem (35) die Bedingung

$$\mathfrak{g}_{1\,n}^{1\,0} = -\,\mathfrak{b}_{1\,n}^{1\,0}. \tag{36c}$$

Unter der Voraussetzung, daß (36c) *gilt*, haben wir also $\alpha_{k,\,n-1}$ in der oben angegebenen Form berechnet. Man kann dann aus (35) die Konstanten der kritischen Glieder bekommen und damit q_{kn} und p_{kn} die verlangte Gestalt geben.

Die Geltung von (36c) für alle $n > 2$ ist also eine Bedingung für die Durchführbarkeit der formalen Reihenentwicklung. Sie läßt sich aus dem Gang der Rechnung in keiner Weise ersehen, sondern muß indirekt aus einem Existenzsatz von Horn (S. 74) gefolgert werden. Um den Gang der Darstellung nicht zu stören, nehmen wir (36c) zunächst als erfüllt an.

Jedoch müssen wir, um die Anwendbarkeit jenes Satzes zu sichern, an die Berechnung der q_{kr}, p_{kr} noch eine Forderung stellen. In jeder Lösung (31_r) von (30_r) sind wieder Integrale der homogenen Gleichungen (30_1)

$$q_{1r} = k_1 \sin(\omega_1 + \varepsilon) + k_2 \cos(w_1 + \varepsilon), \qquad q_{2r} = 0,$$
$$p_{1r} = k_1 \cos(w_1 + \varepsilon) - k_2 \sin(w_1 + \varepsilon), \qquad p_{2r} = k_3\, e^{-w_2}$$

mit drei Integrationskonstanten k_1, k_2, k_3 enthalten. k_1 und k_2 sind nun so zu bestimmen, daß der rein trigonometrische Teil von q_{1r}, p_{1r} $(r > 1)$ für $t = 0$ verschwindet [vgl. S. 74, Gleichung (42)], d. h. aus

$$\begin{cases} k_1 \sin\varepsilon + k_2 \cos\varepsilon + \sum_{\mu=0}^{r} c_1^r (Q_{1r}^{\mu 0} \cos\mu\varepsilon + \mathfrak{Q}_{1r}^{\mu 0} \sin\mu\varepsilon) = 0, \\ k_1 \cos\varepsilon - k_2 \sin\varepsilon + \sum_{\mu=0}^{r} c_1^r (P_{1r}^{\mu 0} \sin\mu\varepsilon + \mathfrak{P}_{1r}^{\mu 0} \cos\mu\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{37}$$

k_3 setzen wir Null. Die oben angegebene Form von q_{kr}, p_{kr} ändert sich dadurch nicht; es wird nur eine Abhängigkeit der Konstanten $Q, \mathfrak{Q}, P, \mathfrak{P}$ und α_{kr} von ε eingeführt, und zwar werden diese Größen im Verlauf der Rechnung ganze rationale Funktionen von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$.

Wir haben jetzt als Integrale von (26) die Reihen (27) mit den Gliedern (31) gefunden. Durch die lineare Transformation, die sich aus (14), (10) und (3) zusammensetzt, ergeben sich daraus die Lösungen der ursprünglichen Gleichungen (2a). Dazu kommt noch aus (2b) eine Reihe für q_3; man findet genau so, wie in Ziffer 1 die Reihe (25), für $\dot{q}_3$ einen Ausdruck

$$\dot{q}_3 = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+\nu \leqq n} c_1^{n-\nu} c_2^{\nu} (\beta_{3\,n}^{\mu\nu} \cos\mu(w_1 + \varepsilon)\, e^{-\nu w_2} + \mathfrak{b}_{3\,n}^{\mu\nu} \sin\mu(w_1 + \varepsilon)\, e^{-\nu w_2}), \tag{38}$$
$$(\mu, \nu \geqq 0, \text{ ganz})$$

der gliedweise nach t zu integrieren ist. Die dabei entstehenden Faktoren $\frac{1}{\mu^2 \alpha_1^2 + \nu^2 \alpha_2^2}$ können in Potenzreihen von λ entwickelt werden. Beachtenswert ist, daß in (38) auch unter dem Summenzeichen zeitunabhängige Glieder stehen, die sich bei der Integration mit t multiplizieren.

In diesen Reihen sind zwei Arten von Bewegungen enthalten:

a) Setzt man $c_2 = 0$, so treten keine e-Funktionen auf, sondern man erhält reine sin-cos-Reihen. Die Bewegung besteht aus periodischen Schwingungen von der Frequenz α_1 um eine stationäre Bewegung. Wir bezeichnen diese Lösung im folgenden mit $\tilde{q}_k$, $\tilde{p}_k$, setzen also

$$(39) \qquad \begin{cases} \tilde{q}_k = \lambda \tilde{q}_{k1} + \lambda^2 \tilde{q}_{k2} + \lambda^3 \tilde{q}_{k3} + \dots \\ \tilde{p}_k = \lambda \tilde{p}_{k1} + \lambda^2 \tilde{p}_{k2} + \lambda^3 \tilde{p}_{k3} + \dots \end{cases}$$

mit

$$\tilde{q}_{11} = q_{11} = c_1 \sin(w_1 + \varepsilon), \quad \tilde{p}_{11} = p_{11} = c_1 \cos(w_1 + \varepsilon), \quad \tilde{q}_{21} = \tilde{p}_{21} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_{kr} &= \sum_{\mu=0}^{r} c_1^r \left(Q_{kr}^{\mu 0} \cos \mu (w_1 + \varepsilon) + \mathfrak{Q}_{kr}^{\mu 0} \sin \mu (w_1 + \varepsilon)\right) \\ \tilde{p}_{kr} &= \sum_{\mu=0}^{r} c_1^r \left(P_{kr}^{\mu 0} \sin \mu (w_1 + \varepsilon) + \mathfrak{P}_{kr}^{\mu 0} \cos \mu (w_1 + \varepsilon)\right) \end{aligned}\right\} (k = 1, 2).$$

b) Für $c_2 \neq 0$ überlagern sich dieser periodischen Bewegung gedämpfte Schwingungen. Die Gesamtbewegung nähert sich daher asymptotisch an die periodischen Schwingungen a) an, ohne je ganz mit ihnen zusammenzufallen. Sie heißt deshalb asymptotische Bewegung zweiter Art.

Außerdem kann man aus (26) für $c_1 = 0$ wie in Ziffer 1 eine asymptotische Lösung erster Art des 1. Falles ableiten, nämlich eine Potenzreihe von $c_2 e^{-\varrho_2 t}$.

Im 4. Fall wird aus der Hamiltonfunktion (16) auf ganz entsprechendem Weg wie oben eine Schar periodischer Lösungen gefunden. Doch treten hier keine reellen e-Funktionen und deshalb keine asymptotischen Lösungen auf, sondern aus dem rein imaginären ϱ_2 folgt eine zweite Schar periodischer Lösungen, die wie oben aufgesucht werden können.

3. Über die Konvergenz der Reihen.

Als Abschluß der allgemeinen Entwicklungen weisen wir nun noch kurz auf die Reihenkonvergenz hin, soweit sie aus der einschlägigen Literatur direkt zu entnehmen ist.

a) *Die asymptotischen Lösungen erster Art* finden sich bei Picard[7]). Die von ihm behandelten Differentialgleichungen (a. a. O. S. 185, Gl. (21)) enthalten als Spezialfall unsere Gleichungen (18), und man kann für deren Integrale (19), (22) direkt den Picardschen Konvergenzbeweis in Anspruch

[7]) Fußnote [5]).

nehmen, wenn man beachtet, daß sich die Picardschen Voraussetzungen 1^0, 2^0, 3^0 (a. a. O. S. 18) bei unserer Bezeichnung zu den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}(\mu \pm 1)\varrho_1 + \nu\varrho_2 &\neq 0\\ \mu\varrho_1 + (\nu \pm 1)\varrho_2 &\neq 0\end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned}&(\mu, \nu \geqq 0, \text{ ganz},\\ &\mu + \nu \geqq 2)\end{aligned}$$

zusammenfassen lassen. Die Geltung dieser Ungleichungen ist aber durch das Verbot der Gleichungen (17) gesichert. Die Reihen (19) konvergieren demnach bei genügend kleinem $|\lambda|$ für alle $t \geqq 0$.

Eine kurze besondere Überlegung braucht noch die Reihe für q_3, die aus (25) durch gliedweise Integration nach t gewonnen werden soll; denn dies ist bekanntlich nur dann gestattet, wenn (25) gleichmäßig in t konvergiert.

Es ist $\frac{\partial H}{\partial p_3}$ eine konvergente Potenzreihe von q_k', p_k' (S. 62), diese wiederum sind nach dem Obigen Potenzreihen von

$$z_1 = \lambda c_1 e^{-\varrho_1 t}, \qquad z_2 = \lambda c_2 e^{-\varrho_2 t},$$

welche für $|z_1| \leqq |\lambda c_1|$, $|z_2| \leqq |\lambda c_2|$ konvergieren, also konvergiert auch die Reihe (25) als Potenzreihe von z_1, z_2 betrachtet für $|z_1| \leqq |\lambda c_1|$, $|z_2| \leqq |\lambda c_2|$ mit genügend kleinem $|\lambda|$. Eine Potenzreihe konvergiert aber absolut im Innern ihres Konvergenzbereiches. Somit konvergiert mit (25) auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n| \sum_{\mu+\nu=n} |c_1^\mu| \cdot |c_2^\nu| \cdot |\beta_{3n}^{\mu\nu}|$$

für genügend kleines $|\lambda|$. Sie stellt eine Majorante für (25) dar, womit die gleichmäßige Konvergenz von (25) nach dem Weierstraßschen Kriterium erwiesen ist. Die gliedweise Integration von (25) führt also auf eine konvergente Reihe für q_3.

Die seither verwendete Picardsche Darstellung der asymptotischen Lösungen erster Art gilt nicht, falls die Beziehungen (17) erfüllt sind. Es ist dann nicht einmal sicher, ob man durch die kanonische Transformation (10) die Gleichungen (18) erhalten kann. Trotzdem existieren auch in diesem Fall Integrale der jetzt aus (4) abzuleitenden kanonischen Gleichungen, welche sich für $t \to \infty$ asymptotisch der Null nähern und welche eine oder zwei willkürliche Konstante enthalten, je nachdem eine oder zwei der (notwendig reellen) Wurzeln ϱ_k von Null verschieden sind. Das besagt ein Satz nebst zugehörigem Beweis von Perron[8]); denn die

[8]) O. Perron, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Zeitschr. 29. (1929), Satz 10, S. 147 ff. Ich verdanke diese wichtige Ergänzung einer freundlichen Mitteilung von Herrn Professor Perron.

Funktionen φ_ν dieses Satzes sind in unserem Fall Potenzreihen, die mit Gliedern zweiten Grades beginnen, erfüllen also die Perronschen Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ (a. a. O., S. 131 ff) und damit die Voraussetzungen des Satzes.

Allerdings liefert der Perronsche Satz keine explizite Darstellung der Lösungen; zum Zweck der rechnerischen Erfassung müssen deshalb weiterhin die Beziehungen (17) ausgeschlossen und die Picardschen Reihen verwendet werden. Doch weiß man wenigstens, daß die Lösungen auch im Falle der Geltung von (17) nicht prinzipiell anders ausfallen, wenn sie sich auch der Rechnung entziehen.

b) *Die periodischen Lösungen* (39) stimmen mit den von Horn[9]) aufgestellten periodischen Lösungen eines Differentialgleichungssystems überein.

Um dies einzusehen, formulieren wir die Hornschen Ergebnisse in folgendem

Satz[10]): *Das Differentialgleichungssystem*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= s_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -s_1 x_1 \\ \frac{dx_k}{dt} &= a_{k3} x_3 + a_{k4} x_4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &+ \textit{Glieder zweiten und höheren} \\ &\textit{Grades in } x_1, \ldots, x_4 \\ &(k = 3, 4;\ a_{ki} \textit{ Konstante}) \end{aligned}$$

habe ein Integral $\Phi(x_1, \ldots, x_4) = \text{const}$, *wo* Φ *nach* $x_1, \ldots, x_4$ *entwickelbar ist, beginnend mit Gliedern zweiten Grades, unter denen* x_1^2 *nicht fehlt. Die charakteristische Gleichung des Systems habe neben den Wurzeln* $\pm i s_1$ *keine Wurzel* $\pm i m s_1$ *mit ganzzahligem* $m \gtrless 0$. *Dann besitzt das System eine periodische reguläre Lösung der Form*

$$x_l = x_{l1} + x_{l2} + \ldots \qquad (l = 1, \ldots, 4), \tag{40}$$

wo

$$x_{11} = c' \cos \alpha_1 t + c'' \sin \alpha_1 t, \qquad x_{21} = -c' \sin \alpha_1 t + c'' \cos \alpha_1 t, \tag{41}$$

$$x_{k1} = 0 \quad \textit{für} \quad k = 3, 4$$

und x_{lr} *ein homogenes Polynom r-ten Grades von* c', c'' *und eine lineare Funktion von* $\sin \mu \alpha_1 t$, $\cos \mu \alpha_1 t$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r)$ *ist. Ferner ist* $\alpha_1 = s_1 + \mathfrak{P}(c', c'')$ *und* $\mathfrak{P}$ *eine mit Gliedern zweiter Ordnung beginnende Potenzreihe von* c', c''. *Die Lösung erfüllt die Anfangsbedingungen*

$$x_1(0) = c', \quad x_2(0) = c'', \quad x_3(0) = \mathfrak{P}_3(c', c''), \quad x_4(0) = \mathfrak{P}_4(c', c''). \tag{42}$$

Sämtliche Reihen konvergieren, falls $|c'|$ *und* $|c''|$ *klein genug gewählt werden, für alle* t.

---

[9]) J. Horn, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 48 und 52. Zit. in Fußnote [6]).

[10]) Der Satz ist in einer für unsere Zwecke passenden Form unter teilweiser Abänderung der Hornschen Bezeichnungen zusammengestellt aus Bd. 48, S. 418, 419 und Bd. 52, S. 22, 23. Horn benutzt statt t die unabhängige Variable $s_1 t$.

Wir stellen fest, daß die Voraussetzungen des Satzes für die Gleichungen (26) sowie für die kanonischen Gleichungen, die aus (16) abgeleitet werden, erfüllt sind. Die Gleichungen sind von der Art des in dem Satz betrachteten Systems; ferner stellt das Energieintegral $H = \text{const}$ das verlangte Integral $\Phi = \text{const}$ dar, wie man aus (15) und (16) direkt sieht, und endlich sind mit (17) die Wurzeln $\pm i m s_1$ der charakteristischen Gleichung ausgeschlossen[11]).

Es steht also fest, daß unsere kanonischen Gleichungen im 3. und 4. Fall periodische Lösungen (40) besitzen. Diese Lösungen lassen sich zweifellos nach der Methode von Ziff. 2 dieses Paragraphen gliedweise als Potenzreihen von λ berechnen, wenn man zwecks besserer Übersicht $\lambda c'$ und $\lambda c''$ statt c' und c'' schreibt[12]). Dabei ist es ein rein äußerlicher Unterschied, ob man die Anfangsglieder in der Form (41) oder (31_1) verwendet, d. h. ob man c' und c'' oder $c_1 \sin\varepsilon$ und $c_1 \cos\varepsilon$ als Integrationskonstante benutzt. Man löst in jeder Schreibweise nacheinander dieselben Differentialgleichungen mit denselben Anfangsbedingungen (37) bzw. (42). Die Schreibweise (31_1) ist aber für die numerische Rechnung bequemer (§ 4).

Die Möglichkeit der Berechnung der periodischen Lösungen (39) ($c_2 = 0$) ist damit zugleich mit ihrer Konvergenz für genügend kleine $|c_1|$ und $|c_2|$ erwiesen. Insbesondere findet man also notwendig die Bedingung (36c) für $c_2 = 0$ und alle $n \geqq 2$ von selbst erfüllt. Da aber g_{1n}^{10} und b_{1n}^{10} garnicht von c_2 abhängen, so bleibt die Gleichung (36c) auch für $c_2 \neq 0$ bestehen, und damit steht auch der formalen Entwicklung der asymptotischen Lösungen zweiter Art ($c_2 \neq 0$) nichts im Wege, deren Möglichkeit ja (S. 71) von der Geltung von (36c) abhing.

Zu den periodischen Lösungen haben wir noch zu bemerken, daß sich die Konvergenz der aus (38) für $c_2 = 0$ gewonnenen trigonometrischen Reihe für q_3 aus einer ähnlichen Überlegung ergibt, wie sie schon auf S. 73 für (25) angestellt wurde. Führt man nämlich für den Augenblick die komplexe Schreibweise ein und betrachtet (38) für $c_2 = 0$ als absolut konvergente Potenzreihe von $e^{i(w_1+\varepsilon)}$, $e^{-i(w_1+\varepsilon)}$ und λc_1, so findet man die Majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda c_1|^n \sum_{\mu=0}^{n} \sqrt{(\beta_n^{\mu 0})^2 + (b_{3n}^{\mu 0})^2},$$

welche nach dem Weierstraßschen Kriterium die gleichmäßige Konvergenz von (38) für $c_2 = 0$ verbürgt. Die gliedweise Integration darf also vorgenommen werden.

[11]) Ein Satz, der entsprechend dem Satz von Perron [Fußnote [8])] bei Geltung von (17) die Existenz der periodischen Lösungen sichern würde, scheint bei imaginären ϱ_k nicht bekannt zu sein.

[12]) Diese Berechnung ist mit etwas anderen Anfangsbedingungen und ohne Verwendung unseres Parameters λ von Horn durchgeführt: a. a. O. 48, S. 415 ff.

c) *Die asymptotischen Lösungen zweiter Art* sind als formal berechenbar nachgewiesen. Ein Konvergenzbeweis für sie findet sich aber nicht direkt in der Literatur, sondern erfordert längere Ausführungen. Die Konvergenzfrage soll daher hier offen und einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Es ist ja bekannt, daß man in den Anwendungen der Mechanik vielfach mit Reihen arbeitet, deren Konvergenzverhalten unbekannt ist, und daß man unter Umständen sogar divergente Reihen verwerten kann.

II. Abschnitt.

Kreiselbewegungen.

§ 3.

Die kanonischen Gleichungen des Kreisels.

Im II. Abschnitt handelt es sich darum, die allgemeinen Entwicklungen des I. Abschnitts auf das Kreiselproblem anzuwenden. Zu dem Zweck soll es in diesem Paragraphen in der verlangten kanonischen Form dargestellt werden.

1. Berechnung von H.

Als Koordinaten q_k für die Lage des Körpers im Raum verwenden wir die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ (Fig. 1). Sie legen die Lage des körperfesten Achsenkreuzes (x_1, y_1, z_1) der Hauptträgheitsachsen im Aufhängepunkt O gegen ein raumfestes System (x_2, y_2, z_2) mit lotrechter z_2-Achse fest. Die Variabeln p_k sind dann, wie sich sogleich zeigen wird, die Komponenten des Drehimpulsvektors, und zwar p_1 die Komponente p_ϑ in der Knotenlinie, p_2 die Komponente p_φ in der z_1-Achse und p_3 die Komponente p_ψ in der lotrechten z_2-Achse. Wir legen deshalb bei jeder Bezugnahme auf den I. Abschnitt die Zuordnungen

$$q_1 = \vartheta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi,$$
$$p_1 = p_\vartheta, \quad p_2 = p_\varphi, \quad p_3 = p_\psi$$

zugrunde.

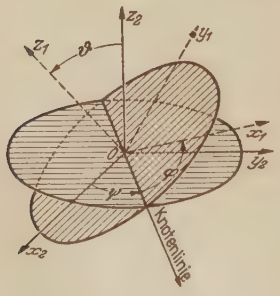


Fig. 1. Eulersche Winkel.

Im körperfesten System hat die Lotlinie die Richtungscos[13])

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \sin\vartheta \sin\varphi, \\ y = \sin\vartheta \cos\varphi, \\ z = \cos\vartheta \end{cases}$$

[13]) Vgl. z. B. F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 19.

und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit die Komponenten[14])

$$(44)\qquad \begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ q = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ r = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit A, B, C die Hauptträgheitsmomente für den Stützpunkt O, mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts im körperfesten System, multipliziert mit dem Gewicht des Körpers, so ist die potentielle Energie

$$(45)\qquad U = \xi\sin\vartheta\sin\varphi + \eta\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\cos\vartheta$$

und die kinetische Energie

$$(46)\qquad T = \tfrac{1}{2}[A p^2 + B q^2 + C r^2],$$

wo noch (44) einzutragen ist. Daraus berechnen wir die Hamiltonfunktion des Kreisels. Es ist

$$(47)\qquad \begin{cases} p_\vartheta = \dfrac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}} = A p\cos\varphi - B q\sin\varphi, \\ p_\varphi = \dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = C r, \\ p_\psi = \dfrac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = A p\sin\vartheta\sin\varphi + B q\sin\vartheta\cos\varphi + C r\cos\vartheta, \end{cases}$$

worin man leicht die auf S. 76 bezeichneten Impulskomponenten erkennt. Auflösung von (47) nach p, q, r und Einsetzen dieser Größen in (46) liefert nach einigen Zwischenrechnungen die Hamiltonfunktion

$$(48)\qquad \begin{aligned} H &= T + U \\ &= H_{11}p_\vartheta^2 + 2H_{12}p_\vartheta p_\varphi + H_{22}p_\varphi^2 + 2H_{13}p_\vartheta p_\psi + 2H_{23}p_\varphi p_\psi \\ &\qquad + H_{33}p_\psi^2 + U \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$(49)\qquad \begin{cases} H_{11} = \dfrac{1}{2A}\cos^2\varphi + \dfrac{1}{2B}\sin^2\varphi, \\ H_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A}\right)\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \\ H_{22} = \dfrac{1}{2A}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \dfrac{1}{2B}\cdot\dfrac{\cos^2\varphi\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \dfrac{1}{2C}, \\ H_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\vartheta}, \\ H_{23} = -\dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left(\dfrac{1}{2A}\sin^2\varphi + \dfrac{1}{2B}\cos^2\varphi\right), \\ H_{33} = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\dfrac{1}{2A}\sin^2\varphi + \dfrac{1}{2B}\cos^2\varphi\right). \end{cases}$$

[14]) Klein—Sommerfeld, a. a. O. S. 45.

Das Problem hat damit die Form (1). ψ ist die zyklische Koordinate und $p_\psi = \text{const}$ das Flächenintegral, das aussagt, daß die Vertikalkomponente des Drehimpulsvektors konstant bleibt.

Nach § 1, Ziffer 1 hat man, um zu der Form (4) zu gelangen, H nach $\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0, \ldots, p'_\varphi = p_\varphi - p_{\varphi 0}$ zu entwickeln. Wir verschieben die Bestimmung der Konstanten ϑ_0, φ_0, $p_{\vartheta 0}$, $p_{\varphi 0}$ auf Ziffer 2 und lassen sogleich die Entwicklungen von H_{kl} und U folgen. Mit den Abkürzungen

$$a = \sin\vartheta_0, \qquad c = \sin\varphi_0,$$
$$b = \cos\vartheta_0, \qquad d = \cos\varphi_0$$

findet man unter der Voraussetzung $\vartheta_0 \neq 0$, $k\pi$ bis zu den Gliedern 3. Grades

(50)
$$\left\{\begin{aligned}
H_{11} &= \frac{d^2}{2A} + \frac{c^2}{2B} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) cd\,\varphi' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(c^2 - d^2)\,\varphi'^2 \\
&\qquad + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) cd\,\varphi'^3 + \cdots \\
H_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\Big[\frac{bcd}{a} - \frac{cd}{a^2}\vartheta' + \frac{b}{a}(d^2 - c^2)\,\varphi' + \frac{bcd}{a^3}\vartheta'^2 \\
&\quad - \frac{d^2 - c^2}{a^2}\vartheta'\varphi' - 2\frac{bcd}{a}\varphi'^2 - cd\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)\vartheta'^3 \\
&\quad + \frac{b}{a^3}(d^2 - c^2)\vartheta'^2\varphi' + 2\frac{cd}{a^2}\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3}\frac{b}{a}(c^2 - d^2)\,\varphi'^3 + \ldots\Big] \\
H_{22} &= \frac{1}{2C} + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right) - \frac{b}{a^3}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\vartheta' + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{b^2 cd}{a^2}\varphi' \\
&\quad + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(1 + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 - 2\frac{bcd}{a^3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\vartheta'\varphi' \\
&\quad + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\,\varphi'^2 - 2\frac{b}{a}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)\vartheta'^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{cd}{a^2}\left(1 + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2\varphi' - \frac{b}{a^3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\,\vartheta'\varphi'^2 \\
&\quad - \frac{2}{3}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) cd\,\varphi'^3 + \ldots. \\
H_{13} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\Big[\frac{cd}{a} - \frac{bcd}{a^2}\vartheta' + \frac{1}{a}(d^2 - c^2)\,\varphi' + \frac{cd}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 \\
&\quad - \frac{b}{a^2}(d^2 - c^2)\,\vartheta'\varphi' - 2\frac{cd}{a}\varphi'^2 - \frac{bcd}{a^2}\left(\frac{5}{6} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^3 \\
&\quad + \frac{1}{a}(d^2 - c^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2\varphi' + 2\frac{bcd}{a^2}\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3a}(c^2 - d^2)\varphi'^3 + \ldots\Big] \\
H_{23} &= -\frac{b}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta' \\
&\quad - \frac{bcd}{a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\varphi' - \frac{b}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(\frac{5}{2} + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 \\
&\quad + \frac{cd}{a}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'\varphi' - \frac{b}{2a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\,\varphi'^2 \\
&\quad + \frac{1}{2a}\left(\frac{5}{6} + \frac{14}{3}\frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}\right)\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\vartheta'^3 - \left(\frac{5}{2} + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{bcd}{a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\vartheta'^2\varphi' \\
&\quad + \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)(d^2 - c^2)\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{bcd}{a^2}\varphi'^3 + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

$$
(50)\quad
\begin{cases}
H_{33} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A}+\frac{d^2}{B}\right) - \frac{b}{a^3}\left(\frac{c^2}{A}+\frac{d^2}{B}\right)\vartheta' + \frac{cd}{a^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\varphi' \\
\quad + \frac{1}{2a^2}\left(1+3\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{c^2}{A}+\frac{d^2}{B}\right)\vartheta'^2 - 2\frac{bcd}{a^3}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\vartheta'\varphi' \\
\quad + \frac{1}{2a^2}(d^2-c^2)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\varphi'^2 - 2\frac{b}{a^3}\left(\frac{c^2}{A}+\frac{d^2}{B}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^3 \\
\quad + \frac{cd}{a^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\left(1+3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2\varphi' - \frac{b}{a^3}(d^2-c^2)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\vartheta'\varphi'^2 \\
\quad - \frac{2cd}{3a^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\varphi'^3 + \ldots. \\
U = -\frac{1}{2}(ac\xi + ad\eta + b\zeta)\vartheta'^2 + b(d\xi - c\eta)\vartheta'\varphi' - \frac{a}{2}(c\xi + d\eta)\varphi'^2 \\
\quad - \frac{1}{6}(bc\xi + bd\eta - a\zeta)\vartheta'^3 - \frac{a}{2}(d\xi - c\eta)\vartheta'^2\varphi' \\
\quad - \frac{b}{2}(c\xi + d\eta)\vartheta'\varphi'^2 - \frac{a}{6}(d\xi - c\eta)\varphi'^3 + \ldots.
\end{cases}
$$

H bekommt ferner nach (3) und (1) die Gestalt

$$
(51)\quad
\begin{aligned}
H = {} & H_{11}p_\vartheta'^2 + 2H_{12}p_\vartheta' p_\varphi' + H_{22}p_\varphi'^2 \\
& + 2p_\vartheta'(H_{11}p_{\vartheta 0} + H_{12}p_{\varphi 0} + H_{13}p_\psi) \\
& + 2p_\varphi'(H_{12}p_{\vartheta 0} + H_{22}p_{\varphi 0} + H_{23}p_\psi) \\
& + H_{11}p_{\vartheta 0}^2 + 2H_{12}p_{\vartheta 0}p_{\varphi 0} + H_{22}p_{\varphi 0}^2 + 2H_{13}p_{\vartheta 0}p_\psi \\
& \qquad + 2H_{23}p_{\varphi 0}p_\psi + H_{33}p_\psi^2 + U.
\end{aligned}
$$

Durch (50) und (51) sind die Koeffizienten der Entwicklung (4) unmittelbar gegeben.

2. Die stationären Bewegungen.

Die stationären Bewegungen des allgemeinen Kreisels sind nach § 1, Ziffer 1 durch konstante Werte ϑ_0, φ_0, $p_{\vartheta 0}$, $p_{\varphi 0}$ und durch $\psi_0 = \omega t + c'$ charakterisiert. Fig. 1 lehrt, daß dann der Körper eine permanente Drehung um die Lotlinie ausführt, wobei also der Vektor der Winkelgeschwindigkeit im Raum und im Körper nach Größe und Richtung konstant bleibt. Diese Drehungen sind schon längst von Staude[15]) entdeckt und schon vielfach nach ihren dynamischen Eigenschaften untersucht worden. Doch dürfte es nicht überflüssig sein, in Kürze den Weg anzugeben, auf dem man die Drehungen aus den kanonischen Gleichungen auffinden kann.

Die Gleichungen der stationären Bewegungen lauten

$$
(52)\qquad \left(\frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)_0 = 0
$$

---

[15]) O. Staude, Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, Journ. f. reine u. angew. Math. 113 (1894), S. 318.

und sind durch Ableitung von (48) zu bilden. Der Index 0 bedeutet, daß es sich um die Koordinaten einer stationären Bewegung handelt. Es wäre aussichtslos, (52) nach ϑ_0, φ_0, $p_{\vartheta 0}$, $p_{\varphi 0}$ explizit auflösen zu wollen; man kann aber folgendermaßen zum Ziel kommen: man setze überall in (52) für die Impulse die Werte (47) und führe dann die Größen (43) ein, letzteres nötigenfalls durch Erweitern mit $\sin\vartheta_0$. Dadurch entstehen aus (52) gewisse Gleichungen zwischen $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen geht die erste davon über in

$$p_0 y_0 - q_0 x_0 = 0.$$

Daraus folgern wir

(53a) $$p_0 = \omega x_0, \quad q_0 = \omega y_0$$

mit dem Proportionalitätsfaktor ω. Die zweite Gleichung (52) wird

$$x_0 (p_0 z_0 - r_0 x_0) + y_0 (q_0 z_0 - r_0 y_0) = 0$$

oder mit (53a)

(53b) $$r_0 = \omega z_0.$$

Man sieht jetzt aus (53), daß ω den Betrag des lotrechten Vektors der Winkelgeschwindigkeit darstellt, was mit der leicht zu verifizierenden Beziehung $\dot{\psi}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \omega$ im Einklang steht. Die dritte Gleichung (52) geht über in

(54) $$x_0 \{(A-C) x_0 z_0 \omega^2 + \zeta x_0 - \xi z_0\} + y_0 \{(B-C) y_0 z_0 \omega^2 + \zeta y_0 - \eta z_0\} = 0$$

und die vierte in

(55a) $$(A-B) x_0 y_0 \omega^2 - \xi y_0 + \eta x_0 = 0.$$

Multiplizieren wir (54) mit x_0, (55a) mit $y_0 z_0$ bzw. (54) mit y_0, (55a) mit $x_0 z_0$ und addieren jeweils, so kommt

(55b) $$\begin{cases} (C-A) x_0 z_0 \omega^2 + \xi z_0 - \zeta x_0 = 0, \\ (B-C) y_0 z_0 \omega^2 + \zeta y_0 - \eta z_0 = 0. \end{cases}$$

Wir sind so in (55) zu den bekannten Eulerschen Kreiselgleichungen für permanente Drehungen gelangt.

Die ganze Rechnung setzt ebenso wie die Aufstellung der Entwicklungen (50) $\vartheta_0 \neq 0, k\pi$ voraus. Das bedeutet, daß die z_1-Achse nie Drehachse sein darf. Man muß also, falls eine der Hauptträgheitsachsen Drehachse werden kann (s. unten), die Achsen des $x_1 y_1 z_1$-Systems so bezeichnen, daß diese Hauptträgheitsachse nicht die z_1-Achse ist.

Die Verteilung der Drehachsen im Körper erkennt man aus der Gleichung

(56) $$(B-C) y_0 z_0 \xi + (C-A) x_0 z_0 \eta + (A-B) x_0 y_0 \zeta = 0,$$

die aus (55) durch Multiplikation mit bzw. ξ, η, ζ und Addition folgt. Sie stellt in den Variabeln x_0, y_0, z_0 einen körperfesten Kegel, den

Staudeschen Kegel, dar, auf dem jede Drehachse liegt. Auf den Drehsinn kommt es bei der Bewegung nicht an, weil in (55) nur ω^2 vorkommt. Dagegen darf jeweils nur die eine Halbachse nach oben gerichtet werden, für die ω^2 aus (55) als positiver Wert folgt. Fällt eine Drehachse in eine Hauptträgheitsachse, die den Schwerpunkt nicht trägt, so wird $\omega = \infty$. Diesen Fall schließen wir aus.

Auf die weiteren Eigenschaften der Staudeschen Drehungen können wir nicht eingehen und merken nur noch einen Sonderfall an:

Eine Drehachse heißt symmetrisch[16]), wenn sie in eine Hauptträgheitsachse fällt, auf der auch der Schwerpunkt liegt. ω bleibt dann nach (55) beliebig. Werden auch noch die zwei Hauptträgheitsmomente um die beiden anderen Achsen gleich, so handelt es sich um die aufrechte Drehung des symmetrischen schweren Kreisels.

3. Die charakteristische Gleichung.

Bestimmend für die Bewegungsform in der Nähe einer bestimmten Staudeschen Drehung sind die zu dieser Drehung gehörigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (7). Sie hat (nach Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten $g_0 > 0$) die Gestalt

$$g_0 \varrho^4 + g_1 \varrho^2 + g_2 = 0. \tag{57}$$

Um einen Überblick über die möglichen Bewegungen eines Körpers zu bekommen, sollte man die Bereiche auf dem Staudeschen Kegel angeben, die von den Achsen in den früher eingeführten Fällen 1 bis 4 ausgefüllt werden. Folgende Tabelle gibt die Bedingungen für das Eintreten der vier Fälle an:

(58)

1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
$g_1 < 0$	$g_1 \gtreqless 0$	$g_1 \gtreqless 0$	$g_1 > 0$
$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$
$k \equiv g_1^2 - 4 g_0 g_2 > 0$	$k \equiv g_1^2 - 4 g_0 g_2 < 0$	$k \equiv g_1^2 - 4 g_0 g_2 > 0$	$k \equiv g_1^2 - 4 g_0 g_2 > 0$

Die Aufgabe, damit allgemein die verschiedenen Achsenbereiche zu bestimmen, erscheint bei näherer Betrachtung als praktisch unlösbar. Doch gelingt es, im Anschluß an eine Arbeit von R. Grammel[17]) durch Umkehrung der Fragestellung eine Antwort zu geben.

---

[16]) Nach R. Grammel, Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen, Mathem. Zeitschr. 6 (1920), S. 124, § 2.

[17]) Fußnote [16]).

Dort wird auf Grund der Theorie der kleinen Schwingungen die charakteristische Gleichung der Eulerschen Kreiselgleichungen ebenfalls in der Form (57) aufgestellt. Dabei finden sich unter der Voraussetzung

$$A \neq B \neq C \neq A, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0, \quad z_0 \neq 0$$

die Koeffizienten [18])

$$(59) \qquad \begin{cases} g_0 = A\,B\,C, \\ g_1 = a_1\,\xi + b_1\,\eta + c_1\,\zeta, \\ g_2 = a_2\,\eta\,\zeta + b_2\,\zeta\,\xi + c_2\,\xi\,\eta \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = \frac{y_0^2}{x_0}\frac{B}{(A-C)}\{(B-C)^2 + A\,(3\,C - 2\,B)\} + \frac{z_0^2}{x_0}\frac{C}{(A-B)}\{(B-C)^2 + A\,(3\,B - 2\,C)\},$$

$$a_2 = \frac{x_0^2}{y_0\,z_0}\{A + 3\,y_0^2\,(A-B) + 3\,z_0^2\,(A-C)\}.$$

b_1 und c_1 bzw. b_2 und c_2 entstehen aus a_1 bzw. a_2 durch zyklische Vertauschung von x_0, y_0, z_0; A, B, C. Sonderfälle liefern andere Ausdrücke, auf die wir an gegebener Stelle hinweisen.

Man kann durch eine elementare, allerdings ziemlich mühsame Rechnung direkt nachweisen, daß (7) dieselben Koeffizienten (59) besitzt, wenn man vermittels (43), (47), (53) und (55) überall x_0, y_0, z_0 einführt. Einfacher schließt man es indirekt: Es ist leicht durch Beispiele zu belegen, daß es überhaupt Wurzeln von (7) gibt, die nicht die ausgeschlossenen Beziehungen (17) erfüllen (vgl. S. 96, Zahlentafel 1); wir besitzen damit also nach Abschnitt I exakte Lösungen der kanonischen Gleichungen. Aus einer solchen läßt sich nach (43), (47) auch eine exakte Lösung der Eulerschen Gleichungen in Form unendlicher Reihen bilden; deren Glieder 1. Grades erfüllen also die Variationsgleichungen der Eulerschen Gleichungen samt ihrer charakteristischen Gleichung (57), (59). Da man aber den Schluß für alle Lösungen in der Nachbarschaft der einen wiederholen kann, müssen die Koeffizienten der zwei charakteristischen Gleichungen als Funktionen von A, B, C, ξ, η, ζ, x_0, y_0, z_0 übereinstimmen.

Die Wendung, die Grammel dem Problem gibt, besteht nun darin, daß er in der Gleichung (56) des Staudeschen Kegels nicht mehr x_0, y_0, z_0, sondern ξ, η, ζ als laufende Koordinaten auffaßt, somit statt eines einzigen eine ganze Schar von Körpern betrachtet. (56) stellt dann nicht mehr einen Kegel, sondern eine die lotrechte Drehachse enthaltende Nullpunktsebene dar, auf der der Schwerpunkt wandern kann und auf der wir die verschiedenen Bereiche der Schwerpunktslagen aufzusuchen haben, die nach (58) zu den Fällen 1 bis 4 führen.

---

[18]) R. Grammel, a. a. O. Gl. (18) bis (20).

Wir stellen zu dem Zweck fest, daß die Gleichung $g_1 = 0$ nach (59) ebenfalls eine Ebene durch den Nullpunkt darstellt, ferner $g_2 = 0$ und $k \equiv g_1^2 - 4\, g_0 g_2 = 0$ zwei Nullpunktskegel 2. Ordnung, von denen der letztere den ersteren längs dessen reellen oder imaginären Schnittgeraden mit der Ebene $g_1 = 0$ berührt. Die konvexe Seite der Kegel wird als Außenraum, die konkave als Innenraum bezeichnet. Unsere Aufgabe ist, die Geraden aufzusuchen, nach denen die Schwerpunktsebene (56) von diesen drei Gebilden geschnitten wird, in den Zwischenfeldern festzustellen, ob hier g_1, g_2 und k positiv oder negativ ausfallen und danach die Einteilung der Felder in die Bereiche der Fälle 1 bis 4 vorzunehmen.

Die angeführte Arbeit erlaubt die Lösung dieser Aufgabe vollends ohne alle Rechnung anzugeben; wir stellen deshalb ihre Ergebnisse kurz zusammen, ohne auf einen Beweis einzugehen, und müssen ihr dazu nur die Figuren 2 α) bis δ) entnehmen. Die Schwerpunktsebene (56) ist hier zur Zeichenebene gewählt und die Schnittgeraden mit $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $k = 0$ sind durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet. $P\,P'$ ist die lotrechte Drehachse. Es zeigt sich, daß nur diese vier Konfigurationen in der Schwerpunktsebene möglich sind, daß nur die eine Hälfte der Ebene den Schwerpunkt tragen kann (die andere ist durch schräge Schraffur ausgeschaltet) und daß die Stabilitätsbereiche (Bereiche des 4. Falles) in die durch waagerechte Schraffur gekennzeichneten Gebiete fallen. Die mit den Klammern versehenen Bereiche können auch verschwinden. Von den vier Fällen der Fig. 2 tritt der eine oder andere ein, je nachdem

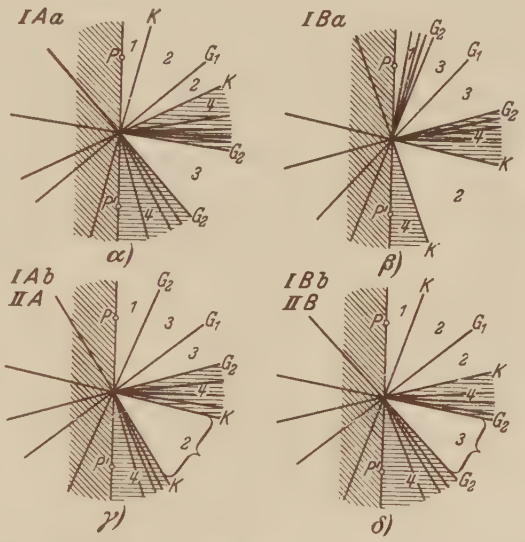


Fig. 2. Allgemeiner Kreisel.

I. die Berührung der zwei Kegel reell ist, wobei die Gerade G_1 a) innerhalb, b) außerhalb der Kegel liegt, oder

II. die Berührung der Kegel imaginär ist und ferner g_2 A) im Innenraum, B) im Außenraum des Kegels $g_2 = 0$ positiv wird.

In einem solchen Lageplan, der in jedem Einzelfall leicht genau festgelegt werden kann, teilt man nun vollends rasch die Bereiche außerhalb

der Stabilitätsbereiche unter die drei übrigen Fälle auf. Am Beispiel der Fig. 2 α) soll dies gezeigt werden. Wir gehen davon aus, daß in den beiden waagerecht schraffierten Gebieten $g_1 > 0$, $g_2 > 0$, $k > 0$ ist (vgl. Tabelle (58)). Um in das zwischen ihnen liegende Gebiet zu gelangen, muß man den Kegel $g_2 = 0$ überschreiten. Hier ist also $g_2 < 0$, d. h. ein Bereich des 3. Falles. Überschreiten wir aber den oberen Stabilitätsbereich nach der anderen Seite, d. h. nach oben, so wird $k < 0$, und wir gelangen in einen Bereich des 2. Falles. Dieser erstreckt sich über die Gerade G_1 hinüber. Doch ist rechts von ihr $g_1 > 0$, links $g_1 < 0$. Gehen wir also jetzt nochmal über $k = 0$ hinweg nach links, so wird $k > 0$, aber $g_1 < 0$, d. h. wir kommen in einen Bereich des 1. Falles. Auf dieselbe Weise sind auch die übrigen Figuren 2 β) bis δ) mit Ziffern versehen worden; damit ist die Einteilung der Schwerpunktshalbebene im allgemeinen Fall vollständig durchgeführt.

Schließlich müssen wir noch feststellen, wie sich die ausgeschlossenen Beziehungen (17) ausdrücken. Nach (57) geht (17) über in

$$g_1^2 = \left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2 (g_1^2 - 4\, g_0\, g_2) \qquad \left(\begin{matrix} m \geqq 0 \\ \text{ganz} \end{matrix}\right). \tag{60}$$

Diese Gleichung stellt in den Variabeln ξ, η, ζ eine Folge von Nullpunktskegeln 2. Ordnung dar, die alle im Raumgebiet $k \geqq 0$ verlaufen. Für $m = 0$ geht (60) in $g_2 = 0$ und für $m = 1$ in $k = 0$ über. Für $m \to \infty$ streben die Kegel wieder gegen $g_2 = 0$. Wir erhalten somit als Schnittgerade mit der Schwerpunktshalbebene und damit als Linien für verbotene Schwerpunktslagen eine unendliche Folge von diskreten Strahlen, die gegen G_2 konvergieren, und zwar liegen sie auf den Seiten der Strahlen G_2, auf denen $k \geqq 0$, $g_2 > 0$ ist. In der Weise sind sie in Fig. 2 strichpunktiert angedeutet.

Der Spezialfall, daß *eine* der Größen x_0, y_0, z_0 verschwindet, führt zu anderen Formeln (59)[19]), kann aber genau so erledigt werden. Dagegen liegt bei dem besonders wichtigen Sonderfall der symmetrischen Drehachsen (S. 81), wo also zwei der drei Größen x_0, y_0, z_0 und damit notwendigerweise auch die beiden entsprechenden der drei Größen ξ, η, ζ verschwinden, eine andere Aufgabe vor, die im folgenden behandelt werden soll. Wird nämlich etwa $\eta = \zeta = 0$, $\xi \neq 0$, so kann sich der Körper mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω um die lotrecht gestellte, den Schwerpunkt tragende Hauptachse x_1 drehen, und die Frage lautet nun, zu welchem der Fälle 1 bis 4 ein bestimmtes ω führt. Wir behandeln auch diese Aufgabe in engem Anschluß an die Grammelsche Arbeit[20]); insbesondere führen wir die Unterscheidung des verkürzten,

[19]) R. Grammel, a. a. O., S. 133.

[20]) A. a. O., S. 133 ff.

ausgeglichenen oder verlängerten Kreisels durch, je nachdem der Schwerpunkt auf der Achse des größten, mittleren oder kleinsten Trägheitsmoments liegt, und nennen den Kreisel stehend bzw. hängend für $\xi > 0$ bzw. $\xi < 0$.

Gleichung (7) liefert jetzt wegen $p_{\vartheta 0} = p_{\varphi 0} = 0$, $p_\psi = A\omega$, $\vartheta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ nach (50) und (51) rasch

$$\begin{cases} g_1 = 2g_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ g_2 = 4g_0\sigma_1\sigma_2 \end{cases} \tag{61}$$

mit

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{(B-A)\omega^2 + \xi}{2C}, \\ \sigma_2 = -\dfrac{(C-A)\omega^2 + \xi}{2B}, \\ \sigma_3 = \dfrac{(B+C-A)^2\omega^2}{2BC}. \end{cases} \tag{62}$$

Wir untersuchen zwecks Anwendung der Tabelle (58) g_1, g_2 und $k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2$ als Funktionen von ω^2, und zwar am übersichtlichsten in graphischer Darstellung. (Fig. 3 bis 6. Die Kurven sind überall nur schematisch skizziert, nicht maßstäblich gezeichnet.) Dazu merken wir uns noch an, daß k die Form

$$k \equiv A^2(\tau_1\omega^4 - 2\tau_2\omega^2 + \tau_3) \tag{63}$$

mit den Konstanten

$$\begin{cases} \tau_1 = A^2(B+C-A)^2, \\ \tau_2 = (B+C-A)\{C(2B-A) + B(2C-A)\}\cdot\xi, \\ \tau_3 = (B-C)^2\xi^2 \end{cases} \tag{64}$$

besitzt.

a) *Verkürzter Kreisel.* Es gelte $A > B > C$.

α) Hängend: $\xi < 0$.

Nach (62) sind die Größen σ_1 und σ_2 stets positiv, nach (61) daher $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ und $k > 0$. Es liegt daher für alle ω^2 der 4. Fall vor.

β) Stehend: $\xi > 0$.

Die Werte $g_2 = g_2(\omega^2)$ sind nach (61), (62) auf einer nach oben geöffneten Parabel aufzutragen, welche die Abszissenachse in den Punkten

$$\omega_1^2 = \frac{\xi}{A-B}, \quad \omega_2^2 = \frac{\xi}{A-C}$$

trifft [Fig. 3a) bis c)].

Die Werte $g_1 = g_1(\omega^2)$ erfüllen eine Gerade mit ersichtlich positivem Richtungsfaktor. Sie sind sicher positiv für $\omega^2 > \omega_1^2$, weil dort $\sigma_1 > 0$,

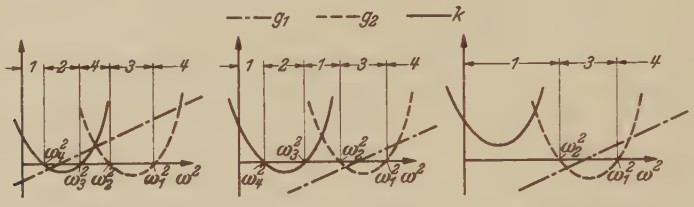
$\sigma_2 > 0$ ist. Um festzustellen, welches Vorzeichen g_1 für $\omega^2 = \omega_2^2$ erhält, setzen wir diesen Wert in den Ausdruck (61) für g_1 ein und erhalten

$$g_1 = \frac{\xi R}{2BC(A-C)} \tag{65}$$

mit

$$R = A^2 + C^2 + 3BC - 2A(B+C).$$

Der Ausdruck R kann positiv (z. B für $A:B:C = 4:3:2{,}5$) oder negativ (z. B. für $A:B:C = 4:3:2$) sein, g_1 also unterhalb oder oberhalb von ω_2^2 eine Nullstelle haben [Fig. 3 a) und b), c)]. Doch ist diese stets positiv, weil für $\omega^2 = 0$ g_1 negativ ausfällt. Für $R > 0$ heißt der Kreisel dick, für $R < 0$ schlank.



a) Dicker Kreisel. b) Schlanker Kreisel I. c) Schlanker Kreisel II.

Fig. 3. Verkürzter stehender Kreisel.

Die Werte $k = k(\omega^2)$ endlich liefern laut (63), (64) eine nach oben geöffnete Parabel. Ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse

$$\left.\begin{matrix}\omega_3^2\\ \omega_4^2\end{matrix}\right\} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \pm \frac{1}{\tau_1}\sqrt{\tau_3^2 - \tau_1\tau_3}$$

liegen — falls sie überhaupt reell sind — unterhalb ω_2^2, weil zwischen ω_2^2 und ω_1^2 $g_1 < 0$ und oberhalb ω_1^2 $\sigma_1 > 0$ und $\sigma_2 > 0$ gilt, mithin k positiv sein muß. Andererseits sind ω_3^2 und ω_4^2 positiv, falls reell; denn unter der Wurzel findet sich der Ausdruck

$$\tau_3^2 - \tau_1\tau_3 = BC(2B - A)(2C - A), \tag{66}$$

der wegen der bekannten Bedingungen $A + B > C$ usw. nur dann größer als Null sein kann, wenn dies für beide Klammern der Fall ist. Dann wird aber nach (64) auch $\tau_2 > 0$ und damit $\omega_3^2 > 0$, $\omega_4^2 > 0$. Nun gilt weiter

$$\tau_3^2 - \tau_1\tau_3 = BC(R + C(B - C)).$$

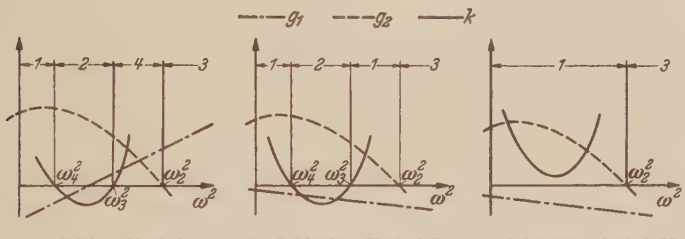
Beim dicken Kreisel ($R > 0$) treten also stets reelle Nullstellen von k auf. Die Gerade $g_1 = g_1(\omega^2)$ muß dabei zwischen diesen Punkten die Abszissenachse schneiden, weil k für $g_1 = 0$ und $g_2 > 0$ negativ wird [Fig. 3 a)]. Aber auch der schlanke Kreisel ($R < 0$) kann reelle Nullstellen liefern. Beispielsweise werden sie reell für $A:B:C = 3{,}9:3:2$, aber komplex

für den gleichfalls schlanken Kreisel $A:B:C = 4{,}1:3:2$. Die Unterscheidung schlank — dick reicht also hier nicht mehr aus. In Fig. 3 b) und c) ist deshalb zwischen schlank I und II unterschieden, je nachdem $R + C(B - C) \gtrless 0$ ist.

Man kann jetzt in Fig. 3 die ω^2-Achse vollends leicht in die Bereiche der vier Fälle einteilen.

b) *Ausgeglichener Kreisel.* Es gelte $B > A > C$.

α) Hängend: $\xi < 0$. Es ist nach (62) stets $\sigma_2 > 0$. Ferner wird auch $\sigma_1 > 0$ für $\omega^2 < \omega_1^2$, so daß hier der 4. Fall vorliegt; dagegen folgt $\sigma_1 < 0$ und damit $g_2 < 0$, d. h. der 3. Fall für $\omega^2 > \omega_1^2$.



a) Dicker Kreisel. b) Schlanker Kreisel I. c) Schlanker Kreisel II.

Fig. 4. Ausgeglichener stehender Kreisel.

β) Stehend: $\xi > 0$. Hier ist stets $\sigma_1 < 0$. Die Parabel $g_2 = g_2(\omega^2)$ ist jetzt nach unten geöffnet und hat rechts vom Ursprung mit der Abszissenachse nur den Schnittpunkt ω_2^2 [Fig. 4 a) bis c)].

g_1 nimmt für $\omega^2 = \omega_2^2$ auch jetzt den Wert (65) an, der wieder positiv (z. B. für $A:B:C = 2:3:1{,}5$) oder negativ (z. B. für $A:B:C = 2:3:1{,}1$) sein kann. Für $\omega^2 = 0$ ist nach (62) stets $g_1 < 0$ [Fig. 4 a) und b), c)].

$k = k(\omega^2)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Schnitte mit der ω^2-Achse — falls vorhanden — links von ω_2^2 liegen, weil nur hier $g_2 > 0$ ist, und rechts vom Ursprung aus den oben beim verkürzten Kreisel dargelegten Gründen. Wieder liefert der dicke Kreisel stets reelle Schnitte [Fig. 4 a)], der schlanke je nach seiner Gestalt [Fig. 4 b) und c)]. Beispiele für letzteren sind $A:B:C = 7:8:4$ (reell) und $A:B:C = 7:8:3$ (nicht reell).

Die Einteilung der ω^2-Achse in Fig. 4 ist damit gegeben.

c) *Verlängerter Kreisel.* Es gelte $B > C > A$.

α) Hängend: $\xi < 0$. Während die Parabel $g_2 = g_2(\omega^2)$ die Lage der Fig. 3 hat, besitzt k nach (66) nun stets zwei reelle Nullstellen, die aber wegen $\xi < 0$ laut (64) beide negativ sind. Die Gerade $g_1 = g_1(\omega^2)$

hat, wie aus (62) leicht nachzurechnen ist, einen positiven Richtungsfaktor; für $\omega^2 = 0$ ist $g_1 > 0$. Die Sachlage wird also durch Fig. 5 wiedergegeben.

β) Stehend: $\xi > 0$. σ_1 und σ_2 sind jetzt beide stets negativ, so daß g_2 keine reellen Nullstellen besitzt. Dagegen hat $k = 0$ wegen $\xi > 0$ nunmehr immer zwei positive Wurzeln ω_3^2, ω_4^2. Der Richtungsfaktor der Geraden $g_1 = g_1(\omega^2)$ bleibt positiv, doch wird $g_1 < 0$ für $\omega^2 = 0$. Die Gerade schneidet also die Abszissenachse rechts vom Ursprung, und zwar zwischen ω_3^2 und ω_4^2. Fig. 6 stellt diesen Fall dar.

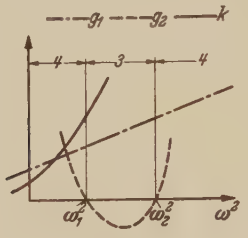


Fig. 5.
Verlängerter hängender Kreisel.

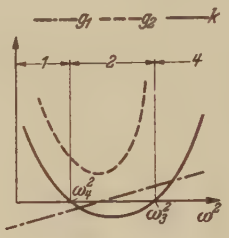


Fig. 6.
Verlängerter stehender Kreisel.

Die Überlegungen von S. 84 betreffs der Beziehungen (17) lassen sich hier ganz entsprechend anstellen. Man erhält aus (60), (61) und (62) auf der ω^2-Achse gewisse Punktfolgen in den Bereichen $g_2 \gtrless 0$, $k \gtrless 0$, welche gegen die Punkte ω_1^2 und ω_2^2 konvergieren und die natürlich nur dann unendlich viele Punkte enthalten, wenn ω_1^2 und ω_2^2 reell sind.

Im Fall des symmetrischen schweren Kreisels ($B = C$) vereinfachen sich die Formeln (61), (62) weiter, so daß man die vier Wurzeln von (57) in der Form

$$\varrho = \pm i \left\{ \frac{\omega (2B - A)}{2B} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 A^2}{4B^2} - \frac{\xi}{B}} \right\}$$

angeben kann. Daraus ist ersichtlich, daß der hängende symmetrische Kreisel ($\xi < 0$) stets den 4. Fall liefert, der stehende jedoch nur dann, wenn $A^2\omega^2 > 4B\xi$ ist, während für $A^2\omega^2 < 4B\xi$ der 2. Fall eintritt.

§ 4.

Die Kreiselbewegungen.

1. Das allgemeine Bild der Bewegungen.

Die Voraussetzungen für die Aufstellung der Reihen des I. Abschnitts sind nun gegeben. Die damit bestimmten Bewegungen werden im folgenden diskutiert, soweit sich ihre Eigenschaften aus den allgemeinen Reihen ablesen lassen.

Die Staudeschen Drehungen des 1. Falles besitzen laut § 2, Ziff. 1 Nachbarbewegungen, die dargestellt werden durch Reihen der Form

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= \vartheta_0 \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+\nu=n} \Theta_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t}, \\
\varphi &= \varphi_0 \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+\nu=n} \Phi_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t}, \quad (\mu,\nu \geqq 0, \text{ganz}) \qquad (67) \\
\psi &= \omega t + c' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+\nu=n} \Psi_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1+\nu\varrho_2)t}
\end{aligned}
$$

und entsprechende Ausdrücke für p_ϑ, p_φ. Die Bewegung nähert sich demnach asymptotisch einer Staudeschen Drehung derart, daß der Durchstoßpunkt der z_1-Achse auf der Einheitskugel um O eine aperiodische Spirale beschreibt, die sich asymptotisch an den Kreis anschmiegt, den der Punkt während der zugehörigen Staudeschen Drehung durchläuft. Gleichzeitig streben φ und $\dot{\psi}$ ihren durch die Staudesche Drehung gegebenen Grenzwerten zu[21]). Da nach einiger Zeit alle anderen Glieder gegen die e-Potenz mit dem kleinsten Exponenten ϱ_k vernachlässigt werden können, winden sich die Spiralen je nach den Anfangswerten innen oder außen um den Grenzkreis, ohne ihn von einer gewissen Zeit ab noch zu schneiden. Die Spitze des Drehimpulsvektors beschreibt in ihrer horizontalen Ebene eine Spirale, die sich gleichfalls an ihren Grenzkreis für die Staudesche Drehung annähert.

Bemerkenswert ist, daß (67) auch die asymptotische Annäherung des Körpers an seine labile Ruhelage enthält, wobei dann ω verschwindet. In § 3, Ziff. 3 (Fig. 2 bis 6) entsteht ja stets der 1. Fall, wenn der Schwerpunkt ohne Drehung des Körpers senkrecht über den Stützpunkt liegt.

Auch für die Staudeschen Drehungen des 2. Falles gelten die Reihen (67), aber sie sind dann in komplexer Schweibweise aufgestellt (S. 68). Setzen wir

$$
\begin{aligned}
\varrho_1 &= \varkappa + i\sigma \\
\varrho_2 &= \varkappa - i\sigma,
\end{aligned}
$$

so werden die Bewegungen jetzt beschrieben durch

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= \vartheta_0 \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\varkappa t} \sum_{\nu=0}^{n} (\Theta_{n\,1}^{\nu} \cos \nu\sigma t + \Theta_{n\,2}^{\nu} \sin \nu\sigma t), \\
\varphi &= \varphi_0 \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\varkappa t} \sum_{\nu=0}^{n} (\Phi_{n\,1}^{\nu} \cos \nu\sigma t + \Phi_{n\,2}^{\nu} \sin \nu\sigma t), \qquad (68) \\
\psi &= \omega t + c' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\varkappa t} \sum_{\nu=0}^{n} (\Psi_{n\,1}^{\nu} \cos \nu\sigma t + \Psi_{n\,2}^{\nu} \sin \nu\sigma t)
\end{aligned}
$$

[21]) Für die Staudeschen Drehungen mit reellen Kennziffern ϱ_k sichert der Satz von Perron [Fußnote [8])] auch in dem Fall, daß (17) erfüllt ist, die Reihen (67) also nicht gelten, wenigstens die Existenz von Nachbarbewegungen, deren Variable ϑ, φ und $\dot{\psi}$ sich asymptotisch den durch die jeweilige Staudesche Drehung gegebenen Grenzwerten annähern. Für imaginäre ϱ_k ist kein entsprechender Satz bekannt.

und entsprechende Ausdrücke für p_ϑ, p_φ. Die Bewegung verläuft danach ähnlich wie im 1. Fall. Der Unterschied besteht darin, daß die oben gefundenen Spiralen nicht mehr aperiodisch, sondern „gewellt" sind: statt sich von innen oder außen an den Grenzkreis anzuschmiegen, pendeln sie mit abnehmender Amplitude hin und her und schneiden den Kreis immer wieder.

Die Reihen (68) enthalten insbesondere die bekannten Spiralen des aufrechten symmetrischen schweren Kreisels. Auf Seite 88 ergab sich ja, daß dieser nur asymptotische Bewegungen des 2. Falles ausführen kann. In der Ungleichung $A^2\omega^2 < 4B\xi$, welche mit $A\omega = p_\psi$ in $p_\psi^2 < 4B\xi$ übergeht, haben wir die altbekannte Voraussetzung für die asymptotischen Bewegungen des aufrechten symmetrischen Kreisels wiedergefunden, welche längst in geschlossener Form berechnet sind[22]). Sie sind bekanntlich die einzigen Bewegungen, die in die aufrechte Drehung übergehen; also führt auch unsere Reihenmethode auf sie zurück.

Für die Staudeschen Drehungen des 3. Falles werden nach § 2, Ziffer 2 Nachbarbewegungen beschrieben durch die Reihen

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leqq \mu+\nu \leqq n} e^{-\nu\alpha_2 t}\left(\Theta_{n1}^{\mu\nu}\cos\mu(\alpha_1 t+\varepsilon) + \Theta_{n2}^{\mu\nu}\sin\mu(\alpha_1 t+\varepsilon)\right),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leqq \mu+\nu \leqq n} e^{-\nu\alpha_2 t}\left(\Phi_{n1}^{\mu\nu}\cos\mu(\alpha_1 t+\varepsilon) + \Phi_{n2}^{\mu\nu}\sin\mu(\alpha_1 t+\varepsilon)\right), \quad (69)$$

$$\psi = (\omega+\omega')t + c' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leqq \mu+\nu \leqq n} e^{-\nu\alpha_2 t}\left(\Psi_{n1}^{\mu\nu}\cos\mu(\alpha_1 t+\varepsilon) + \Psi_{n2}^{\mu\nu}\sin\mu(\alpha_1 t+\varepsilon)\right)$$

und entsprechende Ausdrücke für p_ϑ, p_φ. ϑ_0', φ_0', ω', α_1 und α_2 sind darin Potenzreihen von λ.

Setzen wir zunächst die in (69) enthaltene Integrationskonstante c_2 Null (S. 72 a)), so behalten wir alle Glieder, für die $\nu = 0$ ist, d. h. reine trigonometrische Reihen der Art (39). Die Bewegung bietet dann das Bild einer pseudoregulären Präzession: Der regulären Präzession, die durch die Werte $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_0'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_0'$, $\dot\psi = \omega + \omega'$ charakterisiert ist, überlagern sich Nutationen der z_1-Achse, deren Teilbögen alle unter sich kongruent sind. Zudem vollzieht der Körper synchrone Schwingungen um die z_1-Achse. Der Drehimpulsvektor führt eine ebensolche pseudoreguläre Präzession aus[23]).

Der Körper schwingt also periodisch *um* die stationäre Bewegung, während natürlich die Gesamtbewegung nicht rein periodisch ist. Trotz-

[22]) Klein-Sommerfeld, a. a. O., S. 334 ff.

[23]) Diese periodischen Bewegungen sind in den zwei Sonderfällen, daß es sich um eine symmetrische Drehachse oder die stabile Ruhelage des Kreisels handelt, schon von J. Horn behandelt in Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52 [Fußnote [6])], Aufgabe II bis IV.

dem möge sie weiterhin als periodische Bewegung bezeichnet werden. Es liegt hier wieder eine Bewegungsform vor, die vom schweren symmetrischen Kreisel her bekannt ist.

Für $c_2 \neq 0$ bietet die Bewegung nicht sofort das eben gegebene Bild, sondern nähert sich ihm asymptotisch an, um nach einiger Zeit praktisch mit ihm übereinzustimmen. Doch läßt sich über die Art der Annäherung allgemein nicht viel aussagen. Je kleiner man aber c_1 und damit die Amplituden der Nutationen wählt, d. h. je näher die periodische Bewegung mit einer Staudeschen Bewegung zusammenfällt, um so mehr wird die asymptotische Bewegung zweiter Art einer solchen erster Art, nämlich einer einfachen Spiralen, ähnlich, weil dann in den Reihen die e-Funktionen ohne periodische Koeffizienten überwiegen. Für verschwindende Nutationen geht die Bewegung wirklich in eine asymptotische Bewegung erster Art über (S. 72), die damit hier als Grenzfall erscheint. Die asymptotischen Bewegungen zweiter Art können wir deshalb als allgemeinste asymptotische Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels bezeichnen, die sich einer Staudeschen Drehung nähern. Der symmetrische schwere Kreisel kann sie bekanntlich nicht ausführen.

Für die Staudeschen Drehungen des 4. Falles findet man keine asymptotischen Nachbarbewegungen, sondern nur periodische (S. 72), wie sie eben auf S. 90 geschildert wurden.

Wir wollen diese Diskussion der Kreiselbewegungen noch durch zwei Bemerkungen vervollständigen.

Einmal geben unsere Ergebnisse Auskunft über die Frage, wie sich ein Körper bei einem kleinen Anstoß von einer Staudeschen Drehung entfernen kann; denn er vermag jede der geschilderten Bewegungen auch in umgekehrter Richtung auszuführen. Man erkennt dies daraus, daß man in den Bewegungsgleichungen die Vorzeichen von Zeit und Impulsen umkehren kann, ohne im ganzen etwas zu ändern. Demnach dreht sich der Kreisel aus einer instabilen Staudeschen Drehung bei einem geeigneten kleinen Anstoß entweder spiralenförmig heraus (Fall 1 und 3) oder in allmählich sich vergrößernden Schwingungen (Fall 2 und 3). Je kleiner dabei der Anstoß ist, um so länger bleibt die Drehachse aufrecht stehen, ehe sie „umfällt". Im 3. Fall kann man den Anstoß auch so wählen, daß die Achse dauernd annähernd lotrecht bleibt; im 4. Fall, dem Fall der Stabilität, tritt das sogar bei jedem kleinen Anstoß ein.

Weiter haben wir zu beachten, daß alle behandelten Lösungen weniger als sechs der verfügbaren Integrationskonstanten der Kreiselgleichungen enthalten. Neben den willkürlichen Konstanten p_ψ und c', die allen Lösungen eigen sind, hängen (67) und (68) noch von c_1 und c_2 ab, die in § 2, Ziffer 1 benutzt wurden, im ganzen also von vier Konstanten. Die

periodischen Teile von (69) enthalten c_1 und ε, also gleichfalls vier Konstante, während durch die asymptotischen Glieder von (69) noch c_2 hinzukommt (§ 2, Ziffer 2). λ dagegen ist keine weitere Integrationskonstante. Die Bewegungen haben also den Charakter von Grenzfällen, die nur durch gewisse genau berechenbare Anfangswerte der Koordinaten und Impulse eingeleitet werden können. Sobald diese Anfangswerte nicht exakt getroffen werden — was z. B. bei Versuchen immer der Fall sein wird — tritt die Bewegung nicht ein. Wohl aber kann man aus der stetigen Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten schließen, daß bei abnehmendem Fehler in den Anfangsbedingungen auch die Abweichung der wahren Bewegung von dem Grenzfall klein wird und erst nach langer Zeit zur Geltung kommt. Dieser stetige Übergang läßt erhoffen, daß die geschilderten speziellen Bewegungen des Kreisels bei der Erforschung seiner bis jetzt ganz unbekannten allgemeinen Bewegung sich nützlich erweisen werden.

2. Numerische Beispiele.

Wir haben uns bisher mit der Aufstellung allgemeiner Reihen beschäftigt und in Ziffer 1 dieses Paragraphen zunächst einige qualitative Folgerungen für die Kreiselbewegung daraus gezogen. Zum Schluß soll nun noch an einigen Beispielen die Frage behandelt werden, wie man die Reihen für die quantitative Berechnung der Lösungen nutzbar machen kann, die ja für die geometrische und mechanische Veranschaulichung der Bewegung von größter Bedeutung ist. Die dabei auftretende Schwierigkeit liegt auf der Hand. Weder die formale Berechnung noch die zitierten Konvergenzbeweise der Reihen geben uns eine praktisch brauchbare Abschätzung ihrer Glieder; man ist also nach der numerischen Berechnung einer notwendigerweise endlichen Anzahl von Gliedern prinzipiell nie sicher, ob nicht die Summe der folgenden so groß wird, daß die vorherigen keine Näherung an die wahre Lösung darstellen[24]). Man muß sich also darüber klar sein, daß jeder quantitative Schluß aus den Reihen auf dem Standpunkt der exakten Mathematik mit Vorbehalt an-

[24]) Wir befinden uns hier offenbar in einer ähnlichen Lage wie im Dreikörperproblem: auch dort sind die periodischen und asymptotischen Lösungen nachgewiesen, aber die numerische Rechnung muß andere Wege beschreiten als der Existenzbeweis. Vielleicht könnte man die Lösungen wie dort so auch im Kreiselproblem mit Hilfe des „numerischen Experiments“ (vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2, 1, S. 966 ff.) durch numerische Integration der Differentialgleichungen aufsuchen. Allein bei der Kompliziertheit der Kreiselgleichungen hat man hier große Schwierigkeiten zu erwarten und ist deshalb doch hauptsächlich auf die Reihenentwicklungen angewiesen.

zunehmen ist, gleichgültig, ob die Konvergenz allgemein bewiesen ist oder nicht.

Eine weniger strenge Betrachtung pflegt allerdings diesen Standpunkt wesentlich zu modifizieren und sich mit wenigen Reihengliedern zu begnügen, wenn die Integrationskonstanten so klein gewählt werden, daß der weggelassene Rest der Reihe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit klein bleibt. So stellt man sich bei Beschränkung auf die Glieder ersten Grades auf den Boden der Theorie der kleinen Schwingungen, die ihre Berechtigung und Fruchtbarkeit schon oft genug erwiesen hat. Ferner kann man bei Berechnung mehrerer Glieder aus ihrer Abnahme einen Anhaltspunkt dafür gewinnen, wie weit die Näherungen brauchbar sind.

In den nachstehenden Ausführungen kann es sich nur darum handeln, wenige willkürlich herausgegriffene Beispiele vorzuführen, die zeigen sollen, daß man überhaupt in diesem Sinne zu praktischen Resultaten zu gelangen vermag. Eine vollständige numerische Erforschung der nachgewiesenen Lösungen würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten.

Vorher beschäftigen wir uns noch kurz mit der Frage der zeichnerischen Darstellung der Bewegungen. Die Gleichungen (67) bis (69) beschreiben die Bahn eines Punktes einer Hauptträgheitsachse. Diese Bahn ist zur Zeichnung nicht sehr geeignet, weil die kleinen Abweichungen von den stationären Werten der Eulerschen Winkel zu ihrer Verdeutlichung zu große Figuren benötigen. Wir verfolgen daher besser die Bahn eines Punktes P der jeweiligen Staudeschen Drehachse im Abstand Eins von O; diese verläuft in der Nähe des oberen Kugelpols und kann bequem vergrößert werden. Ferner benutzen wir die horizontale $x_2\,y_2$-Ebene als Zeichenebene und projizieren die betrachtete sphärische Kurve senkrecht darauf. In dieser anschaulichen Abbildung der Kreiselbewegung kommt allerdings die Drehung des Körpers *um* die stationäre Achse nicht zum Ausdruck.

Die Projektion von P hat die Koordinaten[25])

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_0(\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi)\\
&\quad - y_0(\sin\varphi\cos\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi) + z_0\sin\vartheta\sin\psi,\\
y_2 &= x_0(\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi)\\
&\quad - y_0(\sin\varphi\sin\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi) - z_0\sin\vartheta\cos\psi.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Den übersichtlichsten Einblick in den geometrischen Aufbau der Kurven, bei dem es uns auf große Genauigkeit nicht ankommt, erhält man durch Beschränkung auf die Theorie erster Ordnung. Wir führen also in (70)

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \qquad \psi = \omega t + c' + \psi_1$$

---

[25]) Klein-Sommerfeld a. a. O., S. 19.

ein, unter $\vartheta_1, \varphi_1, \psi_1$ die Glieder ersten Grades in λ von (67) bis (69) verstanden, und setzen weiter

$$\sin \vartheta_1 = \vartheta_1, \quad \sin \varphi_1 = \varphi_1, \quad \cos \vartheta_1 = \cos \varphi_1 = 1.$$

Dann wird aus (70)

$$\begin{aligned} x_2 &= x' \cos(\omega t + c' + \psi_1) - y' \sin(\omega t + c' + \psi_1), \\ y_2 &= x' \sin(\omega t + c' + \psi_1) + y' \cos(\omega t + c' + \psi_1) \end{aligned} \tag{71}$$

mit

$$x' = -\varphi_1 \sin \vartheta_0, \quad y' = -\vartheta_1. \tag{72}$$

x', y' sind also die Koordinaten des Punktes P in einem Koordinatensystem, das gegen das ursprüngliche System x_2, y_2 um den Winkel $\psi = \omega t + c' + \psi_1$ gedreht ist. Bei Benutzung dieses zweiten Systems lassen sich die Kurven besonders leicht diskutieren und aufzeichnen.

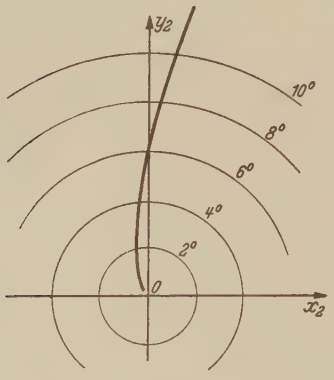


Fig. 7. Drehung 1. Asymptotische Bewegung erster Art, 1. Fall.

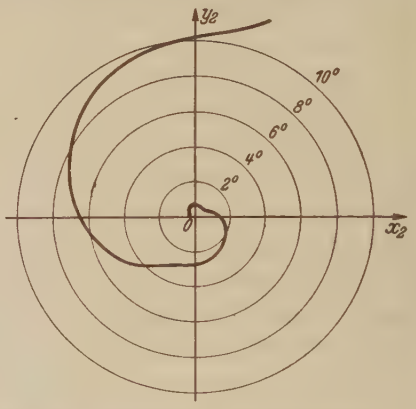


Fig. 8. Drehung 2. Asymptotische Bewegung erster Art, 2. Fall.

Zur Anfertigung einer solchen Zeichnung geht man also so vor: Nach Wahl einer Drehachse (x_0, y_0, z_0) auf dem Staudeschen Kegel (56) des vorgelegten Körpers berechnet man zunächst aus (43) und (55) die Koordinaten ϑ_0, φ_0 und ω der stationären Drehung, ferner aus (57), (59) die Kenngrößen ϱ_1 und ϱ_2. Die Koeffizienten a_{ik} von (4) lassen sich dann aus (53), (47), (50) und (51) gewinnen. Zur Berechnung der Nachbarbewegungen der Drehung kann man sich nun vollständig auf die Differentialgleichungen (5) beschränken. Man hat nämlich einfach diejenigen ihrer partikulären Integrale (8) zu bilden, deren Exponenten ϱ_l einen Realteil $\leqq 0$ besitzen, und wie üblich mit willkürlichen Konstanten multipliziert zu addieren. Um die Erfüllung der Bedingungen (11) braucht man sich nicht zu kümmern, so lange man nicht höhere Glieder aufstellen will. ϑ_1 und φ_1 erhält man auf diese Weise direkt, ψ_1 durch einen weiteren Schritt als lineares Glied von $\int \frac{\partial H}{\partial p_\psi} dt$ (Gleichung (25) oder (38)).

Die Kurven im $x'y'$-System sind nun nach (72) leicht zu übersehen:

1. Fall. Wegen der reellen ϱ_l entsteht eine Kurve durch den Ursprung, auf welcher der betrachtete Punkt asymptotisch in den Ursprung hineinwandert.

2. Fall. Da $\varrho_l = \varkappa \pm i\sigma$ jetzt einen Imaginärteil besitzt, erscheinen x' und y' als Summen von sin- und cos-Gliedern, so daß (72) eine elliptisch polarisierte Schwingung um den Ursprung darstellt, deren Amplitude jedoch wegen des Faktors $e^{-\varkappa t}$ asymptotisch zu Null abnimmt.

3. Fall. Aus dem rein imaginären $\varrho_1 = is_1$ folgen reine sin- und cos-Glieder, nach (72) also eine ungedämpfte elliptisch polarisierte Schwingung. Die durch das reelle ϱ_2 hinzutretenden aperiodischen Glieder bedeuten eine Verschiebung des Mittelpunktes der Ellipse; dieser rückt allmählich in den Ursprung hinein.

4. Fall. Gegenüber Fall 3 fällt die letztgenannte Verschiebung weg.

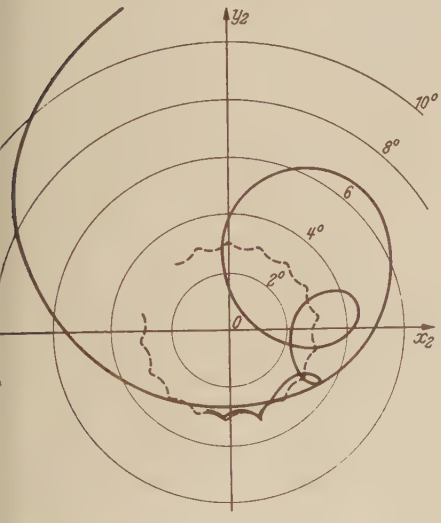


Fig. 9. Drehung 3. Periodische Bewegung und asymptotische Bewegung zweiter Art, 3. Fall.

– – – periodische Bewegung,
——— asymptotische Bewegung.

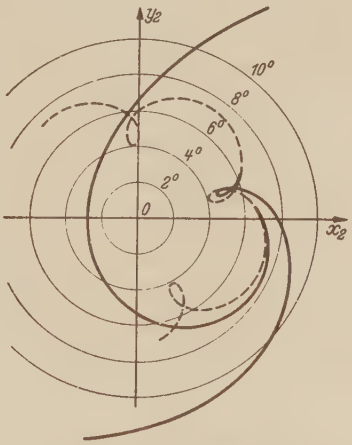


Fig. 10. Drehung 4. Periodische Bewegung und asymptotische Bewegungen zweiter Art, 3. Fall. Symmetrische Drehachse.

– – – periodische Bewegung,
——— zwei asymptotische Bewegungen.

Das $x'y'$-System rotiert nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \dot{\psi}_1$ um den Ursprung. Man zeichnet sich deshalb am besten die betrachteten Kurven auf Pauspapier, markiert darauf den wandernden Punkt für gleiche Zeitabstände und überträgt ihn auf die feste Zeichenebene, während man die x'-Achse jeweils unter dem zugehörigen Winkel $\omega t + c' + \psi_1$ gegen die feste x_2-Achse einstellt.

Die Figuren 7 bis 10 zeigen vier Beispiele so entstehender Formen. Die Ausgangswerte sind in Zahlentafel 1 vermerkt und daraus die Kurven wie beschrieben hergestellt. Die eingezeichneten Kreise mit Gradzahlen sind die projizierten Breitenkreise der Einheitskugel um O, auf der die sphärische Kurve verläuft, mit ihren Polabständen. Es liegt eine gewisse Willkür darin, bis zu welchen Gradzahlen man die Kurven, die ja beliebig weit gezeichnet werden können, als Näherungen gelten läßt. Je näher sie bei O liegen, um so genauer sind sie natürlich, weil dann die Konvergenz der Reihen besser ist. Es ist zu vermuten und wird sich unten weiter bestätigen, daß diese genügt, falls man nur Werte bis zu etwa 10^0 für die Winkel ϑ_1, φ_1, ψ_1 und damit nur wenig mehr für den Polabstand $\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}$ von P zuläßt. Gleichzeitig bleibt man damit im Geltungsbereich der Vernachlässigungen, die von (70) zu (71), (72) geführt haben.

Zahlentafel 1.

Drehung Nr.	1	2	3	4
Fall	1	2	3	3
A gcm²	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^5$
B gcm²	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^5$
C gcm²	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$
ξ dyn cm	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$
η dyn cm	$7 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	0
ζ dyn cm	$2{,}5 \cdot 10^7$	$2{,}5 \cdot 10^7$	$2{,}5 \cdot 10^7$	0
x_0	0,1313	0,06137	0,1945	1
y_0	0,9321	0,7058	— 0,9725	0
z_0	0,3377	0,7058	— 0,1280	0
ϑ_0	70,26°	45,11°	97,35°	90°
φ_0	8,02°	4,97°	168,69°	90°
ω	1,036	7,985	11,11	13
ϱ_1	4,282	$1{,}793 + i \cdot 4{,}280$	$i \cdot 12{,}52$	$i \cdot 9{,}045$
ϱ_2	4,472	$1{,}793 - i \cdot 4{,}280$	1,878	12,41

Nach dieser Orientierung über die Geometrie der Bewegung, welche sich auf die Theorie erster Ordnung beschränken sollte, gehen wir noch in zwei Beispielen auf die Frage der genaueren Berechnung der Lösungen ein, um einen ungefähren Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, wie weit man mit dem entwickelten Verfahren numerisch gelangen kann. Gleichzeitig fassen wir den Gang der Rechnung kurz zusammen. Als

1. Beispiel wählen wir Kreisel und Zahlenwerte der Drehung Nr. 1 von Zahlentafel 1, also eine asymptotische Bewegung erster Art. Wir

wollen die Reihen bis zu den Gliedern zweiten Grades in λ berechnen, haben also in der Hamiltonfunktion (4) die Glieder zweiten und dritten Grades zu berücksichtigen. Ihre Koeffizienten a_{ik} und $A_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ können nach (50) und (51) ohne weiteres berechnet werden.

Als nächster Schritt folgt die Auflösung der Gleichungen (6). Die sich ergebenden Wurzeln u_{kl}, v_{kl} sind so zu normieren, daß die beiden oberen Bedingungen (11) erfüllt werden (die unteren sind es natürlich von selbst). Die gleichzeitige Befriedigung der vier homogenen Gleichungen (6) ist eine Kontrolle für die richtige Berechnung der ϱ_l und der a_{ik}. Die Berührungstransformation (10) ist damit gefunden.

Weiter haben wir die Funktionen R_{k2}, S_{k2} zu bilden (Gleichung (23)). Sie bestehen einfach aus den Gliedern zweiten Grades in den Gleichungen (18), nachdem man in diese Glieder $q_k = q_{k1}$, $p_k = p_{k1}$ eingesetzt hat (vgl. (21_2)). Man erhält also R_{k2} und S_{k2} dadurch, daß man die Transformation (10) in das Aggregat der Glieder dritten Grades von (4) einträgt, dieses je einmal nach den neuen Variabeln q_k'', p_k'' partiell ableitet (die Striche sind in § 2 weggelassen!) und $q_k'' = q_{k1}$, $p_k'' = p_{k1}$ in die Ableitungen einsetzt. Es ist dabei zweckmäßig, noch vor dem Ausmultiplizieren der Potenzprodukte zu differenzieren, weil man dann sofort $q_{11} = q_{21} = 0$ (Gleichung (22_1)) einführen kann und so die unnötige Bildung von Produkten vermeidet, die hinterher doch verschwinden.

Mit R_{k2}, S_{k2} hat man die $\beta_{k2}^{\mu\nu}, \gamma_{k2}^{\mu\nu}$ und aus (24) die $Q_{k2}^{\mu\nu}, P_{k2}^{\mu\nu}$, muß also nur noch die ursprünglichen Koordinaten nach (10) zusammensetzen. Damit kann auch die Berechnung der letzten Koordinate $q_3 = \psi$ nach (25) erfolgen. Da die Entwicklungen von H_{13}, H_{23} und H_{33} schon zur Bestimmung der Koeffizienten von (4) aufgestellt werden mußten, ist das nur noch eine kleine Arbeit. Wir setzen noch $\lambda = 10^3$ und stellen das Endergebnis in Zahlentafel 2 zusammen. Man erhält daraus den gesuchten Ausdruck für eine der linksstehenden Variabeln, indem man die Zahlen der betreffenden Zeile, multipliziert mit den am Kopf der Spalten stehenden Funktionen, addiert.

Zur Untersuchung der Konvergenz der Reihen müssen wir zunächst nur die Ausdrücke für ϑ', φ', p_ϑ', p_φ' betrachten, da ψ' gesondert berechnet wurde. Wir wollen — was natürlich ein keineswegs unanfechtbarer Standpunkt ist — die Konvergenz als gesichert und die Rechnung mit den angegebenen Gliedern als genügend betrachten, wenn in jeder Reihe die Summe der Glieder zweiten Grades absolut genommen $\leqq \frac{1}{10}$ von der der Glieder ersten Grades wird. Dies ist für alle t der Fall z. B. für $c_1 = c_2 = \pm 0{,}7$. Man hat dann für $t = 0$

$$\vartheta' \approx \mp 22{,}8^0 + 1{,}2^0,$$
$$\varphi' \approx \mp 26{,}1^0 - 2{,}6^0.$$

Zahlentafel 2.

	$c_1 e^{-\varrho_1 t}$	$c_2 e^{-\varrho_2 t}$	$c_1^2 e^{-2\varrho_1 t}$	$c_1 c_2 e^{-(\varrho_1+\varrho_2)t}$	$c_2^2 e^{-2\varrho_2 t}$
$\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0$	−0,3084	−0,2594	0,0095	0,0220	0,0128
$\varphi' = \varphi - \varphi_0$	−0,2969	−0,3536	−0,0226	−0,0462	−0,0231
$p'_\vartheta = p_\vartheta - p_{\vartheta 0}$	$0{,}6245 \cdot 10^7$	$0{,}5385 \cdot 10^7$	$-0{,}0263 \cdot 10^7$	$-0{,}0644 \cdot 10^7$	$-0{,}0395 \cdot 10^7$
$p'_\varphi = p_\varphi - p_{\varphi 0}$	$0{,}4410 \cdot 10^7$	$0{,}5116 \cdot 10^7$	$-0{,}0026 \cdot 10^7$	$-0{,}0061 \cdot 10^7$	$-0{,}0034 \cdot 10^7$
$\psi' = \psi - (\omega t + c')$	0,07043	0,08529	0,03046	0,06435	0,03259

Eine eingehendere Abschätzung hat wenig Sinn; wir begnügen uns vielmehr mit der Feststellung, daß der größte so erreichbare Winkel rund 30^0 beträgt.

Die Reihe für ψ' konvergiert offenbar bedeutend schlechter. Doch wird dadurch die Konvergenz der übrigen Reihen in keiner Weise berührt, da ψ' nachträglich aus ihnen berechnet ist. Vielmehr wird umgekehrt die Reihe für ψ' umso schlechter konvergieren, je besser dies bei den andern der Fall ist, d. h. je größere Werte mit ihnen erreichbar werden. Es liegt hier ja einfach die Aufgabe vor, die gewonnenen Lösungen $\vartheta', \ldots, p'_\varphi$ in die Funktion $\frac{\partial H}{\partial p_\psi}$ einzutragen und diese dann nach t zu integrieren, was prinzipiell keine Schwierigkeit mit sich bringt. Diese Aufgabe ist durch den Ausdruck für ψ' aus Zahlentafel 2 näherungsweise nur für kleine Werte von c_1, c_2 gelöst. Für größere Werte müßte man entweder die Entwicklung von $\frac{\partial H}{\partial p_\psi}$ nach Potenzen von $c_2 e^{-\varrho_1 t}$, $c_2 e^{-\varrho_2 t}$ über die Glieder zweiten Grades hinaus fortführen oder aber eines der vielen Verfahren zur numerischen oder graphischen Auswertung des Integrals $\int \frac{\partial H}{\partial p_\psi} dt$ heranziehen. Wir gehen darauf nicht näher ein, weil wir keinen Gebrauch von der Lösung machen wollen.

Die Genauigkeit der Näherungen von Tafel 2 wächst mit der Zeit, weil die höheren Glieder rascher abnehmen. Man erkennt ferner, daß bei Beschränkung von ϑ' und φ' auf Werte bis zu 10^0 die Genauigkeit der Glieder ersten Grades für die Zwecke der Zeichnung ausreichen dürfte.

2. Beispiel. Schließlich betrachten wir noch als Beispiel für die symmetrischen Drehachsen die Drehung Nr. 4 von Zahlentafel 1. Hier sind die Aussichten für eine gute Konvergenz besonders günstig. Es ergibt sich nämlich wegen $\vartheta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ aus (49) oder (50) für alle symmetrischen

Zahlentafel 3.

Glieder ersten Grades	$c_1 \sin(w_1+\varepsilon)$	$c_1 \cos(w_1+\varepsilon)$	$c_2 e^{-w_2}$
ϑ'	0,4603	0	0,1402
φ'	0	− 0,2567	− 0,4213
$p'_\vartheta \cdot 10^{-6}$	0	− 2,581	− 0,6703
$p'_\varphi \cdot 10^{-6}$	− 0,7325	0	− 1,410

$$w_1 = \alpha_1 t \qquad \alpha_1 = 9{,}045 + c_1^2 \cdot 1{,}424 + \cdots$$

$$w_2 = \alpha_2 t \qquad \alpha_2 = 12{,}41 + c_1^2 \cdot 0{,}2517 + \cdots$$

Glieder dritten Grades	$c_1^3 \sin 3(w_1+\varepsilon)$	$c_1^3 \cos 3(w_1+\varepsilon)$	$c_1^3 \sin(w_1+\varepsilon)$	$c_1^3 \cos(w_1+\varepsilon)$	$c_1^2 c_2 \sin 2(w_1+\varepsilon) e^{-w_2}$	$c_1^2 c_2 \cos 2(w_1+\varepsilon) e^{-w_2}$	$c_1 c_2^2 \sin(w_1+\varepsilon) e^{-2w_2}$	$c_1 c_2^2 \cos(w_1+\varepsilon) e^{-2w_2}$	$c_2^3 e^{-3w_2}$	$c_1^2 c_2 e^{-w_2}$
ϑ'	− 0,0055	0	− 0,0538 + 0,0162 $\cdot(\cos 3\varepsilon - \cos\varepsilon)$	0,0062 sin 3 ε + 0,0510 sin ε	− 0,0028	− 0,0005	− 0,0021	0,0007	− 0,0027	0
φ'	0	0,0093	0,0035 sin 3 ε + 0,0284 sin ε	− 0,0090 − 0.0090 $\cdot(\cos 3\varepsilon - \cos\varepsilon)$	− 0,0088	0,0020	0,0001	− 0,0032	− 0,0013	− 0,0046
$p'_\vartheta \cdot 10^{-6}$	0	− 0,0912	− 0,0347 sin 3 ε − 0,2860 sin ε	0,0908 + 0,0908 $\cdot(\cos 3\varepsilon - \cos\varepsilon)$	0,0120	− 0,0399	0,0145	− 0,0065	0,0153	0,0501
$p'_\varphi \cdot 10^{-6}$	0,0031	0	0,1089 − 0,0258 $\cdot(\cos 3\varepsilon - \cos\varepsilon)$	− 0,0099 sin 3 ε − 0,0812 sin ε	0,0174	− 0,0075	0,0417	0,0111	0,0275	0,0012

Drehachsen, daß (4) nur Glieder mit geradem Grad besitzt. Daraus folgt, daß jetzt nur Gleichungen (30_r) mit ungeradem r auftreten; die mit geradem r sind mit (30_1) identisch und können fortgelassen werden. Deshalb kommen in den Lösungen (27) nur die ungeraden Potenzenvon λ vor.

Der Gang der Rechnung ist im wesentlichen derselbe wie im 1. Beispiel. Im einzelnen sind gewisse Abweichungen bedingt durch den hier vorliegenden 3. Fall: es muß die Transformation (10) noch durch (14) in eine reelle Form übergeführt und dann nach § 2, Ziffer 2 verfahren werden. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Die Form der Koeffizienten von $\sin(w_1 + \varepsilon)$ und $\cos(w_1 + \varepsilon)$ ist darin durch die Gleichungen (37) bedingt.

Die Konvergenz der Reihen beurteilen wir nach denselben Gesichtspunkten wie beim 1. Beispiel. Allerdings kann die Forderung, daß das Verhältnis der Glieder $\leqq \frac{1}{10}$ sein soll, nicht für jeden Wert t erhoben werden, da es sich hier um Schwingungen handelt. Offenbar kommt es nur auf deren (abnehmende) größte Ausschläge an. Wenn wir nun in den Gliedern dritten Grades jeder Reihe sämtliche Koeffizienten absolut nehmen und die sin und cos gleich Eins setzen, so entsteht dadurch eine mit wachsendem t abnehmende obere Schranke für die Summe dieser Glieder. Diese wird von der Summe der Glieder ersten Grades immer wieder um mindestens das Zehnfache übertroffen, wenn 1. die Summe der Beträge sämtlicher Koeffizienten der Glieder dritten Grades $\leqq \frac{1}{10}$ von der der Glieder ersten Grades ist und wenn 2. dasselbe für die Koeffizienten der rein trigonometrischen Glieder gilt. Wenn außerdem 3. in den Reihen für α_1 und α_2 das zweite Glied $\leqq \frac{1}{10}$ des ersten wird, betrachten wir die Konvergenz aller Reihen als genügend.

Die drei Forderungen sind beispielsweise erfüllt für $c_1 = 0{,}8$, $c_2 = 1{,}4$, $\varepsilon = 0$. Man findet für diese Werte, daß φ' in der periodischen Lösung zwischen $\sim \pm 12{,}0^0$ hin und her schwankt, ϑ' zwischen $\sim \pm 19{,}7^0$, während sich der größte auftretende Winkel in der asymptotischen Lösung für $t = 0$ zu $\varphi' \approx 45{,}3^0$ ergibt.

Die Reihe für ψ, die aus (38) gewonnen wird, hat im Gegensatz zu Zahlentafel 3 nur Glieder geraden Grades. Es zeigt sich bei näherer Betrachtung wieder, daß die Konvergenz dieser Reihe für große Winkel schlechter ist als die der übrigen, wenn auch nicht so schlecht wie im 1. Beispiel. Es gilt auch hier das dort Gesagte; wir brauchen den langen Ausdruck für ψ nicht anzuschreiben, weil wir ihn nicht benutzen werden.

Mit den behandelten Beispielen wollen wir uns begnügen. Sie dürften gezeigt haben, daß man mit Hilfe der Reihenentwicklungen auf einem zwar etwas mühsamen, aber doch gangbaren Weg auch zu einer gewissen zahlenmäßigen Beherrschung unserer Kreiselbewegungen gelangt.

(Eingegangen am 30. Januar 1937.)

Über höhere Ableitungen von Orthogonalpolynomen.

Von

Wolfgang Hahn in Berlin.

Satz: *Bilden die r-ten Ableitungen $\varphi_n^{(r)}(x)$ eines Systems von Orthogonalpolynomen $\varphi_n(x)$ wieder ein solches System, so müssen die $\varphi_n(x)$ ein System Jacobischer, Laguerrescher oder Hermitescher Polynome sein.*

Für $r = 1$ habe ich dies früher gezeigt[1]); der allgemeine Fall läßt sich leicht darauf zurückführen. Man hat nämlich

$$\varphi_n(x) = (x - a_n)\,\varphi_{n-1}(x) - b_n\,\varphi_{n-2}(x), \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_n^{(r)}(x)}{n^{r)}} = (x - a_n^{(r)})\,\frac{\varphi_{n-1}^{(r)}(x)}{(n-1)^{r)}} - b_n^{(r)}\,\frac{\varphi_{n-2}^{(r)}(x)}{(n-2)^{r)}} \tag{2}$$

$$(n^{r)} = n\cdot(n-1)\ldots(n-r+1)).$$

Daraus ergibt sich durch $(r+1)$- bzw. 1-malige Ableitung und Elimination von $\varphi_{n-1}^{(r)}(x)$

$$\frac{r}{n^{r+1)}}\cdot\varphi_n^{(r+1)}(x) = \left(r\,x - a_n^{(r)}\,(r+1) + a_n\right)\cdot\frac{\varphi_{n-1}^{(r+1)}(x)}{(n-1)^{r+1)}} - \left(\frac{(r+1)\,b_n^{(r)}}{(n-2)^{r)}} - \frac{b_n}{(n-1)^{r)}}\right)\cdot\frac{\varphi_{n-2}^{(r+1)}(x)}{n-r-1}. \tag{3}$$

Demnach genügen die Ableitungen von $\varphi_n^{(r)}(x)$ einer dreigliedrigen Rekursionsformel. Für diese gilt somit der Spezialfall, d. h. die $\varphi_n^{(r)}(x)$ bilden ein System „klassischer" Orthogonalpolynome. Das muß dann natürlich auch für die $\varphi_n(x)$ selbst gelten.

Dieser Beweis ist bedeutend einfacher als der kürzlich von Herrn Krall[2]) veröffentlichte.

---

[1]) Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 634 — 638.

[2]) Bull. Amer. math. Soc. **42** (1936), S. 867 — 870.

(Eingegangen am 6. Februar 1937.)

Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren.

Von

M. Eichler in Halle.

1. Die Idealklassenzahl eines normalen einfachen hyperkomplexen Systems über einem algebraischen Zahlkörper k stimmt fast immer im wesentlichen mit der von k überein, eine Ausnahme machen allein die Quaternionenalgebren über k, welche an allen unendlichen Primstellen von k verzweigt sind[1]). Die Vorbedingung dafür, daß es über einem Körper k überhaupt solche Algebren gibt, ist die, daß k mitsamt seinen konjugierten Körpern reell ist. Die Normen aller Zahlen aus einem an allen unendlichen Primstellen von k verzweigten Quaternionensystem sind total positiv; deshalb werden wir solche Algebren *total definit* nennen. Sie haben im allgemeinen eine größere Idealklassenzahl als ihr Grundkörper, wie aus dem nachstehenden Satz hervorgeht; er ist das Hauptziel dieser Arbeit.

Satz 1. *Es sei k ein total reeller Zahlkörper vom Grade n. $\zeta_0(s)$ bezeichne seine Zetafunktion, D_0 seine Diskriminante, h_0 seine Idealklassenzahl und E_0 die Gruppe seiner Einheiten. Ferner sei $\mathfrak{Q}$ eine total definite Quaternionenalgebra über k mit der Diskriminante $\mathfrak{d}$. Dann hat E_0 in der Einheitengruppe $E_\mathfrak{Z}$ jeder Maximalordnung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Q}$ endlichen Index $(E_\mathfrak{Z}:E_0) = w_\mathfrak{Z}$, und es gilt*

$$\frac{2h_0\zeta_0(2)|D_0|^{3/2}}{(2\pi)^{2n}}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}}(N\mathfrak{p}-1)=\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{w_{\mathfrak{Z}_i}},$$

dabei bezeichnet links $N\mathfrak{p}$ die Normen der $\mathfrak{d}$ teilenden Primideale $\mathfrak{p}$ von k in Bezug auf den rationalen Zahlkörper, und auf der rechten Seite wird über die Rechtsordnungen $\mathfrak{Z}_i$ von solchen Linksidealen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_h$ von $\mathfrak{Q}$ summiert, welche alle Linksidealklassen für eine feste Maximalordnung $\mathfrak{Z}_0$ repräsentieren.

Diesen Satz erhält man an Stelle einer Idealklassenzahlformel mit Hilfe der analytischen Zahlentheorie; er ermöglicht es zwar, von Fall zu

[1]) M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. für r. u. a. Math. 176 (1937), S. 192.

Fall einige Aussagen über die Klassenzahl h von $\mathfrak{Q}$ zu machen, jedoch scheint es außerhalb des Bereiches des möglichen zu liegen, h explizit zu berechnen. Für den Fall, daß k der rationale Zahlkörper ist, liefert der Satz 1 eine bereits bekannte Formel[2]), und hier läßt sich sogar die Zahl h selber durch elementare Hilfsbetrachtungen ausrechnen.

Satz 2. *Eine definite Quaternionenalgebra mit der Grundzahl d*[3]) *über dem rationalen Zahlkörper hat die Idealklassenzahl*

$$h = 1 \qquad \text{für } d = -2 \text{ und } d = -3,$$

$$h = \frac{1}{12}\varphi(|d|) + \frac{1}{2}h_2 + \frac{2}{3}h_3 \quad \text{für } d < -3;$$

dabei ist

$h_2 = 2^{u-1}$, *wenn u ungerade Primteiler in d aufgehen, und wenn von ihnen keiner bei Division durch 4 den Rest 1 läßt, und*

$h_2 = 0$ *in den übrigen Fällen.*

Ferner ist

$h_3 = 2^{v-1}$, *wenn v von 3 verschiedene Primteiler in d aufgehen, und wenn von ihnen keiner bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, und*

$h_3 = 0$ *in den übrigen Fällen.*

2. Zum Beweise des zweiten Satzes muß der erste vorausgesetzt werden, der für den rationalen Zahlkörper die einfache Form

$$\frac{1}{12}\prod_{p|d}(p-1) = \frac{1}{12}\varphi(|d|) = \sum_{i=1}^{h}\frac{1}{w_{\mathfrak{Z}_i}}$$

annimmt. Frl. Hey zeigte, daß bis auf zwei Fälle stets nur $w_{\mathfrak{Z}} = 2$ oder $w_{\mathfrak{Z}} = 3$ sein kann[4]). In den Ausnahmefällen ist $w_{\mathfrak{Z}} = 12$ und $d = -2$ bzw. $w_{\mathfrak{Z}} = 6$ und $d = -3$. Jetzt hat die linke Seite der vorstehenden Gleichung den Wert $\frac{1}{12}$ bzw. $\frac{1}{6}$, deshalb kann rechts jeweils nur ein einziger Summand $\frac{1}{w_{\mathfrak{Z}}} = \frac{1}{12}$ bzw. $\frac{1}{w_{\mathfrak{Z}}} = \frac{1}{6}$ auftreten; also gibt es für $d = -2$ und für $d = -3$ nur eine Idealklasse.

Ist $d < -3$, so kann an Stelle der letzten Gleichung auch

$$\frac{1}{12}\varphi(|d|) = h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{3}h_3$$

---

[2]) H. Brandt, Idealtheorie in Quaternionenalgebren, Math. Annalen 99 (1928), S. 1; § 67. — K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Diss. Hamburg 1929.

[3]) d wird auf Vorschlag von Herrn Brandt negativ für definite und positiv für indefinite Quaternionenalgebren genommen im Gegensatz zu der ursprünglich von ihm a. a. O.[2]), S. 9 getroffenen Festsetzung.

[4]) K. Hey [2]), S. 43.

geschrieben werden, wobei h_1, h_2 und h_3 angeben, wie oft $w_{\mathfrak{Z}} = 1$, $= 2$ und $= 3$ ist. Die Idealklassenzahl bekommt dann die behauptete Form

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = \frac{1}{12}\varphi(|d|) + \frac{1}{2}h_2 + \frac{2}{3}h_3,$$

und es bleibt allein übrig, h_2 und h_3 zu berechnen.

Damit $h_2 \neq 0$ sein kann, muß die vorgelegte Quaternionenalgebra $\mathfrak{Q}$ eine Einheit $\iota \neq \pm 1$ enthalten, deren Quadrat gleich ± 1 ist. Da $\mathfrak{Q}$ definit ist, kommt nur $\iota^2 = -1$ in Frage. $\mathfrak{i} = [1, \iota]$ ist dann die Hauptordnung eines kommutativen Unterkörpers von $\mathfrak{Q}$, dieser hat die Diskriminante -4. Einen solchen Unterkörper und mithin eine derartige Einheit erhält $\mathfrak{Q}$ dann und nur dann, wenn kein Primteiler der Form $4m+1$ in der Grundzahl d von $\mathfrak{Q}$ auftritt[5]). Dann und nur dann ist also h_2 von Null verschieden.

Es sei jetzt $h_2 \neq 0$, und für zwei Maximalordnungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ gelte $w_{\mathfrak{Z}_1} = w_{\mathfrak{Z}_2} = 2$. Dann enthalten $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ je eine Einheit ι bzw. ι' mit $\iota^2 = \iota'^2 = -1$. ι geht aus ι' durch Transformation mit einer Zahl α hervor, so ist ι und mithin auch $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{Z}_1$ und $\alpha^{-1}\mathfrak{Z}_2\alpha = \mathfrak{Z}_3$ enthalten. Das Distanzideal $(\mathfrak{Z}_3 \times \mathfrak{Z}_1)^{-1}$ ist zur Diskriminante von $\mathfrak{Q}$ prim und wird daher nach einem bekannten Satze durch ein Ideal von $\mathfrak{i}$ erzeugt[6]). Da aber alle Ideale aus $\mathfrak{i}$ Hauptideale sind, so ist auch $(\mathfrak{Z}_3 \times \mathfrak{Z}_1)^{-1}$ ein Hauptideal, mithin gehören $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_3$ und $\mathfrak{Z}_2$ zum gleichen Typ. Weil nun alle Maximalordnungen, für welche $w_{\mathfrak{Z}} = 2$ ist, zum gleichen Typ gehören, so kommt $w_{\mathfrak{Z}} = 2$ gerade so oft vor, wie es nicht äquivalente ambige Ideale in irgend einer Maximalordnung $\mathfrak{Z}$ mit $w_{\mathfrak{Z}} = 2$ gibt; dabei darf man annehmen, daß $\mathfrak{Z} \supset \mathfrak{i}$ ist; h_2 ist also gleich der Maximalzahl nicht äquivalenter ambiger Ideale in $\mathfrak{Z}$. Nun entstehen alle ambigen Ideale von $\mathfrak{Z}$ aus den 2^a Differententeilern durch Multiplikation mit rationalen Zahlen, wobei a die Anzahl der Primteiler von d bezeichnen möge. Es genügt also zu untersuchen, wie viele Differententeiler nicht äquivalent sind.

Ist d gerade, so ist $\mathfrak{Z}(1+\iota)$ wegen $n(1+\iota) = 2$ ein Hauptideal, welches die Differente teilt. Ein weiteres bekommt man folgendermaßen: da d voraussetzungsgemäß keinen Primteiler der Form $4m+1$ enthält, so stimmt die Algebra $[1, I, \Omega, I\Omega]$ mit den Multiplikationsregeln

$$I^2 = -1, \quad \Omega^2 = d = -|d|, \quad I\Omega + \Omega I = 0$$

---

[5]) Dies folgt aus den bekannten Sätzen über Zerfällungskörper. Vgl. auch V. Kořínek, Kvadratická tělesa v kvaternionových okruzích, Věstník Král. Čes. Spol. Nauk, Tř. II, 1930.

[6]) H. Hasse, Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra, Act. Sci. Ind. 9 (1934); Exposés math. publ. à la mém. d. J. Herbrand. Oder V. Kořínek[5]). Oder C. Chevalley, Sur certains idéaux d'une algèbre simple, Abh. Math. Sem. Hamburg 10 (1934), S. 83.

an allen ungeraden endlichen und an der unendlichen Primstelle mit $\mathfrak{Q}$ überein und folglich auf Grund der Summenrelation auch an der Stelle 2. Diese Algebra ist also nach dem Hauptsatz der Algebrentheorie mit $\mathfrak{Q}$ isomorph, und da alle i umfassenden Maximalordnungen von $\mathfrak{Q}$ zum gleichen Typ gehören, so enthält $\mathfrak{J}$ eine mit $[1, I, \Omega, I\Omega]$ isomorphe Ordnung $[1, \iota, \omega, \iota\omega]$ und insbesondere eine Zahl ω mit

$$\omega^2 = d, \qquad \omega^{-1}\iota\omega = -\iota.$$

$\mathfrak{J}\omega$ ist also auch ein Hauptideal, welches die Differente teilt.

$\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}(1+\iota)$, $\mathfrak{J}\omega$, $\mathfrak{J}(1+\iota)^{-1}\omega$ sind alle diese Hauptideale; denn ist $\mathfrak{J}\alpha$ irgend ein ganzes gleichseitiges Hauptideal, so ist $\alpha^{-1}\iota\alpha$ eine Einheit von $\mathfrak{J}$, und weil $\mathfrak{J}$ nur die Einheiten ± 1, $\pm\iota$ enthält, ist

$$\alpha^{-1}\iota\alpha = \pm\iota.$$

Entweder ist α deshalb mit ι vertauschbar oder, wegen $\omega^{-1}\iota\omega = -\iota$, die Zahl $\omega\alpha$; α oder $\omega\alpha$ sind dann in i gelegen. Wegen der Gleichseitigkeit von $\mathfrak{J}\alpha$ und $\mathfrak{J}\omega\alpha$ gilt nun $(\mathfrak{J}\alpha)^2 = \mathfrak{J}n(\alpha)$ und $(\mathfrak{J}\omega\alpha)^2 = \mathfrak{J}n(\omega\alpha)$, und deshalb auch $(\mathfrak{i}\alpha)^2 = \mathfrak{i}n(\alpha)$ oder $(\mathfrak{i}\omega\alpha)^2 = \mathfrak{i}n(\omega\alpha)$, je nachdem α oder $\omega\alpha$ in i enthalten waren. Eine solche Gleichung ist aber höchstens dann möglich, wenn $\mathfrak{i}\alpha$ bzw. $\mathfrak{i}\omega\alpha$ aus i oder $\mathfrak{i}(1+\iota)$ durch Multiplikation mit einer rationalen Zahl entstehen; das analoge gilt dann auch für $\mathfrak{J}\alpha$ bzw. $\mathfrak{J}\omega\alpha$. Folglich gibt es wirklich außer $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}(1+\iota)$, $\mathfrak{J}\omega$, $\mathfrak{J}(1+\iota)^{-1}\omega$ kein gleichseitiges Hauptideal, welches die Differente teilt, und alle ambigen Ideale von $\mathfrak{J}$ verteilen sich auf 2^{a-2} oder 2^{a-1} Klassen, je nachdem d gerade oder ungerade ist. Die Anzahl dieser Klassen ist h_2, womit die diesbezügliche Behauptung des Satzes 2 bewiesen ist.

In gleicher Weise wird h_3 bestimmt; diese Zahl ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die Algebra $\mathfrak{Q}$ eine Zahl ϱ mit $\varrho^3 = 1$ bzw. $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ enthält, dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Diskriminante des durch ϱ erzeugten kommutativen Unterkörpers von $\mathfrak{Q}$, diese hat den Wert -3, nach keinem Primteiler von d ein quadratischer Rest ist[5]). Es sei jetzt $h_3 \neq 0$. $\mathfrak{r} = [1, \varrho]$ ist die Hauptordnung eines quadratischen Körpers mit der Idealklassenzahl 1, demzufolge ergibt sich h_3 wiederum als die Maximalzahl nicht äquivalenter gleichseitiger Ideale für eine Maximalordnung $\mathfrak{J}$, welche $\mathfrak{r}$ umfaßt. Auch jetzt genügt es, allein die Differententeiler zu untersuchen. Ist d durch 3 teilbar, so ist $\mathfrak{J}(1+2\varrho)$ ein Hauptideal, welches die Differente teilt. Aus der Bedingung, daß -3 nach allen von 3 verschiedenen Primteilern von d ein quadratischer Nichtrest ist, folgt wie oben, daß die Algebra $[1, P, \Omega, P\Omega]$ mit den Multiplikationsgesetzen

$$P^2 = -3, \quad \Omega^2 = d = -|d|, \quad P\Omega + \Omega P = 0$$

isomorph mit $\mathfrak{Q}$ ist, und daß $\mathfrak{J}$ eine Zahl ω mit

$$\omega^2 = d, \qquad \omega^{-1}\varrho\,\omega = \overline{\varrho}$$

enthält ($\overline{\varrho}$ bezeichnet das zu ϱ konjugierte Quaternion). $\mathfrak{J}\omega$ ist dann ein die Differente teilendes Hauptideal. Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{J}$ nur die Einheiten ± 1, $\pm\varrho$, $\pm\overline{\varrho}$ enthält, folgt dann schließlich, daß $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}\omega$ und für durch 3 teilbares d noch $\mathfrak{J}(1+2\varrho)$ und $\mathfrak{J}(1+2\varrho)^{-1}\omega$ alle Hauptideale sind, welche die Differente von $\mathfrak{J}$ teilen. Somit ist jetzt $h_3 = 2^{a-2}$ bzw. $= 2^{a-1}$, je nachdem d durch 3 teilbar ist oder nicht. Der Satz 2 ist damit bewiesen.

3. Im Beweise für Satz 1 bezeichne

$\zeta(s)$ die Zetafunktion der Algebra $\mathfrak{Q}$,
$\mathfrak{d}$ die Diskriminante von $\mathfrak{Q}$ in bezug auf ihren Grundkörper k,
$\zeta_0(s)$ die Zetafunktion von k,
h_0 die Idealklassenzahl von k,
D_0 die Diskriminante von k in bezug auf den rationalen Zahlkörper,
R_0 den Regulator von k und
w_0 die Anzahl der Einheitswurzeln von k;

da k total reell ist, enthält k nur die Einheitswurzeln $+1$ und -1. Die Einheitengruppe E_0 von k ist das direkte Produkt der durch 1 und -1 erzeugten zyklischen Gruppe mit der größten einheitswurzelfreien Untergruppe E_0' von E_0; diese letztere wird durch $r = n-1$ Einheiten erzeugt, wenn n den Grad von k bedeutet.

Nun ist

$$\zeta(s) = \zeta_0(2s)\,\zeta_0(2s-1)\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{d}}(1 - N\mathfrak{p}^{1-2s})\ ^{7})$$

und

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s=1}(s-1)\,\zeta_0(s)\,\frac{\zeta_0(2)}{2}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{d}}\frac{(N\mathfrak{p}-1)}{N\mathfrak{p}};$$

beachtet man die bekannte Tatsache

$$\mathfrak{d} = \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{d}}\mathfrak{p}^2,$$

so folgt jetzt

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s) = \frac{h_0\,\zeta_0(2)\,2^n R_0}{2\,w_0\,|\sqrt{N\mathfrak{d}}|\,|\sqrt{D_0}|}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{d}}(N\mathfrak{p}-1). \tag{1}$$

Andererseits ist

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s) = \sum_{\mathfrak{R}}\lim_{s=1}(s-1)\,\zeta(s,\mathfrak{R}), \tag{2}$$

wobei rechts über die Zetafunktionen $\zeta(s,\mathfrak{R})$ aller Linksidealklassen $\mathfrak{R}$ für eine feste Maximalordnung $\mathfrak{J}_0$ zu summieren ist.

---

[7]) K. Hey [2]); S. 9.

Es sei jetzt $\mathfrak{J} = [\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{4n}]$ die Rechtsordnung irgendeines Ideals aus einer Linksklasse $\mathfrak{K}$ und $E_\mathfrak{J}$ ihre Einheitengruppe. Diese wird unter Benutzung von $\mathfrak{J}$ als Darstellungsmodul als lineare Substitutionsgruppe im Raume der Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots, u_{4n}$ der allgemeinen Zahl $\sum_{i=1}^{4n} \iota_i u_i$ von $\mathfrak{J}$ dargestellt, dabei bleibt der Teilraum

$$|N(\Sigma \iota_i u_i)| = |N((u))| \leqq 1$$

invariant. Nun läßt sich wie in Zahlkörpern ohne Benutzung tiefliegender Eigenschaften der Zetafunktion die Gleichung

$$\lim_{s=1} (s-1)\zeta(s, \mathfrak{K}) = \int_{E_\mathfrak{J};\, |N((u))| \leqq 1} \ldots \int du_1 \ldots du_{4n}$$

beweisen, wobei über einen Fundamentalbereich von $E_\mathfrak{J}$ innerhalb von $|N((u))| \leqq 1$ zu integrieren ist[8]). Die Einheitengruppe E_0 von k ist eine Untergruppe von $E_\mathfrak{J}$, bezeichnet $(E_\mathfrak{J} : E_0) = w_\mathfrak{J}$ ihren Index in $E_\mathfrak{J}$, so ist offenbar

$$\lim_{s=1} (s-1)\zeta(s, \mathfrak{K}) = \frac{1}{w_\mathfrak{J}} \int_{E_0;\, |N((u))| \leqq 1} \ldots \int du_1 \ldots du_{4n}, \tag{3}$$

falls $w_\mathfrak{J}$ endlich ist. Für das rechtsstehende Integral wird sich aber unten ein endlicher Wert ergeben, dann muß $w_\mathfrak{J}$ in der Tat endlich sein.

Zur Berechnung des Integrals (3) werden k und $\mathfrak{Q}$ als hyperkomplexe Systeme über dem rationalen Zahlkörper aufgefaßt, darauf wird letzterer zu dem reellen Zahlkörper erweitert. Jetzt besitzt k eine Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$, wobei die e_i orthogonale Idempotente sind; und $\mathfrak{Q}$ besitzt eine Basis $e_1, e_1\tau_1, e_1\tau_2, e_1\tau_3, \ldots, e_n\tau_3$, wenn τ_1, τ_2, τ_3 die Basiseinheiten der Hamiltonschen Quaternionen bezeichnen. Diese Basis von $\mathfrak{Q}$ hat die Diskriminante 2^{4n}, mithin gelangt man von $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{4n}$ zu dieser neuen Basis durch eine lineare Transformation mit der Determinante

$$\frac{2^{2n}}{|\sqrt{N\mathfrak{d}}|\, D_0^2}.$$

In (3) werden jetzt neue Integrationsveränderliche $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, \ldots, x_{n4}$ eingeführt, für welche

$$e_1 x_{11} + e_1\tau_1 x_{12} + e_1\tau_2 x_{13} + e_1\tau_3 x_{14} + e_2 x_{21} + \ldots + e_n\tau_3 x_{n4} = \sum_{i=1}^{4n} \iota_i u_i$$

gilt. Dann geht $|N((u))| \leqq 1$ in $|\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{4} x_{ik}^2| \leqq 1$ über, und es ist

$$\lim_{s=1} (s-1)\zeta(s, \mathfrak{K}) = \frac{2^{2n}}{w_\mathfrak{J}\, |\sqrt{N\mathfrak{d}}|\, D_0^2} \int_{E_0;\, |\Pi\Sigma x_{ik}^2| \leqq 1} \ldots \int dx_{11} \ldots dx_{n4}. \tag{4}$$

---

[8]) Einen anderen Beweis liefert Frl. Hey a. a. O. [2]); Formeln (41) und (58).

Erstreckt man hierin das Integral auf der rechten Seite über einen Fundamentalbereich der größten einheitswurzelfreien Untergruppe E_0' von E_0, so bekommt man den doppelten Wert, da E_0 gerade die beiden Einheitswurzeln 1 und -1 enthält. Anstatt von (4) bekommt man so

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s,\mathfrak{K}) = \frac{2^{2n}}{2w_3|\sqrt{N\mathfrak{d}}|D_0^2}\int\limits_{E_0';\,|\Pi\Sigma x_{ik}^2|\leqq 1}\cdots\int dx_{11}\ldots dx_{n4}. \tag{5}$$

Nun mögen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive Variable und $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ gegen Null strebende Größen bedeuten, dann ist

$$\int\int\int\int dx_{i1}\,dx_{i2}\,dx_{i3}\,dx_{i4} = \pi^2 x_i\,dx_i + \tfrac{1}{2}\pi^2\,dx_i^2 = \pi^2 x_i\,dx_i,$$

wobei über den Bereich $x_i \leqq x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2 + x_{i4}^2 \leqq x_i + dx_i$ integriert wird. Setzt man daher $x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2 + x_{i4}^2 = x_i$, so wird (5) zu

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s,\mathfrak{K}) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2w_3|\sqrt{N\mathfrak{d}}|D_0^2}\int\cdots\int x_1\ldots x_n\,dx_1\ldots dx_n, \tag{6}$$

erstens nehmen in diesem Integral $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nur positive Werte an, zweitens genügen sie der Ungleichung $\prod_{i=1}^{n} x_i \leqq 1$, und drittens gehören die Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Bereiches, über welchen integriert wird, einem Fundamentalbereich der Gruppe der Quadrate aller Einheiten aus E_0 an; und zwar letzteres deshalb, weil die Punkte $(x_{11}, \ldots, x_{14}, x_{21}, \ldots, x_{n4})$ desjenigen Bereiches, über welchen das Integral (5) erstreckt wird, einem Fundamentalbereich der Gruppe E_0' angehören. Jene Gruppe werde mit E_1 bezeichnet; da E_0 durch n Einheiten erzeugt wird (die Einheit -1 ist mitzuzählen), so ist der Index von E_1 in E_0 gleich 2^n:

$$(E_0 : E_1) = 2^n.$$

(6) wird nun in zweierlei Weise umgeformt: erstens lassen wir für die x_i auch negative Werte zu, dann erhalten wir

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s,\mathfrak{K}) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2^{n+1}w_3|\sqrt{N\mathfrak{d}}|D_0^2}\int\limits_{E_1;\,|\Pi x_i|\leqq 1}\cdots\int|x_1\ldots x_n|\,dx_1\ldots dx_n, \tag{7}$$

zweitens gehen wir zu einer Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ von k in bezug auf den rationalen Zahlkörper über und setzen

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i;$$

dadurch geht (7) in

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s,\mathfrak{K}) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2^{n+1}w_3|\sqrt{N\mathfrak{d}}|\,|D_0|^{3/2}}\int\limits_{E_1;\,|N'((y))|\leqq 1}\cdots\int|N(\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i)|\,dy_1\ldots dy_n \tag{8}$$

über, wobei jetzt

$$N\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i\right) = N'((y))$$

die Normenform der Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bedeutet. Beachtet man, daß E_1 in E_0 den Index 2^n hat, so gilt jetzt für jede positive Zahl t

$$\int_{E_1;\, |N'((y))| \leqq t} \ldots \int dy_1 \ldots dy_n = 2^n \int_{E_0;\, |N'((y))| \leqq t} \ldots \int dy_1 \ldots dy_n = \frac{2^{2n} R_0}{w_0 |\sqrt{D_0}|} t$$

und

$$\int_{E_1;\, |N'((y))| \leqq 1} \ldots \int |N\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i\right)| \, dy_1 \ldots dy_n = \int_0^1 \frac{2^{2n} R_0}{w_0 |\sqrt{D_0}|} t \, dt = \frac{2^{2n-1} R_0}{w_0 |\sqrt{D_0}|};$$

(8) hat also den Wert

$$\lim_{s=1} (s-1)\zeta(s, \mathfrak{R}) = \frac{(2\pi)^{2n} 2^n R_0}{4 w_3 w_0 |\sqrt{N\mathfrak{d}}| D_0^2},$$

woraus sich durch Vergleich mit (1) und (2) die Behauptung ergibt.

(Eingegangen am 1. März 1937.)

Über ein Konvexitätskriterium.

Von

H. Gericke in Freiburg i. Br.

Von der Fläche F sei bekannt, daß sie in allen ihren Punkten außer dem Punkt P Stützhalbkugeln besitzt, deren Halbmesser nach unten nicht beschränkt zu sein brauchen. Frage: Besitzt sie auch in P eine Stützhalbkugel? Das braucht jedenfalls dann nicht der Fall zu sein, wenn F aus mehreren konvexen Teilen, z. B. Kegeln, besteht, die nur den Punkt P gemeinsam haben. Um diesen Fall auszuschließen, setzen wir voraus, daß F der Rand der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}$ einer zusammenhängenden[1]) beschränkten offenen Punktmenge M sei, und behaupten, daß F in diesem Falle stets eine Stützhalbkugel in P besitzt[2]).

Durch P lege ich eine beliebige Ebene E_0 und im Abstand $+d$ und $-d$ die parallelen Ebenen $E(+d)$, $E(-d)$. Von dem Fall, daß E_0 Stützebene ist, können wir absehen, da andernfalls $\overline{M}$ in P sicher eine Stützhalbkugel besitzt. Sei nun $Q(+d)$ bzw. $Q(-d)$ der von $E(+d)$ bzw. $E(-d)$ begrenzte offene Halbraum, der P nicht enthält, $MQ(+d)$, $MQ(-d)$ jeweils der Durchschnitt mit M, $\overline{MQ}(+d)$, $\overline{MQ}(-d)$ die abgeschlossenen Hüllen. Wir zeigen: I. Für jedes (genügend kleine) d ist sowohl $MQ(+d)$ wie $MQ(-d)$ konvex. II. Aus der Konvexität von $MQ(+d)$ und $MQ(-d)$ für beliebiges $d>0$ und für beliebige Lage von E_0 folgt die Konvexität von M und damit von $\overline{M}$.

I. Wir können annehmen, daß die offenen Mengen $MQ(+d)$ und $MQ(-d)$ (für genügend kleines d) beide nicht leer sind, weil andernfalls E_0 Stützebene in P wäre. Wir betrachten die größten zusammenhängenden (offenen) Teilmengen — die Komponenten — k^+ bzw. k^- von $MQ(+d)$ bzw. $MQ(-d)$. Die abgeschlossene Hülle einer jeden Komponente besitzt in jedem Punkt ihrer Begrenzung eine Stützhalbkugel, ist also nach dem Satz von Tietze (siehe [2])) konvex.

[1]) Benutzt wird, daß sich zwei Punkte von M durch einen ganz in M verlaufenden Streckenzug verbinden lassen. Da es sich um eine offene Menge handelt, ist das gleichbedeutend mit „zusammenhängend“ im Sinne der Unzerlegbarkeit in zwei fremde, relativ abgeschlossene Mengen (von denen keine leer ist).

[2]) Die Fragestellung, eine Erweiterung eines Satzes von H. Tietze, Journ. reine angew. Math. 158 (1927), S. 168, stammt von O. Haupt. Ich möchte auch an dieser Stelle Herrn Haupt für die Durchsicht des Manuskripts dieser Note und eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen danken. Über eine ähnliche Fragestellung vgl. L. Pasqualini, Acad. R. de Belgique, Bulletin. (5. S.) 22 (1936), S. 1050.

Wir zeigen nun, daß es nur je eine Komponente k^+ bzw. k^- gibt. Damit ist dann die Behauptung I bewiesen.

Dazu wählen wir zwei Punkte S_1, S_2 aus $MQ(+d)$ und behaupten: Die Strecke $\overline{S_1 S_2}$ gehört zu M.

Beweis: Nach den Voraussetzungen gibt es einen zu M gehörigen Streckenzug Z, der S_1 und S_2 verbindet. Wir unterscheiden die Fälle: A. Es gibt einen solchen Zug, der keinen Punkt links (d. h. im Sinne negativer d-Werte) von E_0 enthält. Nun gehört mit jedem Punkt eine Kugel um ihn zu M. Da die Punktmenge Z abgeschlossen und kompakt ist, haben die Halbmesser dieser Kugeln für die Punkte von Z eine untere Schranke $r > 0$. Dann läßt sich aber Z durch einen Streckenzug Z' ersetzen, dessen Endpunkte S_1 und S_2 sind und der keinen Punkt links von $E\left(\frac{r}{2}\right)$, d. h. zwischen $E\left(\frac{r}{2}\right)$ und E_0, enthält. Also gehören S_1 und S_2 zu derselben Komponente von $MQ\left(+\frac{r}{4}\right)$, also da diese konvex ist, gehört die Strecke $\overline{S_1 S_2}$ ganz zu ihr, d. h. zu M. (Da S_1, S_2 als Innenpunkte vorausgesetzt waren, folgt aus der Konvexität auch, daß $\overline{S_1 S_2}$ keinen Randpunkt enthält).

Der Fall B: es gibt kein Z, das keinen Punkt links von E_0 enthält, führt zu einem Widerspruch. Seien T_1, T_2 zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte von $Z(S_1 \to S_2)$ mit E_0, derart, daß es keinen Bogen $T_1 T_2$ gibt, der ganz aus Punkten von M besteht und keinen Punkt links von E_0 enthält. Sei Z' der Teilstreckenzug $T_1 T_2$ von Z. Dann gibt es ein $s > 0$ derart, daß $E(-s)$ von Z' nur in zwei Punkten V_1, V_2 getroffen wird. Gäbe es nämlich kein solches s, sondern wäre für beliebig kleines s immer noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt von $E(-s)$ und Z' vorhanden, so hätten diese Punkte einen Häufungspunkt auf E_0, der zu Z' gehört, also T_1 oder T_2 sein müßte. In diesem Falle würde dieser Punkt von dem Streckenzug Z' mehrmals durchlaufen. Es ist dann aus Z' ein solcher Teilstreckenzug herauszugreifen, der T_1 und T_2 nur einmal trifft; dann gibt es ein solches s, und V_1 und V_2 gehören zu derselben Komponente von $MQ\left(-\frac{s}{2}\right)$, also gehört die Strecke $\overline{V_1 V_2}$ zu M und damit die Strecke $\overline{T_1 T_2}$ als Grenzlage solcher Strecken zu $\overline{M}$.

Nun sei r der kleinere der Halbmesser der beiden Kugeln um T_1 bzw. T_2, die ganz zu M gehören. Dann kann Z sicher so abgeändert werden, daß an die Stelle von T_1, T_2 Punkte in E_0 aus etwa dem Kreis mit dem Halbmesser $\frac{r}{2}$ um T_1 bzw. T_2 treten. Durch Anwendung der oben gemachten Schlüsse auf die neuen Punkte T_1', T_2' folgt: Es gibt in E_0 ein Rechteck der Breite r, von dem zwei Gegenseiten ganz zu M

gehören, während jede sie verbindende Strecke ganz zu $\overline{M}$ gehört und auch, da Fall A jetzt ausgeschlossen ist, mindestens einen Punkt von F enthält. Sei S ein solcher Punkt von F auf einer Strecke g, die den Punkt P nicht enthält. Von S aus gehe man auf g in einer der beiden Richtungen bis zu dem letzten auf g liegenden Randpunkt R des Durchschnitts $E_0 M$. Ein solcher existiert, da die Endpunkte von g zu M gehören. In beliebiger Nähe von R liegen auf g Punkte von M, die Stützhalbkugel in R bzw. die ihr angehörende Stützkreisscheibe kann also die Strecke g nicht enthalten, d. h. die eine der beiden von R ausgehenden Halbgeraden von g müßte aus Außenpunkten von $\overline{M}$ bestehen, was nicht der Fall ist.

II. Man kann nun folgendermaßen schließen: Die Schnittkurven $E(\pm d)\cdot F$ sind alle konvex. Mit $d \to 0$ konvergieren sie gegen die Schnittkurve $E_0 F$, die damit auch konvex ist. Jeder ebene Schnitt durch P ist also eine konvexe Kurve, und daraus folgt leicht, daß F in P eine Stützhalbkugel hat. Die Durchführung der Schritte im Einzelnen ist jedoch etwas umständlich. Herr Haupt teilt mir folgenden einfachen Beweis für die Konvexität von M mit: Man betrachte zwei Punkte R_1, R_2 von M und ihre abgeschlossene Verbindungsstrecke r. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: a) *P ist fremd zu r.* Dann wähle man E_0 fremd zu r (was möglich ist), so daß, für ein geeignet gewähltes d, r ganz in $MQ(+d)$ oder $MQ(-d)$ liegt, also ganz in M, w. z. b. w. — b) *P ist in r enthalten.* Nach Voraussetzung ist P nicht innerer Punkt von $\overline{M}$. Folglich kann man durch beliebig kleine Verschiebung von R_1 und R_2 zu zwei anderen (inneren) Punkten Q_1, Q_2 von M übergehen, deren abgeschlossene Verbindungsstrecke q fremd zu P ist und *einen zu $\overline{M}$ fremden Punkt A enthält.* Man kann jetzt wieder durch P eine zu q fremde Ebene E_0 legen und schließen, daß q ganz zu M gehört. Das ist ein Widerspruch dazu, daß A auf q liegt und nicht in $\overline{M}$.

Der Beweis gilt wörtlich für $(n-1)$-dimensionale Flächen F im n-dimensionalen Raum. An die Stelle des Punktes P kann eine $(n-3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Ausnahmepunkten treten, die wieder mit P bezeichnet sei, welche die folgende Eigenschaft hat: Ist eine beliebige zu P fremde Gerade r gegeben, so gibt es eine ($n-1$-dimensionale) Hyperebene, die P enthält und zu r fremd ist; z. B. kann P eine $n-3$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit sein.

(Eingegangen am 13. März 1937.)

Beweis des Satzes $x^{-1} \lg^q x (\psi(x) - x) \to 0$ ohne Überschreitung der Geraden $\sigma = 1$.

Von

Alfred Kienast in Küsnacht-Zürich.

Im Jahre 1899 bewies Herr de la Vallée Poussin unter Verwendung seines Satzes:

(1) $$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - \frac{\varkappa}{\lg t},\ t > t_0$$

und Verwendung der Hadamardschen Sätze über Existenz und Verteilung der Nullstellen von $\zeta(s)$ die Formel

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\lg u} = 0\,(\tilde{x}\, e^{-\alpha\sqrt{\lg x}}).$$

Aus dieser ergibt sich, daß

$$\psi(x) - x = \sum_1^x \Lambda(k) - x$$

von derselben Größenordnung ist und somit speziell, daß für jedes $0 \leqq q$

(2) $$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \lg^q x (\psi(x) - x) = 0.$$

Herr E. Landau hat den Beweis für obiges Resultat in weitgehendem Maße vereinfacht. Danach braucht man für den Beweis von (2) folgendes:

1. den Satz (1).
2. Obere Abschätzungen der absoluten Beträge von $\zeta(s)$, $\zeta'(s)$, $\zeta^{-1}(s)$ *im Gebiete von* (1).
3. Den Cauchyschen Satz.

Herrn Landau [8]*) ist es vor einigen Jahren gelungen, den speziellen Fall $q = 0$ von (2),

$$\psi(x) \sim x,$$

was äquivalent ist mit dem Primzahlsatz $\pi(x) \sim x \lg^{-1} x$, in noch viel einfacherer Weise zu beweisen, „indem aus $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1$ alles ziemlich schnell mit reeller Integralrechnung folgt". Er sagt: „Die Hauptsache dabei ist natürlich, daß 2. wegfiel."

Landaus Beweis hierfür beruht auf einer Identität, deren erste Anfänge bei Ikehara sich finden, die von S. Bochner [1] weiter entwickelt und von A. E. Ingham [3] allgemein bewiesen wurde. Schreibt man sie

*) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Verzeichnis am Schluß des Aufsatzes.

sofort mit den unten allein interessierenden Spezialisationen und mit den Bezeichnungen

$$\psi(x) = \sum_{1}^{x} \Lambda(n), \quad 0 \leqq x;$$

$$H(u) = e^{-u}\,\psi(e^u), \quad u \geqq 0;$$

$$\Phi(s) = \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1}\Big)\frac{1}{s} = \int_0^\infty (H(u)-1)\,e^{-u(s-1)}\,du, \quad 1 < \sigma;$$

$$k(x) = 1 - |x|; \quad K(y) = \int_{-1}^{+1} k(x)\,e^{-yxi}\,dx = \Big(\frac{\sin\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y}\Big)^2,$$

so lautet sie

$$(3)\quad \int_{-T}^{+T} \Phi(\sigma+it)\,k(tT^{-1})\,e^{\omega ti}\,dt = \int_0^\infty (H(u)-1)\,TK\{T(u-\omega)\}\,e^{-u(\sigma-1)}\,du \qquad (1<\sigma).$$

Wenn man voraussetzt:

$$(4)\qquad \Phi(s) \text{ ist stetig für } 1 \leqq \sigma,\ |t| \leqq T,$$

was hier erfüllt ist, weil die hier speziell benutzte Funktion $\Phi(s)$ für $\sigma \geqq 1$ regulär ist, dann kann man zur Grenze $\sigma \to 1+0$ übergehen. Macht man noch in der rechten Seite von (3) die Substitution $u = \omega + yT^{-1}$, so folgt die Formel

$$(5)\quad J = \int_{-T}^{+T} \Phi(1+it)\,k(tT^{-1})\,e^{\omega ti}\,dt = \int_{-T\omega}^{\infty} H(\omega + yT^{-1})\,K(y)\,dy - \int_{-T\omega}^{\infty} K(t)\,dt$$

aus der Landau [8] $\psi(x) \sim x$ gewinnt.

Die Identität, von der (3), dann (5) Spezialfälle sind, ist von den genannten Autoren nur benutzt worden, um für irgend ein festes $T > 0$ zu schließen, daß die linke Seite als Fourierkonstante einer (wegen (4)) stetigen Funktion für $\omega \to \infty$ gegen Null strebt. Die Behandlung der rechten Seite führt dann zu einem Satze Tauberscher Art.

Man kann jedoch die linke Seite (und auch die rechte Seite) genauer approximieren; dadurch entsteht eine Aussage über einen Grenzwert einschließlich des Verhaltens des „Restes". Man gewinnt somit ein Ergebnis, das weiter reicht, als die Aussagen, die bei Sätzen Tauberscher Art bisher ausschließlich erreicht wurden.

Diese Erscheinung habe ich in [7] im Falle der Konvergenz einer Reihe benutzt; im vorliegenden Aufsatz wird Analoges ausgeführt in einem Falle, der in Hardy und Littlewoods Bezeichnung zu den „Tauberschen Sätzen für Reihen mit positiven Koeffizienten" gehört.

Das Ziel dieses Aufsatzes ist, zu zeigen, daß man (2) aus (5) ableiten kann. Hierzu sind erforderlich:

a) Obere Abschätzungen der absoluten Beträge von

$$D_t^n \zeta(1+it),\ n=0,1,2,\ldots;\ \zeta^{-1}(1+it).$$

b) Die Tatsache, daß die Ableitungen

$$D_t^n\left\{(1+it)^{-1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+it)-\frac{1+it}{it}\right)\right\}$$

für $t \gtrless 0$ existieren und stetig sind.

Die Abschätzungen a) sind mit Hilfe der von Landau herrührenden Überlegungen, Handbuch der Primzahlen, § 46, 47, elementar zu gewinnen. Die Eigenschaft b) folgt daraus, daß $\Phi(s)$ für $\sigma \geqq 1$ regulär ist, so daß man über das Verhalten der ζ-Funktion keine Kenntnisse braucht, die weiter gehen als diejenigen, die man zur Erreichung der Formel (5) schon verwendet hat. Dies war bisher nur für den Fall $q=0$ von (2) bekannt.

Die hierdurch erzielte Verminderung der Zahl der Ergebnisse, zu deren Beweis man die Kenntnis des Verhaltens der ζ-Funktion links der Geraden $\sigma=1$ nötig hat und die oben erwähnte Verfeinerung der aus (5) gezogenen Folgerung sind die beiden neuen Dinge dieses Aufsatzes (vgl. die Zusätze am Schluß des Aufsatzes).

I.

Um das beschriebene Ziel zu erreichen, ist es nötig, das Integral J bezüglich ω und T gleichzeitig abzuschätzen. Da $\Phi(1+it)(1-|t|T^{-1})$ und $e^{\omega ti}$ und ihre Ableitungen aller Ordnungen in den Intervallen $(-T,0)$, $(0,+T)$ stetig sind, so kann man partielle Integration verwenden; man erhält

$$\begin{aligned} J &= |\Phi(1+it)(1-|t|T^{-1})(\omega i)^{-1}e^{\omega ti}|_{-T}^{0}+|\ldots|_{0}^{+T} \\ &\quad -\int_{-T}^{+T} D_t\{\Phi(1+it)(1-|t|T^{-1})\}e^{\omega ti}dt(\omega i)^{-1} \\ &= i\omega^{-1}\int_{-T}^{+T} D_t\Phi(1+it)(1-|t|T^{-1})e^{\omega ti}dt \\ &\quad +i(T\omega)^{-1}\{\int_{-T}^{0}-\int_{0}^{T}\}\Phi(1+it)e^{\omega ti}dt = i\omega^{-1}J_1+(T\omega)^{-1}K_0. \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, was entsteht, wenn man J_1 in derselben Weise transformiert.

$$J_1 = i\omega^{-1}J_2+(T\omega)^{-1}K_1$$

usw.

$$J_n = i\omega^{-1}J_{n+1}+(T\omega)^{-1}K_n,$$

wobei

$$(6) \qquad J_n = \int_{-T}^{+T} D_t^n \Phi(1+it)(1-|t|T^{-1})\, e^{\omega t i}\, dt$$

$$(7) \qquad K_n = i\{\int_{-T}^{0} - \int_{0}^{+T}\} D_t^{n-1} \Phi(1+it)\, e^{\omega t i}\, dt.$$

Also ist

$$(8) \quad J = (i\omega^{-1})^n J_n + (T\omega)^{-1}\{(i\omega^{-1})^{n-1} K_{n-1} + (i\omega^{-1})^{n-2} K_{n-2} + \ldots + K_0\}.$$

Die Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Abschätzung von $D_t^{\lambda}\Phi(1+it)$. Setzt man

$$\Phi(s) = s^{-1}\Phi_1(s); \qquad \Phi_1(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} - 1,$$

so ist

$$(9) \qquad \Phi^{(\lambda)}(s) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\varkappa} (-1)^{\lambda-\varkappa} (\lambda-\varkappa)!\, s^{\varkappa-\lambda-1}\, \Phi_1^{(\varkappa)}(s),$$

$$(10) \qquad \Phi_1^{(\varkappa)}(s) = -\sum_{\tau=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\tau} \zeta^{(\varkappa+1-\tau)} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{(\tau)} - \frac{(-1)^{\varkappa}\varkappa!}{(s-1)^{\varkappa+1}}.$$

Schließlich kann man $D_s^{(\tau)}(\zeta^{-1})$ darstellen durch $\zeta^{-\nu}$ und $\zeta^{(\nu)}$ mit Hilfe der Formel für die Differentiation der Potenzen von Funktionen (z. B. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis (1895) II, S. 14 (24)). Man erhält

$$(11) \qquad D_s^{(\tau)}(\zeta^{-1}(s)) = \sum_{\varkappa=1}^{\tau} A_{\varkappa} V_{\varkappa} \zeta^{-\varkappa-1}, \quad A_{\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \frac{\tau+1}{\varkappa+1} \binom{\tau}{\varkappa}$$

$$(12) \qquad V_{\varkappa} = D_s^{\tau} \zeta^{\varkappa} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\varkappa}=\tau} (\tau)_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\varkappa}} \zeta^{(\alpha_1)} \zeta^{(\alpha_2)} \ldots \zeta^{(\alpha_{\varkappa})}.$$

Der letzte Ausdruck ist die Erweiterung der Leibnitzschen Formel für den Differentialquotienten des Produktes auf ein Produkt von $\varkappa$ Faktoren; die Koeffizienten sind diejenigen des „polynomischen Satzes".

In diesen Formeln verwendet man nun folgende oberen Abschätzungen:

I. $|1+it|^{-1} < |t|^{-1}$ für $1 < |t|$.

II. Satz: *Es ist für* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\zeta^{(\nu)}(s)| \leqq B(\nu)(\lg t)^{\nu+1}, \qquad 1 \leqq \sigma,\ 2 \leqq t.$$

Dies kann bewiesen werden durch elementare Betrachtungen, die analog verlaufen wie diejenigen, die Landau im Handbuch S. 170 ausführt im Falle $\nu = 0$ (ebenso Ingham [2], S. 27).

III. Satz: *Es ist*

$$|\zeta^{-1}(s)| \leqq E(\lg t)^7; \qquad 1 \leqq \sigma \leqq 2,\ 3 < t.$$

Beweis: Landau, Handbuch § 47; Ingham [2], S. 29—30.

Berücksichtigt man diese Abschätzungen in (12) und (11), so ergibt sich

$$|D_s^{\tau}(\zeta^{-1}(s))| \leqq G(\tau)(\lg t)^{9\tau+7}; \qquad 1 \leqq \sigma \leqq 2,\ 3 < t, \tag{13}$$

wo die positive Zahl G nicht von σ und t abhängt.

(13), I., II. eingeführt in (10) geben

$$|\Phi_1^{(\varkappa)}(s)| \leqq L(\varkappa)(\lg t)^{9\varkappa+9}; \qquad 1 \leqq \sigma \leqq 2,\ 3 < t$$

und dies in (9) liefert

$$|\Phi^{(\lambda)}(s)| \leqq M(\lambda)\frac{1}{t}(\lg t)^{9\lambda+9}.$$

Hiermit erhält man in (6), bei festem $d > 3$

$$|J_n| \leqq \Big|\int_{-d}^{+d} D_t^n \Phi(1+it)\Big(1-\frac{|t|}{T}\Big)e^{\omega t i}\,dt\Big| + 2P(n)\int_{d}^{T}(\lg t)^{9n+9}\,d\lg t$$

$$\leqq Q_1(\lg T)^{9n+10}; \tag{14}$$

Q_1 bleibt beschränkt bei festem n, wenn $\omega\to\infty$, $T\to\infty$.

Analog erhält man aus (7)

$$|K_n| \leqq Q_2(\lg T)^{9n+1}. \tag{15}$$

Verwendet man (14) und (15) in (8), so folgt

$$|J| \leqq U_1\frac{(\lg T)^{9n+10}}{\omega^n} + U_2\frac{(\lg T)^{9n-8}}{T\omega} = U_1\frac{(\lg T)^{9n+10}}{\omega^n} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big). \tag{16}$$

U_1 und U_2 bleiben beschränkt, wenn $\omega\to\infty$, $T\to\infty$.

II.

Die rechte Seite in (5) wird nach dem von Landau [8] befolgten Verfahren behandelt. Es findet ständig Verwendung, daß $K(t)$ nicht negativ ist und nur isolierte Nullstellen besitzt. Man hat

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt; \quad L_1 = \int_{T\omega}^{\infty} K(t)\,dt \leqq 4(T\omega)^{-1};$$

$$\int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} K(t)\,dt = K - 2\int_{\sqrt{T}}^{\infty} K(t)\,dt = K - 2L_2; \quad L_2 \leqq 4(T)^{-\frac{1}{2}};$$

$$e^{2/\sqrt{T}} \leqq 1 + \frac{2e}{\sqrt{T}} \quad \text{für} \quad 4 < T;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} \leqq 1 + 2x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Ferner wird benutzt, daß $\Lambda(n) \geqq 0$, somit $e^{u}H(u) \geqq 0$ monoton zunimmt, also

$$H(u_2) \geqq H(u_1)\,e^{u_1-u_2} \quad \text{für} \quad u_2 \geqq u_1.$$

Es ergibt sich aus (5)

$$J = \int_{-T\omega}^{\infty} H(\omega + y\,T^{-1})\,K(y)\,dy - (K - L_1) = H_2 - K + L_1;$$

man ersetze in H_2 y durch $-y$, ω durch $\omega + T^{-\frac{1}{2}}$ und verwende für H die Ungleichung; dann folgt

$$J \geqq \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} H\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T}\right) K(y)\,dy - K + L_1$$

$$\geqq H(\omega)\,e^{-2/\sqrt{T}} \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} K(y)\,dy - K + L_1$$

also, wenn $T > 16^2\,K^{-2}$, damit $2\,L_2\,K^{-1} < \frac{1}{2}$,

$$H(\omega) \leqq \left(1 + \frac{2e}{\sqrt{T}}\right)\left(1 + \frac{1}{K}\,[J + L_1]\right)\left(1 + \frac{4\,L_2}{K}\right)$$

und dies ist, wenn man für J (16) und für L_1, L_2 die angegebenen Schranken beachtet, $9n + 10 = m$ setzt,

$$H(\omega) \leqq 1 + \frac{c_1}{\sqrt{T}} + \frac{c_2}{\omega^n}\,(\lg T)^m, \tag{17}$$

wo die c_ν beschränkt sind für $\omega \to \infty$, $T \to \infty$.

Somit ist $H(\omega) < 2$ für $T > T_1$, $\omega > \omega_1$; also ist $H(\omega)$ beschränkt für alle ω, $H(y) < C$.

Zweitens ersetzt man in H_2 y durch $-y$, ω durch $\omega - T^{-\frac{1}{2}}$; das gibt

$$K - L_1 - |J| \leqq \int_{-\infty}^{-\sqrt{T}} \ldots + \int_{-\sqrt{T}}^{+\sqrt{T}} H\left(\omega - \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{y}{T}\right) K(y)\,dy + \int_{\sqrt{T}}^{\infty} \ldots$$

$$\leqq H_3 + H(\omega)\,e^{2/\sqrt{T}}\,(K - 2\,L_2) + H_4;$$

also

$$H(\omega) \geqq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{T}}\right)\left(1 - \frac{1}{K}\,[L_1 + |J| + H_3 + H_4]\right).$$

Berücksichtigt man wieder (16) für J, und

$$H_3,\ H_4 < C\,L_2$$

so folgt

$$H(\omega) \geqq 1 - \frac{c_3}{\sqrt{T}} - \frac{c_4}{\omega^n}\,(\lg T)^m, \tag{18}$$

wo die c_ν beschränkt bleiben für $\omega \to \infty$, $T \to \infty$.

In (17) und (18) sind ω und T unabhängig voneinander; sie können beliebig groß sein. Wählt man daher $T = \omega^{2n}$, so folgt für jedes beliebig kleine positive ε

$$\omega^{n-1}\,|H(\omega) - 1| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \omega_2 < \omega.$$

Dies ist die Limesgleichung (2).

Zusätze.

1. Der vorangehende Beweis beruht darauf, daß $\Phi(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ regulär ist. Es ist möglich, ihn restlos unabhängig zu machen von den Eigenschaften der ζ-Funktion links dieser Geraden, wenn man das Verfahren benutzt, das ich verwendet habe in [5].

2. Die Abschätzung des Integrals J kann mit Hilfe des Cauchyschen Satzes und unter Voraussetzung des Ergebnisses (1) (oder eines analogen) wesentlich genauer erhalten werden. Das erfordert aber Überlegungen, die links der Geraden $\sigma = 1$ verlaufen. Ohne solche auszukommen, war der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.

3. Aus (2) läßt sich unter Heranziehung meiner Resultate in [4] elementar ableiten, daß die Dirichletschen Reihen für $\zeta^{\varrho}(s)$, $\varrho \leqq -1$, $\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \zeta(s)\right)^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, auf der Geraden $\sigma = 1$ konvergieren.

S. Bochner.
[1] Ein Satz von Landau und Ikehara. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 1—9.
A. E. Ingham.
[2] The Distribution of Prime Numbers. Cambridge Tracts Nr. 30; 1932.
[3] On Wieners Method in Tauberian Theorems. Proc. London M. S. (2), 38 (1935), S. 458—480.
A. Kienast.
[4] Über die Äquivalenz zweier Ergebnisse der analytischen Zahlentheorie. Math. Annalen 95 (1925), S. 427—445.
[5] Über die Unabhängigkeit des Beweises des Primzahlsatzes vom Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln. Comment. Math. Helv. 8 (1935), S. 130—141.
[6] Hierzu Corrigenda, Comment. Math. Helv. 9 (1936), S. 40/41.
[7] Erweiterung eines Konvergenzsatzes von M. Riesz für Dirichletsche Reihen. Comment. Math. Helv. 9 (1936), S. 124—134.
E. Landau.
[8] Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss, Berlin 1932, S. 514—521.

(Eingegangen am 10. April 1937.)

Darstellungstheorie der affinen Gruppe.

Von

Wilhelm Specht in Breslau.

I.

Einer der bedeutendsten Teile der Gruppentheorie ist die Darstellungstheorie, die die Aufgabe zum Inhalte hat, alle zu einer vorgegebenen, endlichen oder unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppen linearer homogener Substitutionen zu bestimmen. Jedem Element A der Gruppe $\mathfrak{G}$ soll also eine quadratische Matrix $D(A)$ eines festen Grades N mit reellen oder komplexen Elementen eindeutig zugeordnet werden mit der Maßgabe, daß, falls zwischen drei Elementen A, B, C aus $\mathfrak{G}$ die Beziehung

$$A\,B = C$$

besteht, die gleiche Beziehung zwischen den zugeordneten Matrizen gelten soll:

$$D(A)\,D(B) = D(C).$$

Die Bestimmung aller Matrizengruppen mit dieser Eigenschaft macht den Inhalt der *Darstellungstheorie der Gruppe* $\mathfrak{G}$ aus; die Gruppe $D(\mathfrak{G})$ der Matrizen $D(A)$ nennt man eine *Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Da die Transformation mit einer festen, regulären Matrix P aus einer Darstellung $D(\mathfrak{G})$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ in der *ähnlichen* Gruppe $P^{-1}D(\mathfrak{G})P$ eine neue Darstellung von $\mathfrak{G}$ erzeugt, teilt sich die Menge aller Darstellungen in Klassen *ähnlicher* oder *nicht wesentlich verschiedener* Darstellungen, und man braucht deshalb zur Lösung des Darstellungsproblems aus jeder Klasse nur einen Vertreter zu bestimmen. Diese Tatsache bedeutet im allgemeinen eine wesentliche Vereinfachung des Problems, da unter Umständen sich in jeder Klasse von Darstellungen ein Vertreter besonders einfacher Gestalt angeben läßt.

Man nennt eine Darstellung $D(\mathfrak{G})$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ *irreduzibel*, wenn sich auf keine Weise durch eine Transformation der geschilderten Art die Gruppe $D(\mathfrak{G})$ in eine ähnliche Gruppe $D^*(\mathfrak{G})$ der Gestalt:

$$D^*(\mathfrak{G}) = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ D_{21}(\mathfrak{G}) & D_2(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

überführen läßt, worin $D_1(\mathfrak{G})$, $D_2(\mathfrak{G})$ ihrerseits Darstellungen von $\mathfrak{G}$ sind, dagegen *reduzibel* im gegenteiligen Falle. Zu einer reduziblen Darstellung $D(\mathfrak{G})$ gibt es dann stets eine ähnliche Darstellung:

$$D^*(\mathfrak{G}) = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{G}) & 0 & \dots & 0 \\ D_{21}(\mathfrak{G}) & D_2(\mathfrak{G}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{r1}(\mathfrak{G}) & D_{r2}(\mathfrak{G}) & \dots & D_r(\mathfrak{G}) \end{pmatrix},$$

in der $D_1(\mathfrak{G})$, $D_2(\mathfrak{G})$, ..., $D_r(\mathfrak{G})$ irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$ bedeuten. Kann man sogar eine zu $D(\mathfrak{G})$ ähnliche Gruppe angeben, die von der Form ist:

$$D^*(\mathfrak{G}) = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{G}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(\mathfrak{G}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_r(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

mit irreduziblen Darstellungen $D_\varrho(\mathfrak{G})$, so heißt die Darstellung $D(\mathfrak{G})$ *vollreduzibel*.

Beschränkt man nun die Untersuchung der Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf vollreduzible Darstellungen, oder liegt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ vor, deren Darstellungen sämtlich vollreduzibel sind, so ist das Darstellungsproblem auf die Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen zurückgeführt. Dies bedeutet aber eine starke Erleichterung für die Behandlung der Aufgabe, da irreduzible Darstellungen einer Gruppe wegen ihrer fundamentalen Eigenschaften wesentlich einfacher zu erfassen sind. Aus diesem Grunde hat man sich bei darstellungstheoretischen Untersuchungen fast immer [1]) auf diese Fälle beschränkt.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit hielt es daher von Interesse, die Darstellungstheorie einer Gruppe zu entwickeln, die notwendig auch die Untersuchung der nichtvollreduziblen Darstellungen erfordert. Dabei machen sich naturgemäß bedeutende Schwierigkeiten bemerkbar, da ja die Struktur nichtvollreduzibler Substitutionsgruppen nur sehr schwer zu erfassen ist.

Als ein hierfür besonders geeignetes Beispiel erschien dem Verfasser *die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ aller Abbildungen des n-dimensionalen affinen Raumes auf sich*, d. i. die Gruppe aller linearen Transformationen in n Veränderlichen der Gestalt:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + a_1 \\ x_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + a_2 \\ \vdots \\ x_n' = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + a_n \end{cases}$$

[1]) Soweit mir die Literatur bekannt ist, macht allein die folgende Arbeit eine Ausnahme: I. Schur, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1928, S. 100. [Weiterhin mit *Schur* (2) zitiert.]

mit reellen Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}$ und a_μ ($\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$) und nichtverschwindender Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}|$.

Neben der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ werden auch noch zwei wichtige Untergruppen behandelt werden, nämlich die Gruppe $\mathfrak{U}_n$ aller Elemente von $\mathfrak{A}_n$ mit der Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}| = +1$ und die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ aller Elemente von $\mathfrak{A}_n$ mit der Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}| = \pm 1$, da die gleichzeitige Untersuchung dieser Gruppen ohne Schwierigkeiten möglich, in einer Hinsicht sogar als notwendig erscheint. Die Gruppe $\mathfrak{U}_n$ wollen wir als die *unimodulare affine Gruppe*, die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ als die *erweiterte unimodulare affine Gruppe* bezeichnen.

Faßt man in der Transformation (1) die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}$ und a_μ als reelle Veränderliche auf, die allein der Beschränkung unterworfen sind, daß die Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}|$ von Null verschieden sein soll, so wird jede Darstellung $D(\mathfrak{A}_n)$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ bestimmt durch das *allgemeine Element*, in dem die Matrixelemente Funktionen der Veränderlichen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ und a_μ sind. Wir werden hier in durchaus natürlicher Beschränkung die Theorie der *stetigen* Darstellungen behandeln, d. h. der Darstellungen, deren allgemeines Element stetige Funktionen der Veränderlichen $\alpha_{\varkappa\lambda}$, a_μ als Matrixelemente besitzt. Unter diesen spielen eine besonders wichtige Rolle die rationalen Darstellungen.

Als Haupthilfsmittel wird die vor allem von I. Schur entwickelte Theorie der rationalen und stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$ herangezogen[2]), deren Resultate als bekannt vorausgesetzt werden. Das Darstellungsproblem der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ wird also nach Zurückführung auf Fragen jener Theorie als gelöst angesehen.

II.

Die affine Gruppe $\mathfrak{A}_n$ der linearen Transformationen (1) ist isomorph der Gruppe aller Matrizen der Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ a_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

mit reellen Elementen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ und a_μ ($\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$) und nichtverschwindender Determinante. Ich verwende für diese Matrizen kurz

[2]) Man vgl. I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1927, S. 664 [weiterhin mit *Schur* (1) zitiert] und *Schur* (2).

das Zeichen $(A;\ \mathfrak{a})$, worin A den *Matrixteil*, $\mathfrak{a}$ den *Vektorteil* der Transformation bezeichnet:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $|A|$ wird dabei stets von Null verschieden vorausgesetzt; in der Gruppe $\mathfrak{U}_n$ gilt $|A| = +1$, in der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ stets $|A| = \pm 1$. Das Kompositionsgesetz dieser drei Gruppen nimmt in dieser Bezeichnung dann die Gestalt an:

$$(2) \qquad (A;\ \mathfrak{a})(B;\ \mathfrak{b}) = (AB;\ \mathfrak{a} + A\mathfrak{b}).$$

Hieraus ergeben sich insbesondere die Regeln:

$$(3) \qquad \begin{cases} (A;\ 0)(B;\ 0) = (AB;\ 0); \\ (E;\ \mathfrak{a})(E;\ \mathfrak{b}) = (E;\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}); \\ (A;\ 0)(E;\ \mathfrak{a}) = (E;\ A\mathfrak{a})(A;\ 0); \\ (A;\ \mathfrak{a}) = (E;\ \mathfrak{a})(A;\ 0), \end{cases}$$

worin A, B, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Matrix- bzw. Vektorteile sind, E die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet. Die erste dieser Regeln zeigt, daß die Elemente von $\mathfrak{A}_n$ der Form $(A;\ 0)$ eine Untergruppe bilden, die der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$ isomorph ist. Wir bezeichnen daher die Gruppe der Elemente $(A;\ 0)$ selbst mit $\mathfrak{L}_n$. Die zweite Regel läßt erkennen, daß auch die Elemente der Form $(E;\ \mathfrak{a})$ eine (abelsche) Untergruppe von $\mathfrak{A}_n$ bilden, die mit $\mathfrak{P}_n$ bezeichnet werden möge. Aus den letzten beiden Regeln folgt, daß $\mathfrak{P}_n$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}_n$ ist, und $\mathfrak{A}_n$ sich in der Gestalt

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{L}_n$$

darstellen läßt, wobei $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{L}_n$ außer dem Einheitselement $(E;\ 0)$ kein Element gemeinsam haben.

Ist daher $D(\mathfrak{A}_n)$ eine Darstellung der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, die dem Element $(A;\ \mathfrak{a})$ aus $\mathfrak{A}_n$ die Matrix $D(A;\ \mathfrak{a})$ des Grades N zuordnet, so gelten die entsprechenden Regeln:

$$(4.1) \qquad D(A;\ \mathfrak{a})\,D(B;\ \mathfrak{b}) = D(AB;\ \mathfrak{a} + A\mathfrak{b});$$

$$(4.2) \qquad D(A;\ 0)\,D(B;\ 0) = D(AB;\ 0);$$

$$(4.3) \qquad D(E;\ \mathfrak{a})\,D(E;\ \mathfrak{b}) = D(E;\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b});$$

$$(4.4) \qquad D(A;\ 0)\,D(E;\ \mathfrak{a}) = D(E;\ A\mathfrak{a})\,D(A;\ 0);$$

$$(4.5) \qquad D(A;\ \mathfrak{a}) = D(E;\ \mathfrak{a})\,D(A;\ 0).$$

Demnach induziert eine stetige Darstellung $D(A;\ \mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ in den Matrizen $D(A;\ 0)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$, in den Matrizen $D(E;\ \mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$; diese Dar-

stellungen der beiden Untergruppen $\mathfrak{L}_n$ und $\mathfrak{P}_n$ sind aber nicht vollkommen unabhängig voneinander, sie stehen vielmehr in der durch (4. 4) ausgedrückten Beziehung.

Ist somit $S(A)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ des Grades N, $T(\mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ des gleichen Grades, und gilt für diese beiden Darstellungen die Beziehung:

$$S(A)\,T(\mathfrak{a}) = T(A\,\mathfrak{a})\,S(A), \tag{5}$$

so erhält man in der Gruppe der Matrizen

$$D(A;\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})\,S(A)$$

eine stetige Darstellung der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$. Wenn man daher alle Paare von stetigen Darstellungen $S(A)$ und $T(\mathfrak{a})$ des gleichen Grades der Gruppen $\mathfrak{L}_n$ und $\mathfrak{P}_n$ angeben kann, die der Beziehung (5) genügen, so erhält man aus ihnen offenbar alle stetigen Darstellungen der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, und das Darstellungsproblem dieser Gruppe ist gelöst.

Insbesondere ist (5) stets erfüllt, wenn $T(\mathfrak{a}) = E_N$ gesetzt wird, bei beliebiger Darstellung $S(A)$ der Gruppe $\mathfrak{L}_n$. In diesem Falle ist

$$D(A;\mathfrak{a}) = D(A;0) = S(A).$$

Eine solche Darstellung $D(A;\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$ nennen wir *vom Vektorteil* $\mathfrak{a}$ *unabhängig*.

Die Theorie der stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$ ist vollkommen bekannt, im großen und ganzen auch die der stetigen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$[3]). Daher besteht das Hauptproblem der Darstellungstheorie der affinen Gruppe in der Behandlung der verbindenden Beziehung (4. 4) oder (5).

Bei den beiden unimodularen Untergruppen $\mathfrak{U}_n$ und $\mathfrak{V}_n$ von $\mathfrak{A}_n$ gelten ganz entsprechende Beziehungen. Es ist

$$\mathfrak{U}_n = \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{M}_n; \quad \mathfrak{V}_n = \mathfrak{P}_n \cdot \mathfrak{N}_n,$$

worin $\mathfrak{M}_n$ die *unimodulare Untergruppe der Gruppe* $\mathfrak{L}_n$, also die Gruppe aller reellen n-reihigen Matrizen mit der Determinante $+1$, $\mathfrak{N}_n$ die *erweiterte unimodulare Untergruppe* der Gruppe $\mathfrak{L}_n$, also die Gruppe aller reellen n-reihigen Matrizen mit der Determinante ± 1 bezeichnet.

Ferner soll noch bemerkt werden, daß man sich stets auf solche Darstellungen $D(A;\mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ beschränken kann, deren Determinante $|D(A;\mathfrak{a})|$ von Null verschieden ist. Denn die dem Einheitselement $(E;0)$ entsprechende Matrix $F = D(E;0)$ genügt der Gleichung

$$F^2 = F,$$

---

[3]) Vgl. *Schur* (2) und G. Pólya, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül, Sitzungsber. Akad. Berlin 1928, S. 96.

kann also durch eine geeignete Transformation auf die Gestalt

$$P^{-1} F P = F^* = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden[4]). Da dann jedes Element $D^*(A; \mathfrak{a})$ der Darstellung $P^{-1} D(\mathfrak{A}_n) P$ von $\mathfrak{A}_n$ mit der Matrix F^* vertauschbar ist und die Gleichung $D^*(A; \mathfrak{a}) F^* = D^*(A; \mathfrak{a})$ gilt, findet man

$$D^*(A; \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_1(A; \mathfrak{a}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierin ist aber die Determinante $|D_1(A; \mathfrak{a})|$ für jedes Element der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von Null verschieden.

Schließlich führen wir noch einen für das Weitere sehr wesentlichen Begriff ein: Sind $D(\mathfrak{G})$ und $D_1(\mathfrak{G})$ zwei Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, und kann die Darstellung $D(\mathfrak{G})$ durch eine geeignete Transformation in die Form

$$P^{-1} D(\mathfrak{G}) P = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ D_{21}(\mathfrak{G}) & D_2(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

gebracht werden, so wollen wir den Ausdruck gebrauchen, $D_1(\mathfrak{G})$ *sei ein Abschnitt von* $D(\mathfrak{G})$.

III.

Entsprechend den im vorigen Abschnitte entwickelten Gedankengängen beginnen wir mit der Untersuchung der stetigen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$. Für diese gilt:

Satz 1. *Man wähle n beliebige paarweise vertauschbare Matrizen* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *eines festen Grades N mit reellen oder komplexen Elementen und setze*

$$L(\mathfrak{a}) = \sum_\nu L_\nu a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ordnet man dann dem Element $(E; \mathfrak{a})$ *aus* $\mathfrak{P}_n$ *die Matrix*

$$F(\mathfrak{a}) = \exp(L(\mathfrak{a})) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{1}{\varkappa!} L^\varkappa(\mathfrak{a})$$

zu, so ist die Gruppe der Matrizen $F(\mathfrak{a})$ *eine stetige Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{P}_n$. *Andererseits kann jede stetige Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{P}_n$ *eindeutig auf diese Gestalt gebracht werden.*

Man weist sehr leicht die Richtigkeit des ersten Teiles dieser Behauptung nach. Daher können wir uns darauf beschränken zu zeigen, daß jede stetige Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ die angegebene Form besitzt.

---

[4]) Das Zeichen E bedeute stets eine Einheitsmatrix von gewissem Grade, der, wenn nicht ausdrücklich angegeben, aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Ist $F(\mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, $(E; \mathfrak{c})$ ein festes, von $(E; 0)$ verschiedenes Element dieser Gruppe, so gilt:

$$F(\xi\,\mathfrak{c})\,F(\eta\,\mathfrak{c}) = F((\xi+\eta)\,\mathfrak{c})$$

für zwei beliebige reelle Werte ξ und η. Infolgedessen ist die Matrix

$$G(\xi) = F(\xi\,\mathfrak{c}),$$

wenn man ξ als reelle Veränderliche auffaßt, eine stetige Matrixlösung der Funktionalgleichung

$$G(\xi)\,G(\eta) = G(\xi+\eta). \tag{6}$$

Die stetigen Matrixlösungen dieser Funktionalgleichung sind vollkommen bekannt, wir wollen sie indessen für unsere Zwecke ein wenig anders als üblich darstellen[5]). Nach I. Schur hat eine unzerfällbare stetige Lösung $H(\xi)$ von (6) die Gestalt:

$$H(\xi) = e^{\alpha\xi}\,P_m(\xi),$$

worin $P_m(\xi)$ die $(m+1)$-reihige Matrix

$$P_m(\xi) = \begin{pmatrix} 1, & 0 & , & 0 & , \ldots, & 0 & , 0 \\ \xi, & 1 & , & 0 & , \ldots, & 0 & , 0 \\ \xi^2, & 2\,\xi & , & 1 & , \ldots, & 0 & , 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi^m, & \binom{m}{1}\xi^{m-1}, & & \binom{m}{2}\xi^{m-2}, & \ldots, & \binom{m}{m-1}\xi, & 1 \end{pmatrix}$$

bedeutet, selbstverständlich abgesehen von einer Ähnlichkeitstransformation mit einer von ξ unabhängigen Matrix. Wir können hierin aber $P_m(\xi)$ durch die ähnliche Matrix:

$$Q_m(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!}\xi & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}\xi^2 & \frac{1}{1!}\xi & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m!}\xi^m & \frac{1}{(m-1)!}\xi^{m-1} & \frac{1}{(m-2)!}\xi^{m-2} & \ldots & \frac{1}{1!}\xi & 1 \end{pmatrix}$$

ersetzen. Setzen wir nun

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. gleich der oben und rechts einfach mit Nullen geränderten Einheitsmatrix des Grades m, so ist, wie man leicht erkennt:

$$Q_m(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\,K^\mu\,\xi^\mu = \exp(K\,\xi)$$

[5]) Vgl. *Schur* (2), § 3.

wegen der Gleichung $K^{m+1} = 0$. Daraus folgt aber für

$$H^*(\xi) = e^{\alpha\,\xi}\, Q_m(\xi)$$

die Gestalt:

$$H^*(\xi) = \exp(L^*\,\xi),$$

wenn $L^* = \alpha E + K$ gesetzt wird. Diese Form ändert sich auch nicht, wenn $H^*(\xi)$ durch eine Ähnlichkeitstransformation abgeändert wird. Denn aus

$$P^{-1} H^*(\xi)\, P = H(\xi) \quad \text{und} \quad P^{-1} L^* P = L$$

mit einer von ξ unabhängigen regulären Matrix P erhält man leicht:

$$H(\xi) = \exp(L\,\xi).$$

Da ferner jede stetige Matrixlösung der Funktionalgleichung (6) sich aus unzerfällbaren stetigen Matrixlösungen zusammensetzt, findet man sofort die Gestalt:

$$G(\xi) = \exp(L\,\xi)$$

für jede stetige Matrixlösung von (6) mit einem eindeutig bestimmten *linearen Teil* $L\,\xi$.

Infolgedessen kann auch die Matrix $F(\xi\,\mathfrak{c})$ für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{c}$ in der Form dargestellt werden:

$$F(\xi\,\mathfrak{c}) = \exp(L(\mathfrak{c})\,\xi).$$

Da nun $F(\mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ ist, ist auch $L(\mathfrak{a})$ eine stetige Matrixfunktion des Vektors $\mathfrak{a}$. Aus der Beziehung

$$F(\mathfrak{a})\,F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

folgt auch

$$F(\mathfrak{a}\,\xi)\,F(\mathfrak{b}\,\xi) = F((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\xi)$$

und damit

$$\exp(L(\mathfrak{a})\,\xi)\exp(L(\mathfrak{h})\,\xi) = \exp(L(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\xi).$$

Entwickelt man auf beiden Seiten nach Potenzen von ξ und vergleicht die beiderseitigen Koeffizienten, so findet man:

$$L(\mathfrak{a}) + L(\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}); \quad L(\mathfrak{a})\,L(\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{b})\,L(\mathfrak{a})$$

und weitere Bedingungen für $L(\mathfrak{a})$ und $L(\mathfrak{b})$, die aber sämtlich aus den beiden angegebenen folgen. Bezeichnet man nun die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

der Reihe nach mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$, so ist

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{e}_1 + a_2\,\mathfrak{e}_2 + \ldots + a_n\,\mathfrak{e}_n$$

und daher

$$L(\mathfrak{a}) = L(a_1\,\mathfrak{e}_1) + L(a_2\,\mathfrak{e}_2) + \ldots + L(a_n\,\mathfrak{e}_n).$$

Ferner gilt:

$$L(a\,\mathfrak{e}_\nu) + L(b\,\mathfrak{e}_\nu) = L((a+b)\,\mathfrak{e}_\nu); \quad L(\mathfrak{e}_\varkappa)\,L(\mathfrak{e}_\lambda) = L(\mathfrak{e}_\lambda)\,L(\mathfrak{e}_\varkappa).$$

Da jedes Element der Matrix $L(a\,\mathfrak{e}_\nu)$ eine stetige Funktion von a ist, so hat jedes dieser Elemente als stetige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(a) + f(b) = f(a + b)$$

die Form $a\,g$ mit einer konstanten, reellen oder komplexen Größe g. Somit ist, wenn $L(\mathfrak{e}_\nu) = L_\nu$ gesetzt wird:

$$L(a\,\mathfrak{e}_\nu) = a\,L_\nu \quad \text{und} \quad L_\varkappa L_\lambda = L_\lambda L_\varkappa \qquad (\varkappa, \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus folgt für $L(\mathfrak{a})$ die Gestalt:

$$L(\mathfrak{a}) = \sum_\nu L_\nu a_\nu;$$

die stetige Darstellung $F(\mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ hat somit schließlich die Form erhalten:

$$F(\mathfrak{a}) = \exp\left(L(\mathfrak{a})\right)$$

mit der im Satze behaupteten Gestalt der Matrix $L(\mathfrak{a})$. Daß diese Form der Darstellung $F(\mathfrak{a})$ eindeutig ist, ist unmittelbar einzusehen, da die Entwicklung von $F(\mathfrak{a})$ nach Potenzprodukten der a_ν sicher eindeutig ist. Wir nennen die zu $F(\mathfrak{a})$ gehörige Matrix $L(\mathfrak{a})$ den *linearen Teil von* $F(\mathfrak{a})$.

Wir benötigen für unsere Zwecke nicht sämtliche stetigen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$; denn es gilt:

Satz 2. *Ist* $D(A; \mathfrak{a})$ *eine stetige Darstellung einer der drei affinen Gruppen* $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$, *so ist in der durch sie induzierten Darstellung* $D(E; \mathfrak{a})$ *der Untergruppe* $\mathfrak{P}_n$:

$$D(E; \mathfrak{a}) = \exp\left(L(\mathfrak{a})\right)$$

der lineare Teil $L(\mathfrak{a})$ *eine nilpotente Matrix*:

$$L^k(\mathfrak{a}) = 0$$

für eine geeignete natürliche Zahl k.

Offenbar genügt es, diese Behauptung für die unimodulare Gruppe $\mathfrak{U}_n$ zu beweisen. Es sei also $D(A; \mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung dieser Gruppe und

$$D(E; \mathfrak{a}) = \exp\left(L(\mathfrak{a})\right).$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei beliebige, vom Nullvektor verschiedene Vektoren, so gibt es stets eine n-reihige unimodulare Matrix A derart, daß

$$\mathfrak{b} = A\,\mathfrak{a}$$

ist. Mit einer solchen Matrix A gilt dann:

$$D(A; 0)\, D(E; \mathfrak{a})\, D^{-1}(A; 0) = D(E; \mathfrak{b}).$$

Demnach sind die beiden Matrizen $D(E; \mathfrak{a})$ und $D(E; \mathfrak{b})$ ähnlich. Können wir daher zeigen, daß in

$$L(\mathfrak{a}) = \sum_\nu L_\nu a_\nu$$

die Matrix $L(\mathfrak{e}_1) = L_1$ nilpotent ist, so ist jede der Matrizen $L(\mathfrak{a})$ nilpotent. In diesem Falle gibt es dann auch eine feste Zahl k, so daß die Gleichung

$$L^k(\mathfrak{a}) = 0$$

erfüllt ist für jeden Vektor $\mathfrak{a}$.

Die Matrix L_1 besitze als verschiedene charakteristische Wurzeln die reellen oder komplexen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$; die Wurzel ω_ϱ trete in der Vielfachheit c_ϱ auf $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$. Dann hat mit einer beliebigen reellen Zahl ξ nach einem bekannten Satze von G. Frobenius[6]) die Matrix

$$D(E; \xi\,\mathfrak{e}_1) = \exp(L_1 \xi)$$

als charakteristische Wurzeln die Größen

$$e^{\omega_1 \xi},\ e^{\omega_2 \xi},\ \ldots,\ e^{\omega_r \xi}$$

in der bezüglichen Vielfachheit c_ϱ. Die Spur der Matrix $D(E; \xi\,\mathfrak{e}_1)$ ist invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, mithin gilt für irgendzwei reelle, von Null verschiedene Größen ξ und η die Gleichung:

$$\sum_\varrho c_\varrho e^{\omega_\varrho \xi} = \sum_\varrho c_\varrho e^{\omega_\varrho \eta}.$$

Eine solche Beziehung mit reellen Veränderlichen ξ, η kann bei reellen oder komplexen Werten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ bekanntlich nur dann bestehen, wenn

$$r = 1 \quad \text{und} \quad \omega_1 = 0$$

ist; daher hat L_1 allein die charakteristische Wurzel $\omega = 0$, ist also nilpotent.

Wir benötigen demnach zur Darstellungstheorie der affinen Gruppen von den stetigen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ nur diejenigen, deren linearer Teil nilpotent ist. Diese Darstellungen sind, wie man leicht erkennt, die rationalen Darstellungen dieser Gruppen. Ist für die Darstellung $F(\mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n$

$$L^s(\mathfrak{a}) \neq 0, \quad \text{aber} \quad L^{s+1}(\mathfrak{a}) = 0,$$

so nennen wir die Zahl s den *Index der Darstellung* $F(\mathfrak{a})$. Ebenso nennen wir s den Index der Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$, wenn s der Index der Gruppe $D(E; \mathfrak{a})$ ist.

Da die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ eine abelsche Gruppe ist, ist eine irreduzible Darstellung dieser Gruppe vom ersten Grade; daher gibt es nur eine einzige irreduzible rationale Darstellung, nämlich die Darstellung

$$G(\mathfrak{a}) = 1.$$

Eine vollreduzible rationale Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ hat demnach die Gestalt:

$$F(\mathfrak{a}) = E^*,$$

wobei E^* die Einheitsmatrix eines beliebigen Grades bezeichnet.

[6]) Vgl. G. Frobenius, Über vertauschbare Matrizen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1896, S. 601; I. Schur, Ein Satz aus der Theorie der vertauschbaren Matrizen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1902, S. 120.

IV.

Die rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ wollen wir unter Benutzung einiger Resultate von A. Loewy[7]) noch in einer anderen Form beschreiben, die für die Zwecke dieser Untersuchungen als besonders handlich erscheinen wird.

Dazu benötigen wir vorerst noch einige Bemerkungen über *Linearformenmatrizen*:

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ seien reelle Veränderliche, von denen nur lineare Unabhängigkeit im Körper aller reellen und komplexen Zahlen vorausgesetzt wird. Mit Hilfe beliebiger, aus reellen oder komplexen Zahlen bestehender, rechteckiger Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_N$ in p Zeilen und q Spalten bilden wir die Linearformenmatrix:

$$M(x) = \sum_{\alpha} M_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N).$$

Eine Linearformenmatrix $M(x)$ heißt *linkssingulär*, wenn es einen, von den Veränderlichen x_α unabhängigen, nichtverschwindenden Vektor

$$\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

gibt, so daß

$$\mathfrak{y} M(x) = 0$$

wird, worin 0 den q-stelligen Nullvektor bezeichnet. Gibt es keinen solchen von Null verschiedenen Vektor, so heißt $M(x)$ *linksregulär*. Für eine linksreguläre Matrix $M(x)$ folgt offenbar aus jeder Matrixgleichung:

$$QM(x) = 0$$

die Gleichung $Q = 0$, wenn Q eine beliebige, von den Veränderlichen x_α unabhängige, mit $M(x)$ zusammensetzbare Matrix bezeichnet. Entsprechend kann man die Begriffe der *rechtssingulären* bzw. *rechtsregulären* Linearformenmatrix einführen.

Hilfssatz 1. *Ist eine Linearformenmatrix $M(x)$ linkssingulär, so gibt es eine reguläre, von den Veränderlichen x_α unabhängige p-reihige Matrix P, so daß*

$$PM(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ M_1(x) \end{pmatrix}$$

ist, mit einer linksregulären Matrix $M_1(x)$.

Da $M(x)$ linkssingulär ist, gibt es von den x_α unabhängige Vektoren $\mathfrak{y}$, für die gilt:

$$\mathfrak{y} M(x) = 0.$$

Unter allen möglichen Vektoren $\mathfrak{y}$ wähle man ein linear unabhängiges System von Vektoren $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_r$ aus, aus denen sich alle anderen

[7]) Vgl. A. Loewy, Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer Substitutionen gehören, Transactions Amer. Math. Soc. 6 (1905), S. 504. (Weiterhin mit *Loewy* (1) zitiert.)

Vektoren linear zusammensetzen lassen. Diese r Vektoren ergänze man mit $p - r$ geeigneten Vektoren $\mathfrak{z}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{z}_p$ zu einer nichtsingulären p-reihigen, von den x_α unabhängigen Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_r \\ \mathfrak{z}_{r+1} \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_p \end{pmatrix},$$

was bekanntlich stets möglich ist. Dann ist offenbar

$$P\,M(x) = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 M(x) \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_p M(x) \end{pmatrix},$$

also

$$P\,M(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ M_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M_1(x) = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_{r+1} M(x) \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_p M(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Linearformenmatrix $M_1(x)$ ist linksregulär. Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es Größen $c_{r+1}, \ldots, c_p$, die nicht sämtlich verschwinden, so daß

$$(c_{r+1}, \ldots, c_p)\, M_1(x) = 0$$

ist, oder auch

$$(c_{r+1}\mathfrak{z}_{r+1} + \ldots + c_p \mathfrak{z}_p)\, M(x) = 0.$$

Da die Vektoren $\mathfrak{z}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{z}_p$ linear unabhängig sind, ist der Vektor $\mathfrak{z} = c_{r+1}\mathfrak{z}_{r+1} + \ldots + c_p \mathfrak{z}_p$ vom Nullvektor verschieden. Dann müßte aber $\mathfrak{z}$ linear abhängig sein von den Vektoren $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_r$, was den Voraussetzungen widerspricht.

Hilfssatz 2. *Die Linearformenmatrix*

$$M(x) = \sum_\alpha M_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

in p Zeilen und q Spalten ist dann und nur dann linksregulär, wenn die Matrix

$$\widetilde{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_N)$$

den Rang p, also den Rang der Zeilenzahl hat.

Die Linearformenmatrix $M(x)$ ist nach Definition dann und nur dann linksregulär, wenn die Gleichung

$$\mathfrak{y}\, M(x) = 0$$

keinen nichtverschwindenden, von den Veränderlichen x_α unabhängigen Vektor $\mathfrak{y}$ zur Lösung besitzt. Dies ist aber gleichwertig mit der Aussage, daß das Gleichungssystem

$$\mathfrak{y}\, M_1 = 0; \quad \mathfrak{y}\, M_2 = 0; \quad \ldots; \quad \mathfrak{y}\, M_N = 0$$

allein die Lösung $\mathfrak{y} = 0$ besitzt. Dafür ist wieder notwendig und hinreichend, daß der Rang der Matrix $\tilde{M}$ gleich p ist.

Die entsprechenden Sätze für rechtssinguläre und rechtsreguläre Linearformenmatrizen lauten:

Hilfssatz 1'. *Ist eine Linearformenmatrix $M(x)$ in p Zeilen und q Spalten rechtssingulär, so gibt es eine nichtsinguläre, von den Veränderlichen x_α unabhängige q-reihige Matrix Q, so daß*

$$M(x)\,Q = (M_1(x)\,0)$$

ist mit einer rechtsregulären Matrix $M_1(x)$.

Hilfssatz 2'. *Die Linearformenmatrix*

$$M(x) = \sum_\alpha M_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

in p Zeilen und q Spalten ist dann und nur dann rechtsregulär, wenn die Matrix

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix}$$

den Rang q, also den Rang der Spaltenzahl hat.

Ihr Beweis mag übergangen werden.

Nun sei $F(\mathfrak{a})$ eine rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ vom Index s:

$$F(\mathfrak{a}) = \exp(L(\mathfrak{a})) \quad \text{mit} \quad L^s(\mathfrak{a}) \neq 0,\ L^{s+1}(\mathfrak{a}) = 0.$$

Die irreduziblen Bestandteile dieser Darstellung haben die Gestalt $G(\mathfrak{a}) = 1$. Zerlegt man daher die Darstellung $F(\mathfrak{a})$ nach A. Loewy[8]) unter Hervorhebung ihrer größten vollreduziblen Bestandteile, so hat diese Zerlegung die Gestalt:

$$(7) \qquad F(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ F_{20}(\mathfrak{a}) & F_{21}(\mathfrak{a}) & E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{k-1,0}(\mathfrak{a}) & F_{k-1,1}(\mathfrak{a}) & F_{k-1,2}(\mathfrak{a}) & \ldots & 0 \\ F_{k,0}(\mathfrak{a}) & F_{k,1}(\mathfrak{a}) & F_{k,2}(\mathfrak{a}) & \ldots & E_k \end{pmatrix}.$$

Ich will kurz schildern, wie diese Zerlegung zustande kommt. Der lineare Teil $L(\mathfrak{a})$ der Matrix $F(\mathfrak{a})$ ist nilpotent; demnach ist $L(\mathfrak{a})$ linkssingulär, da doch in

$$L(\mathfrak{a}) = \sum_i L_i a_i$$

---

[8]) Vgl. *Loewy* (1), § 3.

die Matrizen L_ν paarweise vertauschbar sind. Mithin kann eine reguläre von $\mathfrak{a}$ unabhängige Matrix P angegeben werden, so daß

$$P L(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ L^*(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}$$

wird mit einer linksregulären Matrix $L^*(\mathfrak{a})$. Wir schreiben diese Matrix unter Abtrennung einer quadratischen Nullmatrix in der linken oberen Ecke in der Form

$$P L(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{10}^*(\mathfrak{a}) & L_1^*(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $P L(\mathfrak{a}) P^{-1}$ hat dann die gleiche Gestalt:

$$P L(\mathfrak{a}) P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{10}(\mathfrak{a}) & L_1(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}$$

Auf die Teilmatrix $L_1(\mathfrak{a})$ wende man nun, da sie gleichfalls linkssingulär ist, das gleiche Verfahren an. Damit erhält man nach einer endlichen Anzahl von Schritten mit einer geeigneten regulären Matrix Q:

$$(8) \qquad Q L(\mathfrak{a}) Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{10}(\mathfrak{a}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{20}(\mathfrak{a}) & L_{21}(\mathfrak{a}) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{k0}(\mathfrak{a}) & L_{k1}(\mathfrak{a}) & L_{k2}(\mathfrak{a}) & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und hieraus die oben angegebene Gestalt von $Q F(\mathfrak{a}) Q^{-1}$, wobei wieder die ursprüngliche Bezeichnung $F(\mathfrak{a})$ gewählt wurde [9]).

In der Form (7) von $F(\mathfrak{a})$ ist wegen $F(0) = E$ für jedes Indexpaar

$$F_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(0) = 0 \qquad (0 \leqq \varkappa < \varkappa + \lambda \leqq k).$$

Die Teilmatrizen $F_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a})$ lassen sich, da ihre Matrixelemente ganzrationale Funktionen der Komponenten a_ν des Vektors $\mathfrak{a}$ sind, nach den Potenzprodukten

$$a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\nu_n} \qquad (1 \leqq \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n \leqq s)$$

entwickeln. Fassen wir alle Glieder gleicher Dimension zusammen, so erhält $F_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a})$ die Gestalt:

$$F_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a}) = F^{(1)}_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a}) + F^{(2)}_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a}) + \dots + F^{(s)}_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a}),$$

worin nun $F^{(\sigma)}_{\varkappa+\lambda,\,\varkappa}(\mathfrak{a})$ homogen in $\mathfrak{a}$ von σ-ter Dimension ist. Da aber doch

$$F(\mathfrak{a}) = \exp(L(\mathfrak{a})) = \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{1}{\sigma!} L^\sigma(\mathfrak{a})$$

---

[9]) In diesem Zusammenhange sei noch auf die folgenden Arbeiten verwiesen, die abelsche Gruppen linearer Substitutionen vom gleichen Gesichtspunkte aus untersuchen: L. E. Dickson, On commutative linear groups, Quart. Journal **40** (1909), S. 167. — C. Jordan, Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables, Journal de math. (6) **3** (1909), S. 213.

ist, so erkennt man aus der Form (8) sehr leicht, daß in $F_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a})$ höchstens Glieder der λ-ten Dimension auftreten können:

$$F_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}) = F^{(1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}) + F^{(2)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}) + \ldots + F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}).$$

Insbesondere folgt daraus

$$k \geqq s.$$

Von Wichtigkeit sind für unsere Zwecke hauptsächlich die Glieder $F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a})$ höchster Dimension in den $F_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a})$. Fassen wir diese Matrizen nämlich als Linearformenmatrizen in den Potenzprodukten der a_ν auf, so sind sie linksregulär. Wenn das gezeigt ist, folgt daraus

$$k = s,$$

da insbesondere $F^{(k)}_{k,0}(\mathfrak{a})$ linksregulär ist, also nicht verschwindet.

Wir betrachten aus $F(\mathfrak{a})$ in der Form (7) zunächst nur den Teil

$$G(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 \end{pmatrix}$$

und zeigen, daß $F_{10}(\mathfrak{a})$ linksregulär ist. Ist dies nämlich nicht der Fall, so gibt es nach dem Hilfssatz 1 eine reguläre Matrix P, so daß

$$PF_{10}(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{10}(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}$$

wird. Dann ist

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ PF_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1' & 0 \\ G_{10}(\mathfrak{a}) & 0 & E_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0' & 0 \\ G_{10}(\mathfrak{a}) & E_1'' \end{pmatrix}$$

nach geeigneter Zerlegung der Einheitsmatrix E_1. Damit ist die Einheitsmatrix E_0 auf Kosten der Einheitsmatrix E_1 zu E_0' vergrößert worden. Dieselbe Operation kann aber auch an der Matrix $F(\mathfrak{a})$ mit dem gleichen Erfolge ausgeführt werden; dies widerspricht aber der Voraussetzung über (7) und (8). Demnach ist die Teilmatrix

$$F_{10}(\mathfrak{a}) = F^{(1)}_{10}(\mathfrak{a}) = L_{10}(\mathfrak{a})$$

linksregulär. Genau ebenso kann man zeigen, daß die Matrizen

$$F_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}) = F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}) = L_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a})$$

linksregulär sind. Demnach ist die Behauptung richtig für den Fall $\lambda = 1$, und man kann annehmen, es sei schon bewiesen, daß die Matrizen

$$F^{(\mu)}_{\varkappa+\mu,\varkappa}(\mathfrak{a})$$

für $\mu < \lambda$ linksregulär sind.

Aus der Gestalt (8) von $L(\mathfrak{a})$ und der Gleichung

$$F(\mathfrak{a}) = \exp(L(\mathfrak{a}))$$

findet man nun leicht die Beziehung

$$F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\lambda!} L_{\varkappa+\lambda,\varkappa+\lambda-1}(\mathfrak{a}) L_{\varkappa+\lambda-1,\varkappa+\lambda-2}(\mathfrak{a}) \cdots L_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}),$$

ferner aus der Gleichung

$$L(\mathfrak{a}) L(\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{b}) L(\mathfrak{a})$$

die Beziehung

$$L_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}) L_{\varkappa,\varkappa-1}(\mathfrak{b}) = L_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{b}) L_{\varkappa,\varkappa-1}(\mathfrak{a})$$

für irgendzwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Demnach gilt die Gleichung

$$F^{(1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+\lambda-1}(\mathfrak{a}_1) F^{(1)}_{\varkappa+\lambda-1,\varkappa+\lambda-2}(\mathfrak{a}_2) \cdots F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}_\lambda)$$
$$= F^{(1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+\lambda-1}(\mathfrak{b}_1) F^{(1)}_{\varkappa+\lambda-1,\varkappa+\lambda-2}(\mathfrak{b}_2) \cdots F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{b}_\lambda),$$

wenn die Vektorenreihe $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_\lambda$ durch eine Permutation aus der Vektorenreihe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda$ hervorgeht. Der Ausdruck

$$F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda) = F^{(1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+\lambda-1}(\mathfrak{a}_1) \cdots F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}_\lambda)$$

ist demnach vollkommen symmetrisch in den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda$. Daher folgt die Linksregularität der Matrix $F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a})$ schon aus der Linksregularität der Matrix $F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda)$; natürlich gilt auch das Umgekehrte. Nun ist

$$F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda) = F^{(\lambda-1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+1}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1}) F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}_\lambda);$$

ist daher $\mathfrak{y}$ ein Vektor, für den

$$\mathfrak{y} F^{(\lambda)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\lambda) = 0$$

gilt, so muß, weil $F^{(1)}_{\varkappa+1,\varkappa}(\mathfrak{a}_\lambda)$ linksregulär ist,

$$\mathfrak{y} F^{(\lambda-1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+1}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1}) = 0$$

sein, mithin auch

$$\mathfrak{y} F^{(\lambda-1)}_{\varkappa+\lambda,\varkappa+1}(\mathfrak{a}) = 0.$$

Da wir aber für diese Matrix als bewiesen voraussetzen konnten, daß sie linksregulär sei, folgt $\mathfrak{y} = 0$ und damit der Beweis der aufgestellten Behauptung.

Fassen wir die Ergebnisse dieser letzten Untersuchungen zusammen, so erhalten wir:

Satz 3. *Ist $F(\mathfrak{a})$ eine rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ von dem Index s, so hat ihre Zerlegung nach den größten vollreduziblen Bestandteilen die Gestalt:*

$$F(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a}) & F_{s1}(\mathfrak{a}) & \ldots & E_s \end{pmatrix}.$$

Die Bestandteile $F^{(\varrho-\sigma)}_{\varrho,\sigma}(\mathfrak{a})$ höchster Dimension in den Teilmatrizen $F_{\varrho,\sigma}(\mathfrak{a})$ (für $0 \leqq \sigma < \varrho \leqq s$) sind als Linearformenmatrizen in den Potenz-

produkten $(\varrho - \sigma)$-ter Dimension der Komponenten a_ν des Vektors $\mathfrak{a}$ linksregulär.

V.

Nach diesen Vorbemerkungen über die stetigen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ begeben wir uns nun zu dem ersten Teile unserer eigentlichen Aufgabe, nämlich zur Bestimmung aller rationalen Darstellungen der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, d. h. aller der Darstellungen, deren allgemeines Element $D(A; \mathfrak{a})$ als Matrixelemente rationale Funktionen der Größen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ und a_μ $(\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ besitzt. Der nachstehende Satz führt diese Aufgabe auf die Untersuchung der ganzrationalen Darstellungen zurück.

Satz 4. *Zu jeder gebrochenrationalen Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ gibt es eine (eindeutig bestimmte) kleinste natürliche Zahl k, so daß mit der Determinante $|A|$ des Matrixteiles*

$$D^*(A; \mathfrak{a}) = |A|^k \cdot D(A; \mathfrak{a})$$

eine ganzrationale Darstellung ist [10]).

Bildet man zu der gebrochenrationalen Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ den Hauptnenner $\psi(A; \mathfrak{a})$ der Matrixelemente, so kann man setzen

$$D(A; \mathfrak{a}) = \frac{1}{\psi(A; \mathfrak{a})} D'(A; \mathfrak{a}),$$

wobei die Elemente von $D'(A; \mathfrak{a})$ ganzrational sind. Ist

$$(A_1; \mathfrak{a}_1)\ (A_2; \mathfrak{a}_2) = (A; \mathfrak{a}),$$

so gilt

$$\frac{D'(A; \mathfrak{a})}{\psi(A; \mathfrak{a})} = \frac{D'(A_1; \mathfrak{a}_1)}{\psi(A_1; \mathfrak{a}_1)} \cdot \frac{D'(A_2; \mathfrak{a}_2)}{\psi(A_2; \mathfrak{a}_2)}$$

oder

$$\frac{\psi(A; \mathfrak{a})}{\psi(A_1; \mathfrak{a}_1)} D'(A_1; \mathfrak{a}_1) = \psi(A_2; \mathfrak{a}_2)\, D'(A; \mathfrak{a})\, (D'(A_2; \mathfrak{a}_2))^{-1}.$$

Die Elemente des rechtsstehenden Ausdruckes sind ganzrationale Funktionen in $(A_1; \mathfrak{a}_1)$; daher muß das Gleiche für den linksstehenden Ausdruck gelten. Da aber in den Elementen von $D'(A_1; \mathfrak{a}_1)$ nicht $\psi(A_1; \mathfrak{a}_1)$ aufgeht, muß

$$\psi(A; \mathfrak{a}) = \psi(A_1; \mathfrak{a}_1) \cdot \varphi$$

sein mit einer ganzrationalen Funktion φ. Diese Funktion kann aber nur von $(A_2; \mathfrak{a}_2)$ abhängen, da $\psi(A; \mathfrak{a})$ und $\psi(A_1; \mathfrak{a}_1)$ inbezug auf $(A_1; \mathfrak{a}_1)$ von gleichem Grade sind. Setzt man daher $(A_1; \mathfrak{a}_1) = (E; 0)$, so folgt

$$\psi(A_2; \mathfrak{a}_2) = c \cdot \varphi(A_2; \mathfrak{a}_2),$$

woraus, weil die Konstante c doch sicher nicht Null ist,

$$\varphi(A_1; \mathfrak{a}_1)\, \varphi(A_2; \mathfrak{a}_2) = \varphi(A; \mathfrak{a})$$

---

[10]) Der Beweis ist dem des Satzes II in *Schur* (2) nachgebildet.

folgt. Demnach ist $\varphi(A; \mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{A}_n$. Eine solche Darstellung ist aber eine Potenz der Determinante $|A|$ des Matrixteiles A.

Denn da $\varphi(E; \mathfrak{a})$ eine irreduzible rationale Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ ist, so besteht zunächst auf Grund der Bemerkung am Schluß des Abschnittes III die Gleichung $\varphi(E; \mathfrak{a}) = 1$, da der andere mögliche Wert $\varphi(E; \mathfrak{a}) = 0$ offenbar auszuschließen ist. Daraus folgt:

$$\varphi(A; \mathfrak{a}) = \varphi(A; 0).$$

Andererseits ist aber eine ganzrationale Funktion, die der Gleichung

$$\varphi(A; 0)\, \varphi(B; 0) = \varphi(A\,B; 0)$$

genügt, bekanntlich [11]) von der Form:

$$\varphi(A; 0) = |A|^k.$$

mit einer natürlichen Zahl k.

Aus diesem Wert für die Funktion $\varphi(A; \mathfrak{a})$ findet man:

$$\psi(A; \mathfrak{a}) = c \cdot \varphi(A; \mathfrak{a}) = c|A|^k,$$

also

$$D(A; \mathfrak{a})|A|^k = \frac{1}{c} D'(A; \mathfrak{a}) = D^*(A; \mathfrak{a}),$$

worin $D^*(A; \mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist.

Mit Hilfe dieses Satzes können offenbar alle gebrochenrationalen Darstellungen der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ sehr leicht angegeben werden, falls die ganzrationalen Darstellungen bekannt sind. Mithin kann man die Untersuchung auf diese Darstellungen beschränken.

Für die beiden unimodularen Gruppen ist jede rationale Darstellung schon eine ganzrationale, da ja die Determinante $|A|$ für diese Gruppen einen festen Wert hat.

VI.

An den Anfang unserer Untersuchungen über die ganzrationalen Darstellungen der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ stellen wir

Satz 5. *Jede ganzrationale Darstellung $D(A)$ der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$ gibt durch*

$$D(A; \mathfrak{a}) = D(A)$$

eine vollreduzible ganzrationale Darstellung der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, und jede vollreduzible ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist von dieser Gestalt.

Entsprechendes gilt für die beiden unimodularen affinen Gruppen.

Der erste Teil dieses Satzes ist ohne weiteres einzusehen; um den zweiten zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß eine vom Vektorteil $\mathfrak{a}$ nicht unabhängige ganzrationale Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$ reduzibel ist. Denn hieraus folgt, daß eine irreduzible ganzrationale Darstellung

[11]) Vgl. etwa C. C. Macduffee, Theory of matrices, Berlin, Jul. Springer 1933, Abschnitt I. 4. Mit einer kleinen Abänderung der dortigen Schlußweise kann die Behauptung leicht bewiesen werden.

von $\mathfrak{A}_n$ notwendig vom Vektorteil unabhängig ist. Der Beweis hierfür läßt auch die Gültigkeit der entsprechenden Aussagen für die beiden unimodularen Gruppen erkennen.

Es sei $D(A;\mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ und

$$D(E;\mathfrak{a}) = \exp(L(\mathfrak{a}))$$

mit einem nichtverschwindenden linearen Teil $L(\mathfrak{a})$. Ist s der Index von $D(E;\mathfrak{a})$, so kann man $D(E;\mathfrak{a})$ in der Form annehmen:

$$D(E;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a}) & F_{s1}(\mathfrak{a}) & \dots & E_s \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit den in Satz 3 näher beschriebenen Eigenschaften. Aus der Regel (4.4) folgt nun:

$$D(A;0)\begin{pmatrix} E_0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a}) & F_{s1}(\mathfrak{a}) & \dots & E_s \end{pmatrix} D^{-1}(A;0) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & \dots & 0 \\ F_{10}(A\,\mathfrak{a}) & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(A\,\mathfrak{a}) & F_{s1}(A\,\mathfrak{a}) & \dots & E_s \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir in $D(E;A\,\mathfrak{a})$ eine zu $D(E;\mathfrak{a})$ ähnliche Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ erhalten, die wie $D(E;\mathfrak{a})$ nach den größten vollreduziblen Bestandteilen zerlegt ist. Infolgedessen muß nach einem Satze von A. Loewy[12]) die Matrix $D(A;0)$ die Gestalt haben:

$$D(A;0) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 & \dots & 0 \\ D_{10}(A) & D_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{s0}(A) & D_{s1}(A) & \dots & D_s(A) \end{pmatrix} \tag{10}$$

in der gleichen Zerlegung wie $D(E;\mathfrak{a})$, woraus wegen

$$D(A;\mathfrak{a}) = D(E;\mathfrak{a})\,D(A;0)$$

sofort die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Die aus (9) und (10) zu entnehmende Reduktion der ganzrationalen Darstellung $D(A;\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$ wollen wir noch ein wenig weiterführen. Da die Darstellung $D(A;0)$ der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ vollreduzibel ist, kann man nach einem Satze von I. Schur[13]) eine Matrix P der Gestalt

$$P = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & \dots & 0 \\ P_{10} & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{s0} & P_{s1} & \dots & E_s \end{pmatrix}$$

[12]) Vgl. *Loewy* (1), am Schlusse von § 6.

[13]) Vgl. R. Brauer und I. Schur, Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1930, S. 209. (Hierzu Satz VII.)

mit konstanten Elementen angeben, so daß $D^*(A;\,0) = P^{-1}D(A;\,0)P$ die Form annimmt:

$$D^*(A;\,0) = P^{-1}D(A;\,0)P = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_s(A) \end{pmatrix}.$$

Dabei wird

$$D^*(E;\,\mathfrak{a}) = P^{-1}D(E;\,\mathfrak{a})P = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & \dots & 0 \\ F^*_{10}(\mathfrak{a}) & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F^*_{s0}(\mathfrak{a}) & F^*_{s1}(\mathfrak{a}) & \dots & E_s \end{pmatrix},$$

wobei zu beachten ist, daß für die Teilmatrizen die Gleichungen gelten:

$$F^*_{\varrho+1,\,\varrho}(\mathfrak{a}) = F_{\varrho+1,\,\varrho}(\mathfrak{a}).$$

Daher ist auch $D^*(E;\,\mathfrak{a})$ eine Zerlegung nach größten vollreduziblen Bestandteilen, wie es vorher $D(E;\,\mathfrak{a})$ war. Somit können wir die Darstellung $D(A;\,\mathfrak{a})$ in der Form

$$(11)\qquad D(A;\,\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 & \dots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a})\,D_0(A) & D_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a})\,D_0(A) & F_{s1}(\mathfrak{a})\,D_1(A) & \dots & D_s(A) \end{pmatrix}$$

annehmen, worin $D(E;\,\mathfrak{a})$ als Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ unter Hervorhebung der größten vollreduziblen Bestandteile zerlegt ist.

Wir können auch die Gruppe $D(A;\,\mathfrak{a})$ selbst unter Hervorhebung ihres ersten größten vollreduziblen Bestandteiles zerlegen. Da die vollreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$, wie wir wissen, vom Vektorteil unabhängig sind, nimmt eine solche Zerlegung die Gestalt an:

$$D^*(A;\,\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D^*_0(A) & 0 \\ D^*_{10}(A;\,\mathfrak{a}) & D^*_1(A;\,\mathfrak{a}) \end{pmatrix} = Q^{-1}D(A;\,\mathfrak{a})Q.$$

Diese Gestalt der Darstellung wollen wir mit der ähnlichen Form (11) vergleichen, die wir in etwas vereinfachter Gestalt schreiben:

$$D(A;\,\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ D_{10}(A;\,\mathfrak{a}) & D_1(A;\,\mathfrak{a}) \end{pmatrix},$$

da es nur auf den ersten Bestandteil $D_0(A)$ ankommt. Insbesondere erhalten wir

$$D(E;\,\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ D_{10}(E;\,\mathfrak{a}) & D_1(E;\,\mathfrak{a}) \end{pmatrix};\quad D^*(E;\,\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E^*_0 & 0 \\ D^*_{10}(E;\,\mathfrak{a}) & D^*_1(E;\,\mathfrak{a}) \end{pmatrix}.$$

Da in $D(E;\,\mathfrak{a})$ die Einheitsmatrix E_0 nach Konstruktion von möglichst großem Grade ist, kann der Grad der Einheitsmatrix E^*_0 nicht größer sein als der von E_0. Andererseits ist aber in $D^*(A;\,\mathfrak{a})$ der erste vollreduzible Bestandteil $D^*_0(A)$ von größtmöglichem Grade. Demnach müssen

die Grade der beiden Einheitsmatrizen E_0 und E_0^* übereinstimmen. Dies bedeutet aber, daß auch $D^*(E;\mathfrak{a})$ eine Zerlegung unter Hervorhebung des ersten größten vollreduziblen Bestandteiles ist. Demnach ist die Matrix Q wegen

$$D^*(E;\mathfrak{a}) = Q^{-1} D(E;\mathfrak{a}) Q$$

und wegen des schon oben verwendeten Satzes von A. Loewy von der Form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ Q_{10} & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$Q_0^{-1} D_0(A) Q_0 = D_0^*(A); \quad Q_1^{-1} D_1(A;\mathfrak{a}) Q_1 = D_1^*(A;\mathfrak{a}).$$

Die Darstellungen $D_0(A)$ und $D_0^*(A)$ sind also ähnlich. Somit ist die Zerlegung (11) der Darstellung $D(A;\mathfrak{a})$ eine Zerlegung unter Hervorhebung des ersten größten vollreduziblen Bestandteiles. Da aber auch

$$Q_1^{-1} D_1(A;\mathfrak{a}) Q_1 = D_1^*(A;\mathfrak{a})$$

gilt, kann man das Schlußverfahren für die weiteren größten vollreduziblen Bestandteile von $D(A;\mathfrak{a})$ fortführen.

Damit findet man den

Satz 6. *Es sei $D(A;\mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{A}_n$. Bei geeigneter Zerlegung der Darstellung $D(E;\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{P}_n$ kann die Matrix $D(A;\mathfrak{a})$ auf die Gestalt* (11) *gebracht werden, worin die Teile $D_\sigma(A)$ $(0 \leqq \sigma \leqq s)$ ihrerseits die größten vollreduziblen Bestandteile der Gruppe $D(A;\mathfrak{a})$ sind. Ist s der Index der Darstellung $D(A;\mathfrak{a})$, so besitzt sie genau $s+1$ größte vollreduzible Bestandteile.*

Entsprechendes gilt für die beiden unimodularen affinen Gruppen.

Der Nachsatz über die unimodularen Gruppen bedarf wohl keines Beweises.

VII.

Wie wir schon früher bemerkten, kommt es bei der Untersuchung der Darstellungen $D(A;\mathfrak{a})$ der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ in der Hauptsache auf die Diskussion der Gleichung

$$D(A;0) D(E;\mathfrak{a}) = D(E;A\,\mathfrak{a}) D(A;0) \tag{12}$$

an. Diese Beziehung wollen wir in diesem Abschnitte für ganzrationale Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$ untersuchen.

Es sei $D(A;\mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ in der reduzierten Form (11). Die Beziehung (12) nimmt dann die Gestalt an:

$$D_\varrho(A) F_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a}) = F_{\varrho\sigma}(A\,\mathfrak{a}) D_\sigma(A) \qquad (0 \leqq \sigma < \varrho \leqq s). \tag{13}$$

Zerlegen wir hierbei wie im Abschnitt IV die Matrizen $F_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ nach in $\mathfrak{a}$ homogenen Summanden:

$$F_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a}) = F_{\varrho\sigma}^{(1)}(\mathfrak{a}) + F_{\varrho\sigma}^{(2)}(\mathfrak{a}) + \ldots + F_{\varrho\sigma}^{(\varrho-\sigma)}(\mathfrak{a}),$$

worin der obere Index die Dimension des Summanden angibt, so folgt aus (13) für die einzelnen Teile:

$$D_\varrho(A)\,F^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a}) = F^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}(A\,\mathfrak{a})\,D_\sigma(A). \tag{14}$$

Demnach erfordert die Beziehung eine Untersuchung der Gleichungen von der Form

$$D_2(A)\,F(\mathfrak{a}) = F(A\,\mathfrak{a})\,D_1(A), \tag{15}$$

worin $D_1(A)$, $D_2(A)$ zwei ganzrationale Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$, $F(\mathfrak{a})$ aber eine in $\mathfrak{a}$ homogene ganzrationale Matrixfunktion, etwa von der Dimension k, bedeuten.

Wir denken uns daher alle Potenzprodukte k-ter Dimension der Komponenten a_ν des Vektors $\mathfrak{a}$ gebildet und in lexikographischer Anordnung mit

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \qquad N = \binom{n+k-1}{k}$$

bezeichnet. Dann hat $F(\mathfrak{a})$ die Gestalt

$$F(\mathfrak{a}) = \sum_\alpha F_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

mit konstanten Matrizen $F_1, F_2, \ldots, F_N$. Sind die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_N$ die entsprechend geordneten Potenzprodukte k-ter Dimension der Komponenten b_ν eines zweiten Vektors $\mathfrak{b}$, so folgt aus der Gleichung

$$\mathfrak{b} = A\,\mathfrak{a}$$

die Beziehung

$$y_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta}(A)\,x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N)$$

mit gewissen, von A abhängenden Größen $p_{\alpha\beta}(A)$. Dabei ist die Matrix

$$P_k(A) = (p_{\alpha\beta}(A))$$

eine ganzrationale Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$, nämlich die bekannte Darstellung der k-ten Potenztransformation[14]). Damit wird

$$F(A\,\mathfrak{a}) = \sum_\alpha F_\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha\beta} F_\alpha p_{\alpha\beta}(A)\,x_\beta$$

und aus der Gleichung (15) die neue Beziehung:

$$\sum_\beta D_2(A)\,F_\beta x_\beta = \sum_{\alpha\beta} F_\alpha p_{\alpha\beta}(A)\,x_\beta D_1(A).$$

Da dies identisch in den x_β gilt, folgt

$$D_2(A)\,F_\beta = \sum_\alpha F_\alpha p_{\alpha\beta}(A)\,D_1(A).$$

Bezeichnet man nun mit $\widetilde{F}$ die Matrix

$$\widetilde{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_N),$$

so folgt aus der obigen Gleichung schließlich[15]):

$$D_2(A)\,\widetilde{F} = \widetilde{F}\,(P_k(A) \times D_1(A)). \tag{16}$$

[14]) Vgl. *Schur* (1), § 5.

[15]) Das liegende Kreuz bezeichnet wie üblich das direkte Produkt von Matrizen.

Demnach bedeutet die Beziehung (15) mit einer Matrixfunktion $F(\mathfrak{a})$ von k-ter Dimension eine *Verkettung*[16]) zwischen den beiden Darstellungen

$$D_2(A) \quad \text{und} \quad P_k(A) \times D_1(A)$$

der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$. Umgekehrt erhält man für jede Verkettungsmatrix $\widetilde{F}$ aus (16) eine Beziehung der Gestalt (15). Besteht demnach keine Verkettung zwischen den Darstellungen $P_k(A) \times D_1(A)$ und $D_2(A)$, so hat (15) allein die triviale Lösung $F(\mathfrak{a}) = 0$. Ist aber die Matrix $F(\mathfrak{a})$ in unserem Sinne linksregulär, so ist nach dem Hilfssatz 2 die Matrix $\widetilde{F}$ vom Range der Zeilenzahl. Das bedeutet aber, daß die Darstellung $D_2(A)$ ganz in der Darstellung $P_k(A) \times D_1(A)$ enthalten ist; umgekehrt sind auch nur in diesem Falle linksreguläre Lösungen $F(\mathfrak{a})$ der Gleichung (15) möglich.

Sind nämlich $S(\mathfrak{G})$ und $T(\mathfrak{G})$ zwei Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, zwischen denen die Verkettung

$$S(\mathfrak{G})\, V = V\, T(\mathfrak{G})$$

besteht mit einer Matrix V, deren Rang gleich der Zeilenzahl ist, so gibt es bekanntlich zwei reguläre Matrizen P und Q, so daß die Gleichung gilt:

$$P V Q = (E\,0).$$

Setzt man daher

$$P S(\mathfrak{G})\, P^{-1} = S^*(\mathfrak{G}); \quad Q^{-1}\, T(\mathfrak{G})\, Q = T^*(\mathfrak{G}),$$

so folgt aus der Verkettung die neue Beziehung

$$S^*(\mathfrak{G})\,(E\,0) = (E\,0) \begin{pmatrix} T^*_{11}(\mathfrak{G}) & T^*_{12}(\mathfrak{G}) \\ T^*_{21}(\mathfrak{G}) & T^*_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

bei geeigneter Unterteilung der Gruppe $T^*(\mathfrak{G})$. Hieraus folgt aber

$$S^*(\mathfrak{G}) = T^*_{11}(\mathfrak{G}); \quad T^*_{12}(\mathfrak{G}) = 0,$$

und damit der Beweis der ersten Behauptung. Das Umgekehrte leuchtet aber nunmehr unmittelbar ein.

Gehen wir nun wieder auf die Beziehungen (14) zurück, die zwischen den einzelnen Teilen der Darstellung $D(A;\, \mathfrak{a})$ bestehen, so folgen aus ihnen die Verkettungen:

$$D_\varrho(A)\, \widetilde{F}^{(\lambda)}_{\varrho\sigma} = \widetilde{F}^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}(P_\lambda(A) \times D_\sigma(A)),$$

wobei $\widetilde{F}^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}$ in der eben geschilderten Weise aus $F^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ zu entnehmen ist. Die Matrizen $F^{(\lambda)}_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ unterliegen dabei, wie Satz 3 angibt, gewissen Bedingungen: Es sind nämlich die Matrizen $F^{(\varrho-\sigma)}_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ linksregulär; daher

[16]) Zu diesem Begriff vgl. I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Transactions Amer. Math. Soc. **15** (1909), S. 159.

haben die ihnen entsprechenden Matrizen $\widetilde{F}_{\varrho\sigma}^{(\varrho-\sigma)}$ den Rang der Zeilenzahl. Nach der soeben gemachten Bemerkung ist mithin die Darstellung $D_\varrho(A)$ in der Darstellung $P_{\varrho-\sigma}(A) \times D_\sigma(A)$ enthalten. Damit erhalten wir für den Fall $\sigma = 0$, der allein von Interesse ist, den

Satz 7. *Ist $D(A;\mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ mit den größten vollreduziblen Bestandteilen $D_0(A), D_1(A), \ldots, D_s(A)$, so ist $D_\sigma(A)$ in der Darstellung $P_\sigma(A) \times D_0(A)$ enthalten (für $1 \leqq \sigma \leqq s$).*

Entsprechendes gilt für die beiden unimodularen affinen Gruppen.

Der Nachsatz über die unimodularen affinen Gruppen bedarf keines Beweises.

In diesem Zusammenhange beweisen wir noch einen Hilfssatz, der in der Folge anzuwenden sein wird.

Hilfssatz 3. *$S_1(\mathfrak{G})$ und $S(\mathfrak{G})$ seien zwei vollreduzible Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$; ferner mögen zwei Verkettungen*

$$S_1(\mathfrak{G})K_1 = K_1 S(\mathfrak{G}); \quad S_1(\mathfrak{G})K_2 = K_2 S(\mathfrak{G})$$

mit linksregulären Matrizen K_1, K_2 bestehen. Dann ist

$$K_2 = K_1 V$$

mit einer mit $S(\mathfrak{G})$ vertauschbaren regulären Matrix V [17]).

Nach Voraussetzung ist $S_1(\mathfrak{G})$ in $S(\mathfrak{G})$ enthalten. Ist $S_1(\mathfrak{G})$ zu $S(\mathfrak{G})$ ähnlich, so sind K_1, K_2 regulär; in diesem Falle ist die Behauptung also unmittelbar einleuchtend. Daher können wir annehmen, es sei $S(\mathfrak{G})$ zu $\begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ 0 & T(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$ ähnlich mit einer gewissen Darstellung $T(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.

Können wir zeigen, daß K_1 und K_2 derart zu quadratischen regulären Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} K_1 \\ L_1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} K_2 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

ergänzt werden können, daß die Gleichungen bestehen

$$\begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ 0 & T(\mathfrak{G}) \end{pmatrix} M_\alpha = M_\alpha S(\mathfrak{G}) \qquad (\alpha = 1, 2),$$

so ist $M_2 = M_1 V$ mit einer mit $S(\mathfrak{G})$ vertauschbaren regulären Matrix V. Dann ist aber auch

$$\begin{pmatrix} K_2 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ L_1 \end{pmatrix} V \quad \text{und} \quad K_2 = K_1 V.$$

Es sei also mit einer linksregulären Matrix K:

$$S_1(\mathfrak{G})K = K S(\mathfrak{G}).$$

---

[17]) Ich nenne eine konstante Matrix linksregulär, wenn sie den Rang der Zeilenzahl, rechtsregulär, wenn sie den Rang der Spaltenzahl hat. Bei quadratischen Matrizen sind Linksregularität und Rechtsregularität offenbar mit Regularität schlechthin gleichwertig.

K kann als linksreguläre Matrix zu einer quadratischen regulären Matrix

$$M = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$$

ergänzt werden. Man setze $MS(\mathfrak{G})M^{-1} = T(\mathfrak{G})$; dann gilt

$$T(\mathfrak{G})M = MS(\mathfrak{G}) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} T_{11}(\mathfrak{G}) & T_{12}(\mathfrak{G}) \\ T_{21}(\mathfrak{G}) & T_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} S(\mathfrak{G})$$

bei geeigneter Zerlegung von $T(\mathfrak{G})$. Hieraus folgt

$$T_{11}(\mathfrak{G})K + T_{12}(\mathfrak{G})L = KS(\mathfrak{G}) = S_1(\mathfrak{G})K$$

oder

$$(T_{11}(\mathfrak{G}) - S_1(\mathfrak{G}),\ T_{12}(\mathfrak{G})) \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix $M = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$ ist aber regulär, weshalb

$$T_{11}(\mathfrak{G}) = S_1(\mathfrak{G}); \quad T_{12}(\mathfrak{G}) = 0$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ T_{21}(\mathfrak{G}) & T_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} S(\mathfrak{G}).$$

Wegen der Vollreduzibilität von $S(\mathfrak{G})$ gibt es eine konstante Matrix P, so daß

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ P & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ T_{21}(\mathfrak{G}) & T_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ -P & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ 0 & T_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

wird. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} S_1(\mathfrak{G}) & 0 \\ 0 & T_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ PK + L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ PK + L \end{pmatrix} S(\mathfrak{G}).$$

Hierin kann noch $T_{22}(\mathfrak{G})$ durch eine beliebige ähnliche Darstellung ersetzt werden, ohne daß sich der obere Teil K der verkettenden Matrix abändert.

VIII.

Die affine Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_{n+1}$ aller reellen regulären Matrizen vom Grade $n+1$. Daher induziert jede Darstellung dieser Gruppe eine Darstellung der affinen Gruppe, insbesondere also die s-te Potenztransformation eine Darstellung $P_s(A; \mathfrak{a})$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$. Diese Darstellung $P_s(A; \mathfrak{a})$ kann, wie man sich leicht überlegt, in der Gestalt geschrieben werden:

$$(17) \quad P_s(A; \mathfrak{a}) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a}), & P_1(A), & 0, & \ldots, & 0 \\ F_{20}(\mathfrak{a}), & F_{21}(\mathfrak{a})P_1(A), & P_2(A), & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a}), & F_{s1}(\mathfrak{a})P_1(A), & F_{s2}(\mathfrak{a})P_2(A), & \ldots, & P_s(A) \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind insbesondere die Matrizen $F_{\sigma 0}(\mathfrak{a})$ sehr leicht anzugeben; jedes $F_{\sigma 0}(\mathfrak{a})$ ist nämlich gleich der einspaltigen Matrix, die die Potenzprodukte σ-ter Dimension der Komponenten von $\mathfrak{a}$ in lexikographischer Anordnung als Elemente besitzt. Die Matrizen $F_{\sigma 0}(\mathfrak{a})$ sind daher linksregulär, woraus auch die Linksregularität aller Matrizen $F_{\sigma\varrho}(\mathfrak{a})$ ziemlich einfach gefolgert werden kann. Die Darstellungen 1, $P_1(A)$, $P_2(A), \ldots, P_s(A)$ sind demnach die größten vollreduziblen Bestandteile von $P_s(A; \mathfrak{a})$.

Ist nun $D_0(A)$ eine beliebige ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$, so ist $P_s(A; \mathfrak{a}) \times D_0(A)$ gleichfalls eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}_n$. Diese Darstellung wollen wir als *die zu $D_0(A)$ gehörige Normaldarstellung von $\mathfrak{A}_n$ vom Index s* bezeichnen und $N_s D_0(A; \mathfrak{a})$ nennen:

$$N_s D_0(A; \mathfrak{a}) = P_s(A; \mathfrak{a}) \times D_0(A). \tag{18}$$

Auf Grund der Form (17) von $P_s(A; \mathfrak{a})$ findet man sehr leicht

$$N_s D_0(A; \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A), & 0 & \ldots, & 0 \\ N_{10}(\mathfrak{a}) D_0(A), & P_1(A) \times D_0(A) & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{s0}(\mathfrak{a}) D_0(A), & N_{s1}(\mathfrak{a})(P_1(A) \times D_0(A)), & \ldots, & P_s(A) \times D_0(A) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

wobei

$$N_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a}) = F_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a}) \times E_0$$

zu setzen ist mit der Einheitsmatrix E_0 vom Grade der Darstellung $D_0(A)$. Daher sind mit den $F_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ auch alle Teilmatrizen $N_{\varrho\sigma}(\mathfrak{a})$ linksregulär. Somit sind

$$D_0(A),\ P_1(A) \times D_0(A),\ P_2(A) \times D_0(A),\ \ldots,\ P_s(A) \times D_0(A)$$

die größten vollreduziblen Bestandteile der Darstellung $N_s D_0(A, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$.

Alles hier Gesagte läßt sich ohne weiteres auf die beiden unimodularen Gruppen $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$ übertragen.

Der Hauptsatz über die rationalen Darstellungen der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ lautet unter diesen Bezeichnungen:

Satz 8. *Jede ganzrationale Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$ mit dem ersten größten vollreduziblen Bestandteil $D_0(A)$ und dem Index s ist Abschnitt der zu $D_0(A)$ gehörenden Normaldarstellung $N_s D_0(A; \mathfrak{a})$, d. h. mit einer geeigneten regulären konstanten Matrix P ist:*

$$P^{-1} N_s D_0(A; \mathfrak{a})\, P = \begin{pmatrix} D(A; \mathfrak{a}) & 0 \\ D_{10}(A; \mathfrak{a}) & D_1(A; \mathfrak{a}) \end{pmatrix}.$$

Entsprechendes gilt für die beiden Gruppen $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$.

Es sei $D(A;\mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ mit den im Satze vorausgesetzten Eigenschaften, also

$$(20)\qquad D(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 & \dots & 0 \\ F_{10}(\mathfrak{a})\,D_0(A), & D_1(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a})\,D_0(A), & F_{s1}(\mathfrak{a})\,D_1(A), & \dots, & D_s(A) \end{pmatrix}$$

in der Zerlegung nach größten vollreduziblen Bestandteilen. Hierbei ist nach Satz 7 jedes $D_\sigma(A)$ ganz in der Darstellung $P_\sigma(A) \times D_0(A)$ enthalten. Schreiben wir weiter abgekürzt (19) und (20) in der Gestalt:

$$(21)\qquad \begin{cases} N_s D_0(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ N(\mathfrak{a})\,D_0(A) & M(\mathfrak{a})\,Q(A) \end{pmatrix}; \\ D(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ F(\mathfrak{a})\,D_0(A) & G(\mathfrak{a})\,D(A) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

so ist demnach $D(A)$ ganz in $Q(A)$ enthalten. Hierin sind ferner die Matrizen

$$N(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} N_{10}(\mathfrak{a}) \\ N_{20}(\mathfrak{a}) \\ \vdots \\ N_{s0}(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}; \quad F(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} F_{10}(\mathfrak{a}) \\ F_{20}(\mathfrak{a}) \\ \vdots \\ F_{s0}(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}$$

linksregulär, wenn man sie als Linearformenmatrizen in den Potenzprodukten der Komponenten von $\mathfrak{a}$ ansieht. Denn jede der Matrizen $N_{\sigma 0}(\mathfrak{a})$ und $F_{\sigma 0}(\mathfrak{a})$ ist ja linksregulär und in $\mathfrak{a}$ von der σ-ten Dimension. Ferner gelten, wie man leicht nachrechnet, die Beziehungen:

$$(22)\quad N(\mathfrak{a}) + M(\mathfrak{a})\,N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}+\mathfrak{b});\quad Q(A)\,N(\mathfrak{a}) = N(A\,\mathfrak{a})\,D_0(A):$$

$$(23)\quad F(\mathfrak{a}) + G(\mathfrak{a})\,F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b});\quad D(A)\,F(\mathfrak{a}) = F(A\,\mathfrak{a})\,D_0(A).$$

Die Darstellung $Q(A)$ kann man durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation zu

$$P^{-1}\,Q(A)\,P = Q'(A) = \begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D^*(A) \end{pmatrix}$$

abändern[18]). Setzt man dann

$$N'_s D_0(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} N_s D_0(A;\mathfrak{a}) \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

so ist diese Darstellung von der Gestalt:

$$N'_s D_0(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ N'(\mathfrak{a})\,D_0(A) & M'(\mathfrak{a})\,Q'(A) \end{pmatrix}$$

---

[18]) Für den Fall, daß $D(A)$ zu $Q(A)$ ähnlich ist, bedarf die Beweisführung kleiner Abänderungen, auf die nicht näher eingegangen werden soll.

mit

$$N'(\mathfrak{a}) = P^{-1} N(\mathfrak{a}); \quad M'(\mathfrak{a}) = P^{-1} M(\mathfrak{a}) P.$$

Nun füge man an $D(A;\mathfrak{a})$ rechts und unten so viele Nullspalten bzw. Nullreihen, daß

$$D'(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 & 0 \\ F(\mathfrak{a}) D_0(A) & G(\mathfrak{a}) D(A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den gleichen Grad wie $N_s D_0(A;\mathfrak{a})$ besitzt. Dafür kann dann geschrieben werden:

$$D'(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ F'(\mathfrak{a}) D_0(A) & G'(\mathfrak{a}) Q'(A) \end{pmatrix}$$

mit

$$F'(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad G'(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} G(\mathfrak{a}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die aus der zweiten der Gleichungen (23) leicht erhältliche Beziehung

$$Q'(A) F'(\mathfrak{a}) = F'(A\,\mathfrak{a}) D_0(A)$$

führt nun, da $F'(\mathfrak{a})$ als Linearformenmatrix der Potenzprodukte

$$a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \ldots a_n^{\nu_n} \qquad (1 \leqq \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \leqq s)$$

aufgefaßt werden kann, zu der Verkettung

$$Q'(A) \widetilde{F}' = \widetilde{F}'(R(A) \times D_0(A))$$

mit

$$R(A) = \begin{pmatrix} P_1(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2(A) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_s(A) \end{pmatrix}$$

in der gleichen Weise, wie sie im Abschnitt VII zum Beweise des Satzes 7 angewandt wurde. Die Darstellung

$$R(A) \times D_0(A) = Q(A)$$

ist aber zu $Q'(A)$ ähnlich; daher liegt in $\widetilde{F}'$ eine quadratische Matrix vor, die

$$Q'(A) \widetilde{F}' = \widetilde{F}' Q(A)$$

erfüllt. Aus der zweiten Gleichung von (22) entnimmt man weiter

$$Q'(A) N'(\mathfrak{a}) = N'(A\,\mathfrak{a}) D_0(A)$$

und damit

$$Q'(A) \widetilde{N}' = \widetilde{N}' Q(A),$$

also gleichfalls eine Verkettung mit einer quadratischen Matrix $\widetilde{N}'$; da aber $N'(\mathfrak{a})$ linksregulär ist, ist $\widetilde{N}'$ vom Rang der Zeilenzahl, folglich eine reguläre Matrix. Es existiert also die Inverse zu $\widetilde{N}'$, weshalb man findet:

$$Q'(A) \widetilde{F}' \widetilde{N}'^{-1} = \widetilde{F}' \widetilde{N}'^{-1} Q'(A).$$

Somit ist

$$\tilde{F}' = V\tilde{N}'$$

mit einer mit $Q'(A)$ vertauschbaren Matrix V. Hieraus folgt weiter

$$F'(\mathfrak{a}) = V N'(\mathfrak{a}).$$

Nun war aber $F'(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ 0 \end{pmatrix}$. Zerlegen wir V entsprechend dieser Gestalt von $F'(\mathfrak{a})$, so folgt

$$\begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} N'(\mathfrak{a}),$$

also

$$F(\mathfrak{a}) = V_1 N'(\mathfrak{a}); \quad 0 = V_2 N'(\mathfrak{a}).$$

Da aber $N'(\mathfrak{a})$ linksregulär ist, muß $V_2 = 0$ sein; da $F(\mathfrak{a})$ linksregulär ist, muß V_1 linksregulär sein.

Weiter erhält man aus der Gleichung

$$Q'(A)V = VQ'(A),$$

wenn man

$$Q'(A) = \begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D^*(A) \end{pmatrix}$$

setzt, da doch $D(A)$ und V_1, wie $D(A)$ und $F(\mathfrak{a})$ zusammensetzbar sind:

$$D(A)V_1 = V_1 Q'(A),$$

während andererseits gilt

$$D(A)(E\ 0) = (E\ 0)\begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D^*(A) \end{pmatrix} = (E\ 0)Q'(A).$$

Somit liegen zwei Verkettungen der gleichen Darstellungen mit zwei linksregulären Matrizen V_1 und $(E\ 0)$ vor. Nach dem Hilfssatz 3 ist daher:

$$(E\ 0) = V_1 W$$

mit einer mit $Q'(A)$ vertauschbaren regulären Matrix W.

Man gehe nun von $N_s' D_0(A;\mathfrak{a})$ zu der ähnlichen Darstellung

$$N_s'' D_0(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{pmatrix} N_s' D_0(A;\mathfrak{a}) \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0(A) & 0 \\ N''(\mathfrak{a}) D_0(A) & M''(\mathfrak{a}) Q'(A) \end{pmatrix}$$

mit

$$N''(\mathfrak{a}) = W^{-1} N'(\mathfrak{a}); \quad M''(\mathfrak{a}) = W^{-1} M'(\mathfrak{a}) W$$

über. Dann ist

$$F'(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} N'(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} W \cdot W^{-1} N'(\mathfrak{a})$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N''(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1''(\mathfrak{a}) \\ N_2''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1''(\mathfrak{a}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

und deshalb

$$N''(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ N_2''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt nach (22) die Gleichung:

$$N''(\mathfrak{a}) + M''(\mathfrak{a})\,N''(\mathfrak{b}) = N''(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}),$$

mithin nach geeigneter Zerlegung von $M''(\mathfrak{a})$:

$$\begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ N_2''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{11}''(\mathfrak{a})\,M_{12}''(\mathfrak{a}) \\ M_{21}''(\mathfrak{a})\,M_{22}''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\mathfrak{b}) \\ N_2''(\mathfrak{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \\ N_2''(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \end{pmatrix},$$

also

$$F(\mathfrak{a}) + M_{11}''(\mathfrak{a})\,F(\mathfrak{b}) + M_{12}''(\mathfrak{a})\,N_2''(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}),$$

während andererseits nach (23) gilt:

$$F(\mathfrak{a}) + G(\mathfrak{a})\,F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$

Hieraus folgt die Beziehung

$$(M_{11}''(\mathfrak{a}) - G(\mathfrak{a}))\,F(\mathfrak{b}) + M_{12}''(\mathfrak{a})\,N_2''(\mathfrak{b}) = 0$$

oder

$$(M_{11}''(\mathfrak{a}) - G(\mathfrak{a}),\ M_{12}''(\mathfrak{a}))\,N''(\mathfrak{b}) = 0.$$

Da aber $N''(\mathfrak{b})$ linksregulär ist, erhält man schließlich:

$$M_{11}''(\mathfrak{a}) = G(\mathfrak{a});\quad M_{12}''(\mathfrak{a}) = 0.$$

Somit nimmt die zu $N_s D_0(A;\mathfrak{a})$ ähnliche Darstellung $N_s'' D_0(A;\mathfrak{a})$ die Gestalt an:

$$N_s'' D_0(A;\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A), & 0 \\ N''(\mathfrak{a})\,D_0(A), & M''(\mathfrak{a})\,Q'(A) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_0(A), & 0 \\ \begin{pmatrix} F(\mathfrak{a}) \\ N_2''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix} D_0(A), & \begin{pmatrix} G(\mathfrak{a}) & 0 \\ M_{21}''(\mathfrak{a}) & M_{22}''(\mathfrak{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D(A) & 0 \\ 0 & D^*(A) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_0(A), & 0, & 0 \\ F(\mathfrak{a})\,D_0(A), & G(\mathfrak{a})\,D(A), & 0 \\ N_2''(\mathfrak{a})\,D_0(A), & M_{21}''(\mathfrak{a})\,D(A), & M_{22}''(\mathfrak{a})\,D^*(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(A;\mathfrak{a}) & 0 \\ D_{10}(A;\mathfrak{a}) & D_1(A;\mathfrak{a}) \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt aber die Gültigkeit der im Satze aufgestellten Behauptung.

Daß der Satz 8 aber auch für die beiden unimodularen affinen Gruppen gilt, läßt die Beweisführung ohne weiteres erkennen.

IX.

Die Bestimmung aller ganzrationalen Darstellungen einer der drei affinen Gruppen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$ ist damit auf die Bestimmung der Abschnitte vom Index s aller Normaldarstellungen $N_s D_0(A;\mathfrak{a})$ zurückgeführt. Wir haben daher allein noch die Aufgabe vor uns, ein Verfahren anzugeben, das diese Abschnitte zu konstruieren gestattet. Im folgenden behandeln wir, wie auch früher, allein den Fall der Gruppe $\mathfrak{A}_n$, da auf die beiden unimodularen Gruppen alles unmittelbar übertragen werden kann.

Es seien

$$y^{(\varrho)}:\ y_1^{(\varrho)},\ y_2^{(\varrho)},\ \ldots,\ y_n^{(\varrho)}$$

r Reihen von je n unabhängigen Veränderlichen; diese Reihen mögen mit Hilfe einer regulären n-reihigen Matrix $A = (\alpha_{\varkappa\lambda})$ kogredient linear transformiert werden:

$$z_\varkappa^{(\varrho)} = \sum_\lambda \alpha_{\varkappa\lambda}\, y_\lambda^{(\varrho)} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Ist $f(y)$ eine ganzrationale Funktion der Veränderlichen $y_\nu^{(\varrho)}$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten, so bezeichne man die Funktion $f(z)$ mit $f^A(y)$. Sind nun

$$f_1(y),\ f_2(y),\ \ldots,\ f_k(y)$$

derartige Funktionen, die linear unabhängig im Bereiche aller komplexen Zahlen sein mögen, und gilt ferner für jede reguläre Matrix A:

$$f_\alpha^A(y) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}(A)\, f_\beta(y) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

mit gewissen von den Elementen von A abhängenden Koeffizienten $d_{\alpha\beta}(A)$, so heißt nach I. Schur das System der Funktionen $f_\alpha(y)$ *Eigensystem der Gruppe* $\mathfrak{L}_n$. Man erkennt leicht, daß die Matrix

$$D(A) = (d_{\alpha\beta}(A))$$

dann eine (ganzrationale) Darstellung dieser Gruppe ist; sie heißt *die von dem Eigensystem erzeugte Darstellung*. Der Modul aller Funktionen

$$\sum_\alpha c_\alpha f_\alpha(y) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

heißt *Darstellungsmodul* der Gruppe $\mathfrak{L}_n$; jede Basis dieses Moduls erzeugt als Eigensystem von $\mathfrak{L}_n$ eine zu $D(A)$ ähnliche Darstellung von $\mathfrak{L}_n$[19]).

Da man zu jeder irreduziblen ganzrationalen Darstellung von $\mathfrak{L}_n$ ein solches Eigensystem angeben kann[20]), kann auch zu jeder beliebigen ganzrationalen Darstellung von $\mathfrak{L}_n$ wegen ihrer vollen Reduzibilität ein Eigensystem bestimmt werden.

Es sei $D_0(A)$ eine vorgegebene ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$,

$$\mathsf{M} = (f_1(y),\ f_2(y),\ \ldots,\ f_k(y))$$

ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{L}_n$, dessen Basis $f_\alpha(y)$ diese Darstellung erzeugt:

$$f_\alpha^A(y) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}(A)\, f_\beta(y) \quad \text{mit } D_0(A) = (d_{\alpha\beta}(A)). \tag{25}$$

Wenden wir auf eine der Formen $f_\alpha(z)$ die Transformation

$$z_0 = y_0;\ \ z_\varkappa = a_\varkappa y_0 + \sum_\lambda \alpha_{\varkappa\lambda}\, y_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h. eine Substitution $H = (A; \mathfrak{a})$ der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$ an, so werde $f_\alpha(z) = f_\alpha^H(y)$ gesetzt; die Formen $f_\alpha^H(y)$ hängen dann im allgemeinen von

[19]) Vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, Berlin, Jul. Springer 1931, Kapitel 17.

[20]) Vgl. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, Hirzel 1928 (1. Auflage), § 51.

den Veränderlichen $y_0^{(\varrho)}$ ab, lassen sich also nicht als lineare Verbindungen der Funktionen $f_\alpha(y)$ schreiben. Setzen wir in $f_\alpha^H(y)$ aber $y_0^{(\varrho)} = 0$, so gelten wiederum die Beziehung (25); es gilt:

$$f_\alpha^H(y) \equiv \sum_\beta d_{\alpha\beta}(A) f_\beta(y) \pmod{y_0} \qquad \text{mit } H = (A; \mathfrak{a}) \tag{26}$$

in leicht verständlicher Schreibweise. Somit ist M auch ein Darstellungsmodul der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, wenn wir verabreden, zwei ganzrationale Funktionen der Veränderlichen $y_0^{(\varrho)}, y_1^{(\varrho)}, \ldots, y_n^{(\varrho)}$ als gleich anzusehen, falls sie mod $y_0^{(\varrho)}$ kongruent sind.

Ferner mögen

$$X_1, X_2, \ldots, X_N \qquad \left(N = \binom{n+s}{s}\right)$$

die lexikographisch angeordneten Potenzprodukte s-ter Dimension von $n+1$ Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen. Ist

$$H = (A; \mathfrak{a}): \; z_0 = x_0; \; z_\varkappa = a_\varkappa x_0 + \sum_\lambda \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda,$$

so bezeichne $Z_\varrho = X_\varrho^H$ die entsprechenden Potenzprodukte der Veränderlichen $z_0, z_1, \ldots, z_n$; es gilt dann:

$$X_\varrho^H = \sum_\sigma p_{\varrho\sigma}(H) X_\sigma \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, N),$$

wobei

$$(p_{\varrho\sigma}(H)) = P_s(A; \mathfrak{a})$$

ist. Der Modul

$$\boldsymbol{\Pi}_s = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

ist daher ein Darstellungsmodul der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$, dessen Basis X_ϱ die Darstellung $P_s(A; \mathfrak{a})$ erzeugt.

Nun bilden wir den Modul

$$\mathsf{N}_s = \mathsf{M} \times \boldsymbol{\Pi}_s = (X_\varrho f_\alpha(y) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, N; \; \alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Die Basis $X_\varrho f_\alpha(y)$ ist ein Eigensystem von $\mathfrak{A}_n$, da gilt:

$$X_\varrho^H f_\alpha^H(y) \equiv \sum_{\beta,\sigma} p_{\varrho\sigma}(H) d_{\alpha\beta}(A) X_\sigma f_\beta(y) \pmod{y_0}.$$

Man erkennt sofort, daß

$$(p_{\varrho\sigma}(H) d_{\alpha\beta}(A)) = P_s(A; \mathfrak{a}) \times D_0(A) = N_s D_0(A; \mathfrak{a})$$

ist in der im vorigen Abschnitte eingeführten Bezeichnungsweise.

Es ist nun unmittelbar einzusehen, daß jeder Untermodul $\boldsymbol{\Delta}_s$ des Moduls N_s, der selbst Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}_n$ ist, einen Abschnitt der Darstellung $N_s D_0(A; \mathfrak{a})$ erzeugt. Umgekehrt entspricht einem Abschnitt dieser Normaldarstellung ein Untermodul des Moduls N_s. Wir haben daher lediglich die Untermoduln $\boldsymbol{\Delta}_s$ von N_s zu bestimmen, die Darstellungsmoduln von $\mathfrak{A}_n$ sind und Darstellungen vom Index s erzeugen.

In dem Modul N_s können wir eine aufsteigende Kette von Untermoduln:

$$\mathsf{N}_0 \subset \mathsf{N}_1 \subset \mathsf{N}_2 \subset \ldots \subset \mathsf{N}_s$$

bilden; dabei enthält der Modul N_σ alle die Funktionen $g(x, y)$ von N_s, die die Kongruenz

$$g(x, y) \equiv 0 \pmod{x_0^{s-\sigma}}$$

erfüllen. Jeder dieser Untermoduln ist ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}_n$; eine Basis des Moduls N_σ erzeugt offenbar eine zu

$$N_\sigma D_0(A; \mathfrak{a}) = P_\sigma(A; \mathfrak{a}) \times D_0(A)$$

ähnliche Darstellung. Denn diese Kette von Untermoduln entspricht ja gerade der früher gegebenen Form

$$N_s D_0(A; \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} D_0(A), & 0 & \ldots, & 0 \\ N_{10}(\mathfrak{a})\, D_0(A), & P_1(A) \times D_0(A) & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{s0}(\mathfrak{a})\, D_0(A), & N_{s1}(\mathfrak{a})\,(P_1(A) \times D_0(A)), & \ldots, & P_s(A) \times D_0(A) \end{pmatrix}$$

der betrachteten Darstellung.

Bezeichnet man weiter die Restklassenmoduln $\mathsf{N}_\sigma/\mathsf{N}_{\sigma-1}$ mit P_σ (für $1 \leqq \sigma \leqq s$) und setzt man $\mathsf{N}_0 = \mathsf{P}_0$, so ist auch jeder dieser Restklassenmoduln ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}_n$; eine Basis des Moduls P_σ erzeugt eine zur Darstellung $P_\sigma(A) \times D_0(A)$ ähnliche[21]).

Ist nun $D(A; \mathfrak{a})$ ein Abschnitt der Darstellung $N_s D_0(A; \mathfrak{a})$, dem der Untermodul M_s von N_s entspricht, so bilden wir in diesem Modul die der Kette $\mathsf{N}_0 \subset \mathsf{N}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{N}_s$ entsprechende Kette von Untermoduln

$$\mathsf{M}_0 \subset \mathsf{M}_1 \subset \ldots \subset \mathsf{M}_s.$$

Ist hierin $\mathsf{M}_s = \mathsf{M}_{s-1}$, ist also M_s schon in N_{s-1} enthalten, so ist $D(A; \mathfrak{a})$ schon Abschnitt des Abschnittes $N_{s-1} D_0(A; \mathfrak{a})$ von $N_s D_0(A; \mathfrak{a})$, also sicher nicht vom Index s. Damit also $D(A; \mathfrak{a})$ vom Index s sei, ist notwendig, aber offenbar auch hinreichend, daß der Modul M_s Funktionen $g(x, y)$ von N_s enthalte, für die

$$g(x, y) \not\equiv 0 \pmod{x_0}$$

gilt. Dafür, daß $D_0(A)$ der erste größte vollreduzible Bestandteil von $D(A; \mathfrak{a})$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathsf{M}_0 = \mathsf{N}_0$ ist.

Wir können nun ebenso die Restklassenmoduln

$$\mathsf{M}_\sigma/\mathsf{M}_{\sigma-1} = \boldsymbol{\Sigma}_\sigma \qquad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathsf{M}_0$$

bilden. Diese Restklassenmoduln $\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$ erzeugen als Darstellungsmoduln von $\mathfrak{A}_n$ die größten vollreduziblen Bestandteile $D_\sigma(A)$ von $D(A; \mathfrak{a})$ (für $0 \leqq \sigma \leqq s$).

---

[21]) Im Falle $\sigma = 0$ ist $P_0(A) = 1$ zu setzen.

Ist nun $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$, ..., $g_l(x,y)$ eine Basis des Moduls M_s, die $D(A;\mathfrak{a})$ erzeugt, so verteilen sich diese Funktionen auf die Restklassen der Moduln $\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$. $\mathfrak{g}_\sigma$ sei die Menge der zu M_σ, aber nicht zu $\mathsf{M}_{\sigma-1}$ gehörenden Funktionen der Basis. Die Funktionen von $\mathfrak{g}_\sigma$ repräsentieren *verschiedene* Restklassen des Restklassenmoduls P_σ. Denn wären etwa $g(x,y)$, $g'(x,y)$ aus derselben Restklasse von P_σ, so könnte $g'(x,y)$ durch eine Funktion aus $\mathsf{M}_{\sigma-1}$ in der Basis ersetzt werden. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß die vom Restklassenmodul $\boldsymbol{\Sigma}_\sigma$ erzeugte Darstellung $D_\sigma(A)$ einer der größten vollreduziblen Bestandteile von $D(A;\mathfrak{a})$ ist. Daher repräsentieren die zu $\mathfrak{g}_\sigma$ gehörenden Funktionen einen Untermodul des Restklassenmoduls P_σ.

Danach verläuft die Bestimmung der Darstellungsmoduln M_s zu Abschnitten vom Index s von $N_s D_0(A;\mathfrak{a})$ in folgender Weise:

Man wähle einen Untermodul $\boldsymbol{\Pi}_s$ des Restklassenmoduls P_s und ein Repräsentantensystem $\mathfrak{g}_s$ einer Basis dieses Untermoduls. Die Menge $\mathfrak{g}_s$ erzeugt einen gewissen Untermodul M_s^s des Moduls N_s. Dann sei $\boldsymbol{\Pi}_{s-1}$ ein beliebiger Untermodul des Restklassenmoduls P_{s-1}, dessen Restklassen alle zu N_{s-1} gehörenden Elemente von M_s^s enthalten, $\mathfrak{g}_{s-1}$ ein Repräsentantensystem einer Basis von $\boldsymbol{\Pi}_{s-1}$. Weiter sei M_s^{s-1} der von der Menge $\mathfrak{g}_{s-1}+\mathfrak{g}_s$ erzeugte Untermodul von N_s. Dann sei $\boldsymbol{\Pi}_{s-2}$ ein beliebiger Untermodul des Restklassenmoduls P_{s-2}, dessen Restklassen alle zu N_{s-2} gehörenden Elemente von M_s^{s-1} enthalten, $\mathfrak{g}_{s-2}$ ein Repräsentantensystem einer Basis dieses Moduls, und nun M_s^{s-2} der von der Menge $\mathfrak{g}_{s-2}+\mathfrak{g}_{s-1}+\mathfrak{g}_s$ erzeugte Untermodul von N_s. Auf diese Weise fahre man fort; man gelangt dann zu einem Modul M_s^1, der von dem Repräsentantensystem

$$\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2+\ldots+\mathfrak{g}_s$$

erzeugt wird. Nun füge man noch eine Basis $\mathfrak{g}_0$ des Moduls N_0 hinzu, und bezeichne den von $\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\ldots+\mathfrak{g}_s$ erzeugten Untermodul von N_s mit M_s. Dann ist M_s ein Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\ldots+\mathfrak{g}_s$ eine linearunabhängige Basis dieses Moduls, die eine ganzrationale Darstellung vom Index s mit $D_0(A)$ als erstem vollreduziblen Bestandteil erzeugt. Auf diesem Wege erhält man aber offenbar alle ganzrationalen Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$ mit diesen Eigenschaften.

X.

Für die Bestimmung der Abschnitte der zu einer vorgegebenen Darstellung $D_0(A)$ gehörenden Normaldarstellung $N_s D_0(A;\mathfrak{a})$ der affinen Gruppen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$ ist es, wie wir eben erkannt haben, von Interesse, die irreduziblen Bestandteile der Darstellung $P_s(A)\times D_0(A)$ zu kennen,

wenn die von $D_0(A)$ bekannt sind. Da die Darstellung $P_s(A) \times D_0(A)$ von $\mathfrak{L}_n$ zu $D_0(A) \times P_s(A)$ ähnlich ist, für diese aber, falls

$$D_0(A) = \begin{pmatrix} D_1(A) & 0 \\ 0 & D_2(A) \end{pmatrix}$$

ist, die Gleichung besteht:

$$D_0(A) \times P_s(A) = \begin{pmatrix} D_1(A) \times P_s(A) & 0 \\ 0 & D_2(A) \times P_s(A) \end{pmatrix},$$

können wir uns auf den Fall einer irreduziblen ganzrationalen Darstellung $D(A)$ beschränken.

Es handelt sich also um die Bestimmung der irreduziblen Bestandteile der Darstellung $P_s(A) \times D(A)$ bei vorgegebener irreduzibler ganzrationaler Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{L}_n$. Da hier vollreduzible Darstellungen vorliegen, kann diese Aufgabe allein durch Untersuchung der Charakteristiken gelöst werden[22]).

Eine irreduzible ganzrationale Darstellung $D(A)$ der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$ ist gekennzeichnet durch eine Zerlegung der Dimensionszahl[23])

$$m = (f)\colon\ m = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \quad (f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq f_n \geqq 0)$$

mit ganzen Zahlen f_α; zwischen diesen Zerlegungen von m und den irreduziblen ganzrationalen Darstellungen $D(A)$ der Dimension m besteht eine eineindeutige Beziehung, die durch gewisse Tatsachen der Theorie bedingt ist, auf die ich nicht weiter eingehen will[24]).

Setzt man nun

$$h_\alpha = f_\alpha + n - \alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

und sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix A, so ist die Charakteristik der der Zerlegung $m = (f)$ entsprechenden Darstellung[25])

$$\Phi = \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha}|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei genügen die ganzen Zahlen h_α der Beziehung

$$h_1 > h_2 > \ldots > h_n \geqq 0.$$

---

[22]) Auf Grund des Hauptsatzes über vollreduzible Gruppen; vgl. G. Frobenius und I. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1906, S. 186.

[23]) Vgl. *Schur* (1), Satz 3.

[24]) Vgl. *Schur* (1); H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, (1. Auflage). Formel (85), S. 247.

[25]) Vgl. *Schur* (1), Formel (39).

Es ist hiernach ohne weiteres klar, daß die Darstellung $D(A)$ auch durch die Zahlenfolge $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$ eindeutig charakterisiert ist. Wir wollen daher die Charakteristik Φ durch das Symbol

(27) $$\Phi = [h_1, h_2, \ldots, h_n]$$

bezeichnen.

Das Zeichen $[h_1, h_2, \ldots, h_n]$ soll weiterhin ganz allgemein für beliebige nichtnegative Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ den Determinantenquotienten

$$\Phi = \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha}|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|}$$

vertreten. Es wird dabei:

$$[h_1, h_2, \ldots, h_n] = 0,$$

wenn nur irgend zwei der h_α gleich sind, sonst aber

$$[h_1, h_2, \ldots, h_n] = \pm [k_1, k_2, \ldots, k_n],$$

wenn $k_1, k_2, \ldots, k_n$ die der Größe nach geordneten Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ darstellen, und das Vorzeichen positiv oder negativ ist, je nachdem ob die Ordnung der h_α der Größe nach durch eine gerade oder ungerade Permutation erreicht wird. $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ ist dann wieder die Charakteristik einer wohlbestimmten Darstellung von $\mathfrak{L}_n$.

Alles eben Gesagte kann man auf die beiden unimodularen Gruppen $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{N}_n$ übertragen, wenn man nur die folgende Festsetzung trifft:

Für die unimodulare Gruppe $\mathfrak{M}_n$ ist stets

$$[h_1 + 1, h_2 + 1, \ldots, h_n + 1] = [h_1, h_2, \ldots, h_n],$$

für die erweiterte unimodulare Gruppe $\mathfrak{N}_n$

$$[h_1 + 2, h_2 + 2, \ldots, h_n + 2] = [h_1, h_2, \ldots, h_n]$$

zu setzen. Diese Festsetzung hat man deshalb zu treffen, weil bei diesen Gruppen doch die Bedingungen

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n = 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \ldots \omega_n^2 = 1$$

hinzutreten.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen läßt sich nun die aufgeworfene Frage in einfacher Form beantworten:

Satz 9. *Hat die irreduzible ganzrationale Darstellung $D(A)$ von $\mathfrak{L}_n$ die Charakteristik*

$$\Phi = [h_1, h_2, \ldots, h_n],$$

so ist die Charakteristik X der Darstellung $P_s(A) \times D(A)$ von der Form:

$$X = \sum_\gamma [h_1 + \gamma_1, h_2 + \gamma_2, \ldots, h_n + \gamma_n],$$

wobei zu summieren ist über alle Lösungen der Gleichung

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = s$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen γ_α.

Das Gleiche gilt für die beiden unimodularen Gruppen $\mathfrak{M}_n$ und $\mathfrak{N}_n$ unter Beachtung der oben gemachten Bemerkung.

Es ist hierbei zu beachten, daß der im Satze angegebene Ausdruck nicht eine direkte Darstellung der Charakteristik X als Summe von einfachen Charakteristiken liefert, sondern als algebraische Summe aufzufassen ist, da ja nicht jeder der Summanden $[h_1 + \gamma_1, h_2 + \gamma_2, \ldots, h_n + \gamma_n]$ selbst Charakteristik ist, sondern sich von einer solchen um das Vorzeichen unterscheiden oder verschwinden kann. Jedoch ist eine Reduktion auf eine Summe von einfachen Charakteristiken in jedem Falle leicht durchführbar. Aus dieser reduzierten Gestalt von X ist aber dann sofort zu entnehmen, welche irreduziblen ganzrationalen Darstellungen in $P_s(A) \times D(A)$ enthalten sind.

Der Beweis des Satzes 9 ist leicht zu erbringen. Die Charakteristik $\Phi = [h_1, h_2, \ldots, h_n]$ der Darstellung $D(A)$ hat die Gestalt

$$\Phi = \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha}|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|}.$$

Setzt man nun

$$f(x) = (1 - \omega_1 x)(1 - \omega_2 x) \ldots (1 - \omega_n x)$$

mit einer Veränderlichen x, die der Beschränkung

$$|x| < \min\left(\frac{1}{|\omega_\alpha|}\right)$$

unterliege, so kann $\frac{1}{f(x)}$ in eine Potenzreihe nach x entwickelt werden:

$$\frac{1}{f(x)} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_k x^k + \ldots;$$

hierin stellen die Funktionen p_s der ω_α die Charakteristiken der Darstellungen $P_s(A)$ von $\mathfrak{L}_n$ dar[26]). Dann ist aber

$$\frac{\Phi}{f(x)} = p_0 \Phi + p_1 \Phi x + p_2 \Phi x^2 + \ldots + p_k \Phi x^k + \ldots, \tag{28}$$

und $p_s \Phi$ gerade die Charakteristik von $P_s(A) \times D(A)$.

Nun gilt andererseits

$$\frac{\Phi}{f(x)} = \frac{1}{(1 - \omega_1 x)(1 - \omega_2 x) \ldots (1 - \omega_n x)} \cdot \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha}|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|},$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\Phi}{f(x)} = \frac{\left|\frac{\omega_\beta^{h_\alpha}}{1 - \omega_\beta x}\right|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|}$$

oder

$$\frac{\Phi}{f(x)} = \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha} + \omega_\beta^{h_\alpha + 1} x + \ldots + \omega_\beta^{h_\alpha + k} x^k + \ldots|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|}.$$

[26]) Vgl. *Schur* (1), § 5.

Entwickelt man die Zählerdeterminante nach Potenzen von x, so entsteht

$$\frac{\Phi}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\gamma} \frac{|\omega_\beta^{h_\alpha + \gamma_\alpha}|}{|\omega_\beta^{n-\alpha}|} \right) x^k,$$

wobei in der inneren Summe zu summieren ist über alle Lösungen der Gleichung $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = k$ in nichtnegativen ganzen Zahlen γ_α. Da diese Entwicklung formal mit (28) übereinstimmen muß, findet man

$$p_s \Phi = \sum_{\gamma} [h_1 + \gamma_1, h_2 + \gamma_2, \ldots, h_n + \gamma_n],$$

wie behauptet worden war.

XI.

Als letzten Teil der Aufgabe haben wir nunmehr nur noch die Bestimmung aller *stetigen* Darstellungen der drei affinen Gruppen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$ vor uns; wir behandeln zunächst die beiden unimodularen Gruppen. Ist $D(A; \mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}_n$, so ist $D(E; \mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, also nach Satz 2 eine ganzrationale Darstellung. Ebenso ist die stetige Darstellung $D(A; 0)$ der unimodularen Untergruppe $\mathfrak{M}_n$ der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ ganzrational[27]). Daher ist

$$D(A; \mathfrak{a}) = D(E; \mathfrak{a}) D(A; 0)$$

eine ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}_n$. Genau das Gleiche gilt für die erweiterte unimodulare affine Gruppe $\mathfrak{B}_n$[28]). Somit gilt der

Satz 10. *Jede stetige Darstellung der beiden unimodularen affinen Gruppen ist ganzrational.*

Demnach haben wir uns allein mit den stetigen Darstellungen der affinen Gruppen $\mathfrak{A}_n$ zu beschäftigen. Ist $D(A; \mathfrak{a})$ eine solche Darstellung, so ist $D(E; \mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ und $D(A; 0)$ eine stetige Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe $\mathfrak{L}_n$.

Ist A eine beliebige n-reihige reguläre Matrix, so bezeichne im folgenden α stets die positive n-te Wurzel aus dem absoluten Betrag der Determinante von A:

$$\alpha^n = \text{abs. Betr.} |A| \qquad (\alpha > 0).$$

Dann hat die Matrix $A^* = \alpha^{-1} A$ die Determinante $|A^*| = \pm 1$, ist also ein Element der erweiterten unimodularen Untergruppe $\mathfrak{N}_n$ von $\mathfrak{L}_n$. Dabei gilt mit

$$AB = C \quad \text{auch} \quad \alpha\beta = \gamma \quad \text{und} \quad A^* B^* = C^*,$$

wenn β, γ und B^*, C^* die entsprechende Bedeutung haben. Demnach ist für eine stetige Darstellung $D(A)$ der Gruppe $\mathfrak{L}_n$

$$D(A) = D(\alpha E) D(A^*) = D(A^*) D(\alpha E) \tag{29}$$

---

[27]) Vgl. *Schur* (2), Satz XIII.

[28]) Vgl. *Schur* (2), Satz XV.

und

$$D(\alpha E)\, D(\beta E) = D(\alpha\beta E); \quad D(A^*)\, D(B^*) = D((AB)^*). \tag{30}$$

Setzen wir $\alpha = e^{\xi}$, $\beta = e^{\eta}$, so folgt hieraus

$$D(e^{\xi} E)\, D(e^{\eta} E) = D(e^{\xi+\eta} E).$$

Nach den Untersuchungen des Abschnittes III kann somit

$$D(\alpha E) = D(e^{\xi} E) = \exp(Q\xi) = \exp(Q \log \alpha)$$

gesetzt werden mit einer eindeutig bestimmten konstanten Matrix Q.

Die zweite Gleichung von (30) zeigt weiter, daß $D(A^*)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{N}_n$ ist. Demnach kann jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ in der Gestalt geschrieben werden:

$$D(A) = D^*(\alpha^{-1} A) \exp(Q \log \alpha) \tag{31}$$

mit einer ganzrationalen Darstellung $D^*(\mathfrak{N}_n)$ der Gruppe $\mathfrak{N}_n$ und einer konstanten Matrix Q, die wegen (29) die Beziehung

$$Q\, D^*(\mathfrak{N}_n) = D^*(\mathfrak{N}_n)\, Q$$

erfüllt. Umgekehrt erkennt man leicht, daß jede Matrixfunktion $D(A)$ der Form (31) mit den angegebenen Eigenschaften eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{L}_n$ ist.

Ist nun $D(A; \mathfrak{a})$ eine stetige Darstellung von $\mathfrak{A}_n$, so kann

$$D(A; 0) = D^*(\alpha^{-1} A) \exp(Q \log \alpha)$$

gesetzt werden. Ferner folgt aus der Gleichung

$$D(A; 0)\, D(E; \mathfrak{a}) = D(E; A\,\mathfrak{a})\, D(A; 0) \tag{32}$$

für eine Matrix B aus $\mathfrak{N}_n$:

$$D^*(B)\, D(E; \mathfrak{a}) = D(E; B\,\mathfrak{a})\, D^*(B).$$

Setzt man daher für Elemente B aus $\mathfrak{N}_n$

$$D^*(B; \mathfrak{a}) = D(E; \mathfrak{a})\, D^*(B), \tag{33}$$

so ist dies eine ganzrationale Darstellung der erweiterten unimodularen affinen Gruppe $\mathfrak{B}_n$. Die stetige Darstellung $D(A; \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{A}_n$ hat mithin die Gestalt

$$D(A; \mathfrak{a}) = D^*(\alpha^{-1} A; \mathfrak{a}) \exp(Q \log \alpha),$$

worin $D^*(B; \mathfrak{a})$ eine ganzrationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ ist, die Matrix Q die Gleichung erfüllt:

$$Q\, D^*(B; 0) = D^*(B; 0)\, Q. \tag{34}$$

Die Matrix Q muß aber noch eine andere, weit wesentlichere Bedingung erfüllen. Aus (32) erhalten wir nämlich:

$$\exp(Q \log \alpha)\, D^*(\alpha^{-1} A)\, D(E, \mathfrak{a}) = D(E; A\,\mathfrak{a})\, D^*(\alpha^{-1} A) \exp(Q \log \alpha)$$

und hieraus durch (33)

$$\exp(Q \log \alpha)\, D(E; \mathfrak{b}) = D(E; \alpha\,\mathfrak{b}) \exp(Q \log \alpha),$$

wenn $\alpha^{-1} A\, \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ gesetzt wird. Setzt man hierin

$$D(E; \mathfrak{b}) = \exp(L(\mathfrak{b})),$$

so ist demnach

$$\exp(Q \log \alpha)\, L(\mathfrak{b}) = L(\alpha\, \mathfrak{b}) \exp(Q \log \alpha) = \alpha\, L(\mathfrak{b}) \exp(Q \log \alpha).$$

Mit der Substitution $\alpha = e^{\xi}$ folgt weiter:

$$\exp(Q\, \xi)\, L(\mathfrak{b}) = e^{\xi}\, L(\mathfrak{b}) \exp(Q\, \xi)$$

und damit:

$$\sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} Q^{\nu}\, \xi^{\nu}\, L(\mathfrak{b}) = \sum_{\mu,\,\nu} \frac{1}{\mu!}\, \frac{1}{\nu!}\, L(\mathfrak{b})\, Q^{\nu}\, \xi^{\mu+\nu}.$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten der Potenzen von ξ findet man:

$$Q\, L(\mathfrak{b}) - L(\mathfrak{b})\, Q = L(\mathfrak{b}) \tag{35}$$

und weitere Bedingungen, die sämtlich aus dieser einzigen folgen.

Umgekehrt hat man bei einer ganzrationalen Darstellung $D^*(B; \mathfrak{b})$ der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ und einer Matrix Q, die die beiden Bedingungen (34), (35) erfüllt, in

$$D(A; \mathfrak{a}) = D^*(\alpha^{-1} A; \mathfrak{a}) \exp(Q \log \alpha) \tag{36}$$

eine stetige Darstellung der affinen Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

Wir nennen daher eine ganzrationale Darstellung $D^*(B; \mathfrak{b})$ der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ *auf die Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *ausdehnbar*, wenn zu $D^*(B; \mathfrak{b})$ eine Matrix Q mit den Eigenschaften (34), (35) angegeben werden kann. Die Darstellung (36) heißt dann eine *zu der Darstellung* $D^*(B; \mathfrak{b})$ *gehörige Darstellung von* $\mathfrak{A}_n$.

Satz 11. *Eine ganzrationale Darstellung* $D^*(B; \mathfrak{b})$ *von* $\mathfrak{B}_n$ *mit* $D(E; \mathfrak{b}) = \exp(L(\mathfrak{b}))$ *ist dann und nur dann auf die Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *ausdehnbar, wenn das lineare Gleichungssystem:*

$$X\, L(\mathfrak{b}) - L(\mathfrak{b})\, X = L(\mathfrak{b})$$

eine vom Vektor $\mathfrak{b}$ *unabhängige Lösung* X *besitzt. Ist*

$$D(A; \mathfrak{a}) = D^*(\alpha^{-1} A; \mathfrak{a}) \exp(Q \log \alpha)$$

eine zu $D^*(B; \mathfrak{b})$ *gehörige Darstellung von* $\mathfrak{A}_n$, *so erhält man alle anderen zu* $D^*(B; \mathfrak{b})$ *gehörigen Darstellungen von* $\mathfrak{A}_n$ *in*

$$D(A; \mathfrak{a}) = D^*(\alpha^{-1} A; \mathfrak{a}) \exp((Q + V) \log \alpha),$$

worin V *eine beliebige mit* $D^*(B; \mathfrak{b})$ *vertauschbare Matrix bedeutet.*

Ist das Gleichungssystem

$$X\, L(\mathfrak{b}) - L(\mathfrak{b})\, X = L(\mathfrak{b}) \tag{37}$$

nicht lösbar, so ist die Darstellung $D^*(B; \mathfrak{b})$ von $\mathfrak{B}_n$ auf die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ gewiß nicht ausdehnbar. Ist aber X_0 eine Lösung von (37), so gibt es noch weitere Lösungen, da beispielsweise auch $X_0 + E$ eine Lösung ist. Ist X eine von X_0 verschiedene Lösung, so ist

$$(X - X_0)\, L(\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{b})\, (X - X_0),$$

also $X = X_0 + Y$, wobei

$$Y L(\mathfrak{b}) = L(\mathfrak{b}) Y \tag{38}$$

gilt. Nun sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ein linearunabhängiges System von Lösungen von (38), und jede andere Lösung von (38) als lineare Verbindung dieser Lösungen darstellbar.

Ist $(B; 0)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{N}_n$, so ist

$$D^*(B;0)\, L(\mathfrak{b})\, D^*(B^{-1};0) = L(B\mathfrak{b}).$$

und somit $D^*(B;0)\, X_0\, D^*(B^{-1};0)$ eine Lösung von (37); ebenso ist für jede Lösung Y von (38) auch $D^*(B;0)\, Y\, D^*(B^{-1};0)$ eine Lösung von (38). Somit gilt:

$$\begin{cases} D^*(B;0)\, X_0\, D^*(B^{-1};0) = X_0 + \sum\limits_{\lambda} c_\lambda(B)\, Y_\lambda, \\ D^*(B;0)\, Y_\varkappa\, D^*(B^{-1};0) = \sum\limits_{\lambda} c_{\varkappa\lambda}(B)\, Y_\lambda \end{cases} \tag{39}$$

mit gewissen von B abhängenden Größen $c_\lambda(B)$, $c_{\varkappa\lambda}(B)$, die aber offenbar rationale Funktionen der Koeffizienten von B sind. Aus der linearen Unabhängigkeit der Matrizen $Y_\varkappa$ und den Beziehungen (39) zeigt man nun sehr leicht, daß die Matrix:

$$C(B) = \begin{pmatrix} 1 & c_1(B) & c_2(B) & \ldots & c_k(B) \\ 0 & c_{11}(B) & c_{12}(B) & \ldots & c_{1k}(B) \\ 0 & c_{21}(B) & c_{22}(B) & \ldots & c_{2k}(B) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{k1}(B) & c_{k2}(B) & \ldots & c_{kk}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}(B) \\ 0 & C_k(B) \end{pmatrix}$$

eine rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{N}_n$ ist. Eine solche Darstellung ist bekanntlich vollreduzibel. Daher gibt es eine Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p} \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k),$$

so daß

$$P\, C(B)\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_k(B) \end{pmatrix}$$

wird. Setzt man daher

$$Q = X_0 + p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \ldots + p_k Y_k,$$

so ist

$$D^*(B;0)\, Q = Q\, D^*(B;0); \quad Q L(\mathfrak{b}) - L(\mathfrak{b}) Q = L(\mathfrak{b}).$$

Somit ist die Darstellung $D^*(B;\mathfrak{b})$ von $\mathfrak{B}_n$ auf $\mathfrak{A}_n$ ausdehnbar.

Sind Q, Q' zwei verschiedene Lösungen dieser beiden Gleichungen, so ist $Q' - Q$ mit $D^*(B;0)$ und mit $L(\mathfrak{b})$, also auch mit $D^*(E;\mathfrak{b})$ vertauschbar. Daher ist $Q' = Q + V$ mit einer mit $D^*(B;\mathfrak{b})$ vertauschbaren Matrix V.

(Eingegangen am 27. April 1937.)

Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. I.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Erster Teil:

Die Bilinearformen.

Angeregt durch die Untersuchungen Hermites über indefinite ternäre quadratische Formen hat H. Poincaré automorphe Funktionen in Betracht gezogen, deren Gruppe mit der reproduzierenden Gruppe einer solchen Form isomorph ist [1]). Zu diesen Funktionen gehört auch die elliptische Modulfunktion. Ein wesentliches Ergebnis ist, daß die Eigenschaft der Transformierbarkeit nicht nur der Modulfunktion, sondern auch den genannten Funktionen zukommt.

Im ersten Band des Werkes von R. Fricke und F. Klein über automorphe Funktionen [2]) wird ein Überblick über den damaligen Stand der arithmetischen Untersuchung der reproduzierenden Gruppen indefiniter ternärer quadratischer Formen gegeben R. Fricke untersucht daselbst den allgemeinen Fall, daß die Koeffizienten der ternären Form einem algebraischen Zahlkörper angehören und die reproduzierende Gruppe in der Ebene diskontinuierlich bleibt. Die Eigenschaft der Transformierbarkeit der zugehörigen automorphen Funktionen wird nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen. Indessen hat Fricke im Anhang des zweiten Bandes [3]) das Galoissche Problem des Kongruenzmoduls 3 für die Dreiecksfunktion $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}\right)$ und das in diesem enthaltene Transformationsproblem nach speziellen algebraischen Methoden behandelt.

Diese rein algebraischen Methoden sind wesentlicher Erweiterungen fähig [4]). Durch Aufstellung von Transformationsgleichungen nach diesen Methoden gewann ich allgemeine Einsichten über transformierbare automorphe Funktionen. Hierzu sei nur bemerkt, daß jede algebraische Gleichung, die die algebraischen Eigenschaften einer Transformationsgleichung erfüllt,

[1]) Journal de Mathématiques IV. Serie, 3 (1887); Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique, S. 405—464,

[2]) Band I Leipzig, Teubner, 1897, Abschnitt 3, S. 446—634.

[3]) Band II Leipzig, Teubner, 1912, Anhang, S. 553—662.

[4]) In meiner Arbeit im Crelle-Journal 168 (1932), S. 91—105 ist die algebraische und gruppentheoretische Grundlage dieser Methoden gegeben.

eindeutig einer automorphen Funktion zugeordnet ist, deren Gruppe mit der reproduzierenden Gruppe einer der erwähnten ternären Formen isomorph ist. Die Bezeichnung dieser Funktionen als transformierbare Funktionen erscheint daher gerechtfertigt.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Aufgaben, das Geschlecht und die Verzweigung der transformierbaren automorphen Funktionen und die in der zugeordneten Gruppe enthaltenen Kongruenzgruppen zu ermitteln. Die Untersuchungen über die Kongruenzgruppen führten mich zu einem neuen, durchsichtigen Beweise des Satzes über die Klassenzahl indefiniter ternärer quadratischer Formen [5]), der sogleich auch auf den Fall, daß die Koeffizienten der Form einem algebraischen Zahlkörper angehören, ausdehnbar ist. Jedoch findet in der vorliegenden Arbeit die Einschränkung statt, daß der Zahlkörper nur Hauptideale besitzt. Dieser Fall enthält den weitaus größten Teil der durchführbaren algebraischen Aufgaben. Im Hinblick auf diese Aufgaben bleibt die Untersuchung auf die sogleich zu definierenden „Grundformen" und automorphen „Grundfunktionen" beschränkt und man erhält solchermaßen einfache, prägnante Resultate.

Inhaltsübersicht.

Die vorliegende Theorie der reproduzierenden Gruppen indefiniter ternärer quadratischer Formen gründet sich auf die Beziehung zu einer speziellen Art von quaternären quadratischen Formen, die eine umfassende Verallgemeinerung der Hermiteschen konjugiert-komplexen quadratischen Formen darstellen und als konjugiert-quadratische Bilinearformen bezeichnet werden. Die Arbeit zerfällt demnach in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Bilinearformen. Aus diesen Resultaten läßt sich im zweiten Teile ohne Verwendung wesentlich neuer Hilfsmittel in einfachster Weise die Theorie der ternären quadratischen Formen aufbauen.

Im ersten Teil der Arbeit werden nach einer einleitenden Bemerkung über die elliptische Modulfunktion (Abschnitt 1) die Bilinearformen und ihre Transformation vermittels binärer linearer Substitutionen erklärt (Abschnitt 2). Sodann werden die fundamentalen Aufgaben der Darstellung von Zahlen und ternären Formen durch Bilinearformen behandelt (Abschnitt 3, 4). Ferner werden die Transformationen einer Bilinearform in sich bestimmt

[5]) Die Bestimmung der Klassenzahl indefiniter ternärer quadratischer Formen behandeln die Arbeiten von A. Meyer. Siehe P. Bachmann: Die Arithmetik der quadratischen Formen, Leipzig, Teubner (1898) S. 233–271. Die neuere Darstellung von L. E. Dickson, Studies in the theorie of numbers, the University of Chicago Science Series, (1930) Part I, chapter IV basiert auf den Gedankengängen von Meyer, enthält aber Verbesserungen und Vereinfachungen des Beweises.

und ihre Beziehung zu den Transformationen einer ternären quadratischen Form in sich dargelegt (Abschnitt 5). Die Existenz der reproduzierenden Gruppe wird nachgewiesen und die Bedingungen für Diskontinuität in der Ebene ermittelt (Abschnitt 6). Alsdann wird „das Grundproblem der Kongruenzgruppen" erklärt und vermittels der Theorie der endlichen Gruppen soweit gefördert, als dies für die Bestimmung der Klassenzahl der indefiniten Bilinearformen erforderlich ist (Abschnitt 8 bis 10). Den Schluß dieses Teiles bildet die Ermittlung des hyperbolischen Inhaltes des Diskontinuitätsbereiches der reproduzierenden Gruppe vermittelst der Dirichletschen Prinzipien (Abschnitt 11, 12).

Die Ergebnisse des zweiten Teiles der Arbeit, der von den ternären quadratischen Formen handelt, lassen sich ausführlicher mitteilen. Die Koeffizienten der Form

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + b_1 x_1 x_3 + b_2 x_2 x_3 + a x_3^2$$

seien ganze Zahlen eines Zahlkörpers K_λ vom Grade λ, der nur Hauptideale besitzt. Die reproduzierende Gruppe der Form f ist in der Ebene diskontinuierlich, wenn K_λ ein total reeller Körper ist, die Form f selbst indefinit ist, jedoch die $\lambda - 1$ zu f konjugierten Formen definit sind. Als Diskriminante der Form f wird die ganze Zahl

$$(2) \qquad D = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 2n_0 & n_1 & b_1 \\ n_1 & 2n_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & 2a \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Diskriminante der binären Form $f(x_1, x_2, 0)$ sei A. Eine ternäre Form, bei der D und A keinen quadratischen Faktor haben und A prim zu $2D$ ist, sei als Grundform bezeichnet und die automorphe Funktion, deren Gruppe mit der vollständigen reproduzierenden Gruppe einer Grundform isomorph ist, als Grundfunktion.

Die Bedeutung der Grundformen ist damit gegeben, daß sich jede ternäre quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten vermöge einer in K_λ rationalen Transformation nach Absonderung eines Zahlenfaktors in eine Grundform überführen läßt[6]). Die Charaktere einer Grundform sind durch

$$(3) \qquad \left(\frac{A}{q_i}\right), \qquad D = \prod_{i=1}^{\mu} q_i$$

gegeben, wenn q_i alle μ Primfaktoren von D durchläuft, und das Symbol den Wert $+1$ oder -1 bedeutet, je nachdem q_i in dem erweiterten Körper $K_\lambda(\sqrt{A})$ in zwei verschiedene Primideale zerfällt oder eine Primzahl bleibt.

[6]) Wenn K_λ die Klassenzahl 2 hat, läßt sich von den entsprechend definierten Grundformen dieselbe Eigenschaft nachweisen und es werden demzufolge auch dieselben Resultate erhalten.

Nur die Hälfte aller durch die Charaktere gegebenen Geschlechter sind möglich und diese existieren auch wirklich (Abschnitt 1).

Die Transformationen einer Grundform in sich werden untersucht, im besonderen wird die Gesamtheit der unimodularen ternären Transformationen festgestellt, die die vollständige reproduzierende Gruppe darstellen (Abschnitt 2, 3). Vermittels des Begriffes „der transformierenden Substitution" läßt sich das Ergebnis über die Klassenzahl der Bilinearformen auf die ternären Formen anwenden (Abschnitt 4). Die Klassenzahl eines Geschlechtes von Grundformen ist eins, wenn die Diskriminante D der Grundformen für jede Zahl m aus K_λ einen Teiler d derart besitzt, daß die $\lambda - 1$ zu dm konjugierten Zahlen sämtlich positiv sind. Bei beliebiger Diskriminante D beträgt die Klassenzahl 2^ϱ, wenn mindestens ϱ Primzahlen, $q_1, \ldots, q_\varrho$ aus K_λ erforderlich sind, um zu einer Zahl

$$D' = D \cdot \prod_{i=1}^{\varrho} q_i \tag{4}$$

von der bezeichneten Eigenschaft zu gelangen (Abschnitt 5). Mit Hilfe des Satzes von der Klassenzahl läßt sich sodann das oben erwähnte Grundproblem der Kongruenzgruppen vollständig lösen (Abschnitt 6, 7).

Die Transformierbarkeit der Grundfunktionen gelangt dahin zum Ausdruck, daß jeder Primzahl q aus K_λ, die in der Diskriminante D der zugehörigen ternären Form nicht aufgeht, eine algebraische Korrespondenz zugeordnet ist, welche die Grundfunktion in eine andere oder in sich transformiert. Eine Transformation in sich wird erhalten, wenn es Teiler d von D derart gibt, daß dq total positiv ist, und es besteht Symmetrie in den Variablensystemen der Korrespondenz (Abschnitt 8). Gibt es zu jeder Zahl m aus K_λ einen Teiler d von D derart, daß dm eine total positive Zahl ist, so führt jede Transformation die Grundfunktion in sich über.

In diesem Falle gewinnt die Formel für den hyperbolischen Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der Grundfunktion die Gestalt

$$I_g = \frac{\pi k}{2^{\lambda-3}} \prod_{i=1}^{u} \frac{1}{2}\left[N(q_i) + \left(\frac{A}{q_i}\right)\right]. \tag{5}$$

In dieser bedeutet $N(q_i)$ die Norm von q_i und k eine nur von dem Zahlkörper K_λ abhängige rationale Zahl. Für k gilt die Darstellung

$$k = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2^\lambda \pi^{2\lambda}} \cdot \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-2}}, \tag{6}$$

in der Δ die Körperdiskriminante von K_λ bedeutet und das Produkt sich über alle Primzahlen q von K_λ erstreckt. Auch für beliebige D gelten die Formeln (5) und (6), wenn die rechte Seite von (5) durch eine Potenz von 2 dividiert wird, die zur Klassenzahlbestimmung in Beziehung steht (Abschnitt 9).

Den Schluß des zweiten Teiles bildet die Bestimmung der Anzahl und Ordnung der Verzweigungspunkte der automorphen Grundfunktionen (Abschnitt 10 bis 12). Die beiden Fälle sind zu unterscheiden, in denen die Ordnungszahl $\nu > 2$ oder $= 2$ ist. Für $\nu > 2$ werden im besonderen Fälle behandelt, bei denen einzelne Verzweigungspunkte der Ordnung ν auftreten (Abschnitt 11). Im Falle $\nu = 2$ ist, wenn das Geschlecht der Grundform nur eine Klasse aufweist, die Anzahl durch eine Summe aus Klassenzahlen von Geschlechtern binärer definiter quadratischer Formen, deren Diskriminante Teiler von $4D$ ist, gegeben (Abschnitt 12). Aus I_g in (5) und den Anzahlen und der Ordnung ν der Verzweigungspunkte ergibt sich das Geschlecht p der automorphen Grundfunktion zu

$$p = \frac{1}{4\pi} I_g + 1 - \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{\nu}\right). \tag{7}$$

Zu jedem vorgegebenen Geschlecht p gibt es nur eine endliche Anzahl transformierbarer automorpher Funktionen. Aus den Formeln (5) bis (7) läßt sich die Behauptung mangels einer hinreichenden Abschätzung des Minimums von Δ mit wachsendem λ zunächst nur mit der Einschränkung beweisen, daß auch λ vorgegeben wird.

I. Die konjugiert-quadratischen Bilinearformen.

1. Modulfunktion und Bilinearformen.

Die Eigenschaft der Transformierbarkeit automorpher Funktionen werde an der elliptischen Modulfunktion kurz in Erinnerung gebracht. Seien $J(\zeta)$ und $J(\zeta')$ zwei Modulfunktionen erster Stufe, deren Argumente durch eine lineare Substitution

$$\zeta' = T(\zeta) = \frac{x_1 \zeta + y_1}{y_2 \zeta + x_2} \tag{8}$$

verbunden sind. Die Koeffizienten x_1, y_1, y_2, x_2 seien ganze rationale Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben, und die Determinante

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 \tag{9}$$

eine positive von Null und Eins verschiedene Zahl. Unter $J(\zeta)$ und $J(\zeta')$ besteht eine algebraische Gleichung

$$f(J(\zeta), \; J(\zeta')) = 0, \tag{10}$$

die Gleichung für die Transformation vom Grade m. Da $J(\zeta)$ für sich betrachtet, durch jede unimodulare Substitution in sich übergeht, desgleichen $J(\zeta')$, so sind die zur Transformationsgleichung gehörigen Substitutionen durch

$$T' = U\,T\,U' \tag{11}$$

gegeben, wenn U und U' beliebige Substitutionen der Modulgruppe bedeuten. Andererseits wird jeder Zweig von $J(\zeta)$ in der Gleichung (10) in sich übergeführt, wenn auf ζ und ζ' unimodulare Substitutionen V bzw. V' von der Eigenschaft

$$V T = T V' \tag{12}$$

ausgeübt werden. Die Gesamtheit aller V bilden eine Transformationsgruppe, desgleichen die Gesamtheit aller V'.

Die Determinante (9) stellt eine bilineare Form dar und die in (11) und (12) bezeichneten Aufgaben werden durch die arithmetische Theorie dieser Formen gelöst. Die Gesamtheit aller Transformationen vom Grade m werden in Klassen eingeteilt, indem alle Transformationen $T U'$ in eine Klasse zusammengefaßt werden. Für den Grad m sei die Klassenzahl mit $\psi(m)$ bezeichnet. Die Berechnung von $\psi(m)$ ergibt sich aus folgenden Angaben. Für $m = m_1 \cdot m_2$ gilt, wenn m_1 und m_2 prim zueinander sind,

$$\psi(m) = \psi(m_1) \cdot \psi(m_2) \tag{13}$$

und für die Potenz einer Primzahl q

$$\psi(q^a) = q^{a-1} \cdot (q+1). \tag{14}$$

Um zu entscheiden, ob $U T U'$ alle Klassen erzeugt, ist zunächst die zweite Aufgabe (12) zu behandeln. Diese führt auf eine Kongruenzgruppe m-ter Stufe, da (12) in die Gestalt

$$m \cdot V' = T^{-1} V T \tag{15}$$

gesetzt werden kann. Bezeichne Γ die Modulgruppe und $\Gamma_{(m)}$ die Gruppe der V in (12), so wird für den Index dieser Gruppe bezüglich Γ dieselbe mit $\psi(m)$ bezeichnete Zahl gefunden und es gilt

$$\Gamma = U_1 \Gamma_{(m)} + U_2 \Gamma_{(m)} + \ldots + U_{\psi(m)} \Gamma_{(m)}, \tag{16}$$

so daß in der Tat durch

$$U_\nu T = T_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, \psi(m)) \tag{17}$$

alle Klassen erzeugt werden. Denn zwei voneinander verschiedene Transformationen T_ν und T_ϱ gehören nicht in dieselbe Klasse. Wäre nämlich

$$T_\nu = T_\varrho U', \tag{18}$$

so würde aus (17) folgen

$$T^{-1} U_\varrho^{-1} U_\nu T = m \cdot U', \tag{19}$$

also U' eine der Substitutionen V' und $U_\varrho^{-1} U_\nu$ eine der Substitutionen V sein, was zufolge der Zerlegung (16) nicht möglich ist. Daher gibt es zu jedem Transformationsgrad nur eine Transformationsgleichung und diese ist sowohl in $J(\zeta)$ als auch in $J(\zeta')$ vom Grade $\psi(m)$. Für die folgenden Betrachtungen wird sich die Beschränkung auf Primzahlen q als zweckmäßig erweisen.

Die Symmetrie der Transformationsgleichung in $J(\zeta)$ und $J(\zeta')$ ergibt sich aus der Existenz von solchen Transformationen T, die die Gruppe $\Gamma_{(q)}$ zu einer Gruppe

$$\Gamma_{(q)s} = \Gamma_{(q)} + T\,\Gamma_{(q)} \tag{20}$$

erweitern. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $T\Gamma_{(q)} = \Gamma_{(q)}T$ ist. Die Transformationsgruppe $\Gamma_{(q)}$ sei dargestellt durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - q\beta\gamma = 1, \tag{21}$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten. Die gewünschte Erweiterung wird durch $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ geleistet, denn es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -q\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q\gamma & -\delta \\ q\alpha & q\beta \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Automorphe Funktionen mit der Gruppe $\Gamma_{(q)s}$ sind die symmetrischen Funktionen [7])

$$J(\zeta) + J(\zeta'), \qquad J(\zeta)\cdot J(\zeta'). \tag{23}$$

Das Wesentliche ist nun aber, daß auch diese die Eigenschaft der Transformierbarkeit besitzen. Da das Geschlecht im allgemeinen größer als Null ist, treten „Modularkorrespondenzen" an die Stelle der Transformationsgleichungen. Bedeutet q' eine von q verschiedene Primzahl, so läßt sich die Transformationsgruppe vom Grade q' für die Funktionen (23) durch die Substitutionen vom Typus

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ qq'\gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} q\alpha & \beta \\ qq'\gamma & q\delta \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\alpha\delta - qq'\beta\gamma = 1, \qquad q\alpha\delta - q'\beta\gamma = 1$$

darstellen. Die Symmetrie in den Veränderlichen der Transformationsgleichung bzw. -korrespondenz folgt aus den Erweiterungen [8])

$$\begin{pmatrix} q'\alpha & \beta \\ qq'\gamma & q'\delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} qq'\alpha & \beta \\ qq'\gamma & qq'\delta \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$q'\alpha\delta - q\beta\gamma = 1, \qquad qq'\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

---

[7]) R. Fricke, Elliptische Funktionen 2 (1922), S. 357, Leipzig, Teubner.

[8]) Zu diesen Gruppenerweiterungen: F. Klein und R. Fricke, loc. cit. autom. Funkt. 1, S. 546 ff., im besonderen Fig. 173. Ferner R. Fricke, Math. Annalen 101 (1929), S. 316. Daselbst wird zitiert E. Bessel-Hagen, Gött. Habilitationsschrift. Von mir selbst ist die algebraische Bedeutung der Gruppenerweiterung frühzeitig erkannt worden. Vgl. Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 486 (16).

Die durch (24) und (25) gegebene Gruppe definiert abermals eine transformierbare automorphe Funktion. Die Fortsetzung des Verfahrens erschöpft sämtliche durch die Transformationstheorie gegebenen Kommensurabilitäten.

Beim Nachweis ist nur zu zeigen, daß der Fall einer Primzahlpotenz auf keine wesentlich neuen Kommensurabilitäten führt. Werden zwei Transformationen vom Grade q

$$\zeta'' = T'(\zeta'), \qquad \zeta' = T(\zeta) \tag{26}$$

mit der Einschränkung $T'T \neq q \cdot U$ nacheinander ausgeführt, so ergibt die Elimination von $J(\zeta')$ aus

$$f(J(\zeta), J(\zeta')) = 0, \qquad f(J(\zeta'), J(\zeta'')) = 0 \tag{27}$$

die Gleichung für die Transformation vom Grade q^2. Da aber $J(\zeta)$ und $J(\zeta'')$ zwei Zweige von $f = 0$ in Abhängigkeit von $J(\zeta')$ sind, definieren

$$J(\zeta) + J(\zeta'') \text{ und } J(\zeta) \cdot J(\zeta'') \tag{28}$$

eine Modulfunktion q-ter Stufe. Fügt man den Transformationen (26) eine dritte vom Grade q

$$\zeta''' = T''(\zeta'') \qquad (T''T' \neq q \cdot U) \tag{29}$$

an, so ergibt die Elimination von $J(\zeta')$ und $J(\zeta'')$ die Gleichung der Transformation vom Grade q^3. Die Funktionen

$$J(\zeta) + J(\zeta'''), \qquad J(\zeta) \cdot J(\zeta''') \tag{30}$$

sind aber aus den Funktionen (23) abgeleitet, da

$$J(\zeta') + J(\zeta''), \qquad J(\zeta') \cdot J(\zeta'') \tag{31}$$

sich durch (30) rational ausdrücken lassen. Die Verfolgung höherer Potenzen bietet ersichtlich nichts Neues dar.

2. Einführung der konjugiert-quadratischen Bilinearformen.

Zur Durchführung der allgemeinen Untersuchung ist die Bilinearform (9) umfassend zu verallgemeinern, als auch der Rationalitätsbereich der Koeffizienten der Form zu erweitern. Das erste wird erreicht durch den Ansatz

$$\Phi(x, y) = a\,x\,\bar{x} + c\,y\,\bar{y} + A^{-\frac{1}{2}}(b\,x\,\bar{y} - \bar{b}\,\bar{x}\,y). \tag{32}$$

Nehmen wir vorerst an, daß $\bar{x}, \bar{y}, \bar{b}$ die konjugiert-komplexen Werte von x, y, b sind, hingegen a und c reelle Größen sind und A reell und negativ ist. Sodann stellt $\Phi = 0$ für $x : y = \zeta$ die Gleichung eines Kreises dar. Die Spiegelung an diesem Kreise ist durch die Substitution

$$\zeta' = (\bar{b}\,\bar{\zeta} - c\sqrt{A}) : (a\sqrt{A}\,\bar{\zeta} + b) \tag{33}$$

gegeben, und der Kreis ist reell, wenn die Determinante der Substitution

$$b\bar{b} + acA \tag{34}$$

einen positiven Wert hat. Aus dieser Deutung folgt die Grundeigenschaft der Form, durch Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', & \bar{x} &= \bar{\alpha}\bar{x}' + \bar{\beta}\bar{y}', \\ y &= \gamma x' + \delta y', & \bar{y} &= \bar{\gamma}\bar{x}' + \bar{\delta}\bar{y}' \end{aligned} \tag{35}$$

in eine Form Φ' von derselben Art überzugehen. Die Transformation läßt sich nach einigen Umformungen so darstellen:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{A} & -\bar{b} \\ b & c\sqrt{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\sqrt{A} & -\bar{b}' \\ b' & c'\sqrt{A} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Die expliziten Formeln lauten

$$\begin{aligned} a' &= \Phi(\alpha, \gamma), \qquad c' = \Phi(\beta, \delta), \\ b' &= a\sqrt{A}\,\alpha\bar{\beta} + b\alpha\bar{\delta} - \bar{b}\gamma\bar{\beta} + c\sqrt{A}\,\gamma\bar{\delta}, \\ b'\bar{b}' + a'c'A &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma})\cdot(b\bar{b} + acA). \end{aligned} \tag{37}$$

Der Übergang zu linear-gebrochenen Substitutionen einer Variablen wird durch Einführung der Variablen $\zeta = x : y$ vollzogen.

Die arithmetischen Voraussetzungen sind zunächst diese, daß ein Zahlkörper K_λ vom Grade λ zugrundegelegt wird, der nur Hauptideale besitzt. Die Zahl A sei eine ganze Zahl aus K_λ, die keinen quadratischen Teiler hat und quadratischer Rest von 4 ist. Als solche wird A prim zu 2 sein und der erweiterte Körper $K_\lambda(\sqrt{A})$ stellt einen relativ-quadratischen Zahlkörper mit der Relativdiskriminante A dar. Über die Ideale dieses Zahlkörpers werden keine Voraussetzungen gemacht, indessen heben wir ein Ideal hervor vermittels einer binären quadratischen Form

$$\varphi(y_1\, y_2) = n_0 y_1^2 + n_1 y_1 y_2 + n_2 y_2^2 \tag{38}$$

mit der Diskriminante A, deren Koeffizienten n_0, n_1, n_2 ganze Zahlen aus K_λ sind. Alsdann ist

$$(n_0, \omega) = j_0 \tag{39}$$

ein Ideal mit der Relativnorm n_0, wenn ω durch

$$\xi^2 - n_1\xi + n_0 n_2 = (\xi - \omega)(\xi - \bar{\omega}) = 0 \tag{40}$$

bestimmt ist.

Von den Koeffizienten der Form Φ seien a und c ganze Zahlen aus K_λ, jedoch c durch n_0 teilbar, ferner b eine Zahl aus dem Ideal j_0 in (39) und $\bar{b}$ die bzgl. K_λ konjugierte Zahl. Setzt man

$$b\bar{b} + acA = n_0 D, \tag{41}$$

so ist ersichtlich D eine ganze Zahl aus K_λ. Diese werde als Diskriminante der Bilinearform bezeichnet. Setzt man ferner

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + \omega x_2, & \bar{x} &= x_1 + \bar{\omega} x_2,\\
y &= y_1 + \frac{\omega}{n_0} y_2, & \bar{y} &= y_1 + \frac{\bar{\omega}}{n} y_2,\\
b &= n_0 b_1 + \omega b_2, & \bar{b} &= n_0 b_1 + \bar{\omega} b_2, \qquad c = c_0 n_0,
\end{aligned} \tag{42}
$$

so erscheint Φ als eine quaternäre quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten aus K_λ

$$
\begin{aligned}
\Phi = a(x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_0 n_2 x_2^2) - b_1(x_1 y_2 - n_0 x_2 y_1)\\
+ b_2(x_1 y_1 + n_1 x_2 y_1 + n_2 x_2 y_2) + c_0(n_0 y_1^2 + n_1 y_1 y_2 + n_2 y_2^2).
\end{aligned} \tag{43}
$$

Die Determinante von 2Φ beträgt D^2. Denn $2\sqrt{A}\,\Phi$, in den Variablen $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ betrachtet, hat die Determinante

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & a\sqrt{A} & b\\
0 & 0 & -\bar{b} & c\sqrt{A}\\
a\sqrt{A} & -\bar{b} & 0 & 0\\
b & c\sqrt{A} & 0 & 0
\end{vmatrix} = (b\bar{b} + acA)^2 = n_0^2 D^2. \tag{44}
$$

Das Ideal (39) kann bei der Darstellung von Φ als quaternäre Form durch jedes andere mit diesem äquivalente ersetzt werden. Dies wird ersichtlich, wenn die quaternäre Form (43) in die Gestalt

$$
\begin{aligned}
a\left[\left(x_1 + \frac{n_1}{2} x_2\right)^2 - \frac{1}{4} A x_2^2\right] + \left(x_1 + \frac{n_1}{2} x_2\right)(y_1 b_2 - y_2 b_1)\\
+ \frac{x_2}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} b_2\right) + c_0 \varphi(y_1, y_2)
\end{aligned} \tag{45}
$$

gesetzt wird. Ist φ' eine zu φ äquivalente binäre Form mit den Koeffizienten n_0', n_1', n_2', so läßt sich Φ auch in diesen Koeffizienten darstellen. Dazu ist auf y_1 und y_2 als auch auf b_1 und b_2 die unimodulare Substitution, die φ in φ' überführt, auszuüben und auf x_1 und x_2 die Substitution

$$
x_1 = x_1' + \tfrac{1}{2}(n_1' - n_1) x_2', \qquad x_2 = x_2', \tag{46}
$$

deren Koeffizient $\frac{1}{2}(n_1' - n_1)$ stets als ganze Zahl sich erweist.

Die arithmetische Theorie der Formen Φ läßt sich in Anlehnung an die Theorie der binären quadratischen Formen entwickeln. Indessen werden die Unterschiede von dieser Theorie den wesentlichen Bestandteil der Untersuchung ausmachen. Äquivalenz zwischen zwei Formen Φ und Φ' wird nunmehr durch unimodulare Substitutionen vermittelt, bei denen $\alpha, \beta, n_0\gamma, \delta$ ganze Zahlen aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ sind, mit der Einschränkung, daß $n_0\gamma$ dem Ideal j_0 und β dem bzgl. K_λ konjugierten Ideal $\bar{j}_0$ angehört. Demzufolge ist γ wie auch y in (42) im allgemeinen keine ganze Zahl, jedoch führt die Anwendung bzw. Zu-

sammensetzung solcher Transformationen wiederum auf Werte für y, γ von solcher Beschaffenheit, daß $n_0 y$, $n_0 \gamma$ dem Ideal j_0 angehören.

Die Werte für D und A seien stets zueinander prim. Alsdann ist das Ideal $(b) : j_0$ prim zu A. Nicht nur A, sondern auch D habe keinen quadratischen Teiler. Eine Folge dieser Annahme ist, daß die Ideale

$$(47) \qquad (a), \quad (b) : j_0, \quad (\bar{b}) : \bar{j}_0, \quad (c) : (j_0 \bar{j}_0) = (c_0)$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen und im besonderen die Form primitiv ist. Bei vorgegebener Diskriminante D ist die Existenz von Formen Φ an eine Bedingung für A gebunden, die in folgendem Satze enthalten ist.

Satz 1. *Formen Φ mit der Diskriminante D existieren dann und nur dann für $K_\lambda(\sqrt{A})$, wenn*

$$(48) \qquad \prod_{i=1}^{u} \left(\frac{A}{q_i}\right) = (-1)^\nu \qquad \left(D = \prod_{i=1}^{u} q_i\right)$$

besteht, wobei der Exponent ν auf der rechten Seite die Anzahl der definiten Formen bedeutet, die sich unter den λ mit Φ konjugierten Formen befinden.

Das Symbol auf der linken Seite von (48) ist wie in (3) definiert [9]). Die Form Φ ist definit, wenn der Körper K_λ reell ist, und die Zahlen A und $n_0 D$ zugleich negativ sind. Die zu Φ konjugierten Formen werden erhalten, wenn die Koeffizienten von Φ durch die konjugierten Zahlen aus einem der zu K_λ konjugierten Körper ersetzt werden. Der Satz folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Hilbertschen Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste [10]). Das Ideal j_0 in (39) läßt sich so auswählen, daß n_0 prim zu A ist. Da A eine zu 2 prime Diskriminantenzahl ist, gilt nach dem genannten Gesetz die Gleichung

$$(49) \qquad \left(\frac{A}{D n_0}\right)\left(\frac{D n_0}{A}\right) = (-1)^\nu,$$

und zwar auch in dem Falle, daß D und n_0 Primteiler von 2 enthalten. Aus der Umformung von (41)

$$(50) \qquad (b + \bar{b})^2 - 4 D n_0 = A (b_2^2 - 4 a c)$$

folgt, daß $D n_0$ quadratischer Rest von A ist. Zudem ist A quadratischer Rest von $4 n_0$ und (49) vereinfacht sich zu (48).

Andererseits, wenn (48) besteht, läßt sich stets eine Form Φ mit der Diskriminante D konstruieren. Man suche zunächst eine Zahl n_0' von folgender Beschaffenheit. A ist quadratischer Rest von $4 n_0'$. Bei negativem A ist $D n_0'$ positiv oder negativ, je nachdem Φ als indefinit oder definit vorausgesetzt ist. Entsprechendes gelte für die zu n_0' konjugierten Größen. Erfüllt nun A

[9]) Bezüglich der Definition der Symbole in (48) und (49) und in Gleichung (59) des folgenden Abschnittes: D. Hilbert, Math. Annalen 51 (1899), S. 1—127. Über eine Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers. § 6.

[10]) D. Hilbert, Jahresbericht der D. M. V. 6 (1899), S. 90 (3).

die Bedingung (48), so ergibt sich bei Anwendung der allgemeinen Beziehung (49)

$$\left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{n_0'}{A}\right). \tag{51}$$

Aus dem Satze über die Existenz der Geschlechter binärer Formen folgt nunmehr das Vorhandensein einer binären Form $\varphi = (n_0, n_1, n_2)$ mit der Diskriminante A und dem Charakterensystem

$$\left(\frac{D}{r_i}\right) \qquad \left(A = \prod_{i=1}^{\varrho} r_i\right), \tag{52}$$

bei der n_0 dieselben Eigenschaften wie n_0' hat. Ferner setze man $b_2 = 0$, und es gilt nach (41)

$$n_0 b_1^2 + a c_0 A = D. \tag{53}$$

Da $D n_0$ quadratischer Rest von A ist, hat (53) als Kongruenz modulo A, wenn ϱ wie in (52) die Anzahl der Primfaktoren von A bedeutet, 2^ϱ Lösungen für b_1. Zu jeder Lösung lassen sich ganzzahlige Werte für das Produkt ac_0 angeben, und die Existenz von Formen Φ ist nachgewiesen.

Allgemeiner erfüllt $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ zufolge (50) eine der 2^ϱ Lösungen der Kongruenz

$$\eta^2 \equiv D n_0 \pmod{A}, \tag{54}$$

und zwar ist diese Lösung eine Invariante bei unimodularer Transformation von Φ. Allgemein ergibt sich zunächst aus (37)

$$b' \equiv b\alpha\bar{\delta} - \bar{b}\gamma\bar{\beta} \equiv b(\alpha\delta - \beta\gamma) \pmod{j_0\sqrt{A}} \tag{55}$$

und bei unimodularer Transformation

$$b' \equiv b \pmod{j_0\sqrt{A}}. \tag{56}$$

Da A keinen quadratischen Teiler haben soll, folgt im besonderen

$$\tfrac{1}{2}(b' + \bar{b'}) \equiv \tfrac{1}{2}(b + \bar{b}) \pmod{A}. \tag{57}$$

3. Darstellung einer Zahl durch die Form Φ.

Die Ausführungen über die Modulfunktion lassen bereits erkennen, daß die Aufgabe der Darstellung einer Zahl durch die Bilinearform Φ den Ausgangspunkt der Theorie bildet. Sei D die Diskriminante der Form Φ und m eine zu D teilerfremde ganze Zahl aus K_λ. Gibt es ganze Zahlen $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $y_1 = \gamma_1$, $y_2 = \gamma_2$ aus K_λ, die in die Form (43) eingesetzt den Wert m ergeben, so stellt Φ die Zahl m dar. Die Zahl $x = \alpha = \alpha_1 + \omega\alpha_2$ wird eine ganze Zahl aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ und die Zahl $n_0 y = n_0\gamma = n_0\gamma_1 + \omega\gamma_2$ eine Zahl aus dem Ideal j_0 in (39). Sind andererseits x und y Zahlen von solcher Beschaffenheit, so werden x_1, x_2, y_1, y_2 ganze Zahlen aus K_λ. Stellt Φ die Zahl m dar, so

leistet auch jede zu Φ äquivalente Form Φ' eine Darstellung von m, die durch Einsetzen der Darstellungswerte in die unimodulare Substitution, welche Φ' in Φ transformiert, gefunden wird. Die Gesamtheit der so erzeugten Darstellungen werden in eine Klasse zusammengefaßt, im besonderen also auch diejenigen Darstellungen, welche durch Transformation von Φ in sich hervorgehen. Es besteht die Aufgabe, die Anzahl der Darstellungsklassen [11]) von m zu ermitteln, die dem System der Formen Φ von derselben Diskriminante D und derselben Kongruenzlösung $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A zukommt. Diejenigen Darstellungen, bei denen $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ einen gemeinsamen Teiler haben, scheiden als uneigentliche Darstellungen aus. Ein solcher Teiler geht in den Idealen (α) und $(n_0\gamma):j_0$ auf. Umgekehrt ist jede Zahl aus K_λ, die in (α) und $(n_0\gamma):j_0$ aufgeht, gemeinsamer Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$. Es besteht aber die Möglichkeit, daß (α) und $(n_0\gamma):j_0$ einen Idealteiler aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ besitzen, der keinen Teiler aus K_λ hat. Je nachdem (α) und $(n_0\gamma):j_0$ prim zueinander sind oder einen solchen Idealteiler besitzen, sprechen wir von der engeren oder weiteren Aufgabe der eigentlichen Darstellung. Die Klassenzahl der Darstellungen von m werde für die engere Aufgabe mit $\chi(m)$ und für die weitere mit $\psi(m)$ bezeichnet. Für diese gelten folgende Gesetze:

Satz 2a. *Zerfällt die zu D prime Zahl m in die zueinander primen Zahlen m_1 und m_2, so gilt*

$$\chi(m) = \chi(m_1)\cdot\chi(m_2), \quad \psi(m) = \psi(m_1)\cdot\psi(m_2). \tag{58}$$

Satz 2b. *Sei q eine nicht in D aufgehende Primzahl und N(q) ihre Norm, so ist*

$$\chi(q^u) = N(q)^{u-1}\left[N(q) - \left(\frac{A}{q}\right)\right], \quad \psi(q^u) = N(q)^{u-1}(N(q)+1), \tag{59}$$

wobei das Symbol in der ersten Formel $1, 0, -1$ bedeutet, je nachdem q in $K_\lambda(\sqrt{A})$ in zwei voneinander verschiedene oder zwei gleiche Idealfaktoren oder nicht zerfällt.

Seien (α) und $(n_0\gamma):j_0$ prim zueinander. Dann gibt es ganze Zahlen β und δ aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ derart, daß β dem Ideal $\bar{j}_0$ angehört und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{60}$$

besteht. Wie bei den binären Formen führt die Transformation mit den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Form Φ in eine äquivalente Form Φ' mit den Koeffizienten $a' = m, b', c'$ über. Die Gesamtheit dieser Substitutionen ist durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ \gamma & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

---

[11]) Dieser Begriff der Darstellungsklasse ist zu unterscheiden von dem üblichen Begriff der Formenklasse. Seine Berechtigung ergibt sich aus dem Zusammenhang mit der Gruppentheorie in Abschnitt 10.

gegeben, wobei ν eine Zahl aus $\bar{j}_0$ bedeutet. Bei Anwendung von (61) wird $b' + \bar{\nu} m \sqrt{A}$ an Stelle von b' erhalten, so daß b' modulo $j_0 m \backslash \overline{A}$ bestimmt ist. Wenn n_0 prim zu mA gewählt wird, liefert b' zufolge der Beziehung

$$b'\overline{b'} + m c' A = n_0 D \tag{62}$$

eine bestimmte Wurzel der Kongruenzen

$$\xi\bar{\xi} \equiv n \pmod{m\sqrt{A}}, \quad \xi \equiv b \pmod{j_0\sqrt{A}}, \tag{63}$$

wobei $n \equiv n_0 D \pmod{mA}$ eine zu mA prime ganze Zahl aus K_λ ist. Umgekehrt liefert jede Wurzel von (63) eine Form Φ mit $a = m$ und ganzzahligem b, c, die eine bestimmte Darstellungsklasse von m für die engere Aufgabe repräsentiert. Unter allgemeineren Voraussetzungen wird dies in (75) bis (80) nachgewiesen.

Ist $\xi = \xi_0$ eine Lösung von (63), so ist auch

$$\xi \equiv \xi_0 \frac{r}{\bar{r}} \pmod{m j_0 \sqrt{A}} \tag{64}$$

eine Lösung, wenn r eine zu mA prime Zahl aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ bedeutet und $1 : \bar{r}$ modulo $m\sqrt{A}$ bestimmt wird. Die Formel (64) liefert indessen alle Lösungen. Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, daß m die Potenz einer Primzahl ist. Sei $m = q^\mu$. Der Fall, daß q in A aufgeht, erfordert eine gesonderte Betrachtung. Sei also zunächst q kein Teiler von A. Alsdann genügt es, nur die erste Kongruenz in (63) zu betrachten und diese nur modulo q^μ zu behandeln. Die Anzahl der für r in (64) zulässigen Werte beträgt

$$N(q)^{2\mu-2}(N(q)-1)\left[N(q) - \left(\frac{A}{q}\right)\right]. \tag{65}$$

Die Werte modulo q^μ aus K_λ und nur diese liefern dieselbe Lösung, so daß allgemein je

$$N(q)^{\mu-1}(N(q)-1) \tag{66}$$

Werte dieselbe Kongruenzwurzel liefern, und die Anzahl der verschiedenen Lösungen von (64) ist die mit $\chi(q^\mu)$ bezeichnete Zahl in (59). Andererseits ist $\xi\xi \equiv n \pmod{q^\mu}$ für jeden Wert $n \not\equiv 0 \pmod{q}$ lösbar. Wenn q in 2 nicht aufgeht, folgt dies aus der Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols[12]). Ist q Faktor von 2, so ist jeder Wert von n quadratischer Rest, und die Lösbarkeit von (63) ist evident. Daher nimmt n sämtliche Werte $\not\equiv 0 \pmod{q}$ aus K_λ an, wenn ξ sämtliche zu q primen Werte aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ durchläuft. Die Anzahl der Werte von ξ und n sind durch (65) bzw. (66) gegeben, und es folgt, daß (64) alle Lösungen liefert.

Sei nunmehr q Teiler von A. Der Idealteiler von $\sqrt{A}$ mit der Relativnorm q sei mit j_q bezeichnet. Für r sind sodann in (64) alle Werte modulo $j_q^{2\mu+1}$ einzusetzen, die j_q nicht zum Teiler haben. Die Anzahl dieser Werte ist

$$N(q)^{2\mu}(N(q)-1). \tag{67}$$

[12]) **Math. Annalen 51, l. c., Satz 10, S. 13.**

Die Werte aus K_λ modulo $q^{\mu+1}$ und nur diese geben dieselbe Lösung. Ihre Anzahl ist

$$N(q)^\mu (N(q) - 1), \tag{68}$$

so daß die Anzahl der verschiedenen Lösungen von (64) $N(q)^\mu$ beträgt. Die erste Kongruenz in (63) ist nur für quadratische Reste n modulo q lösbar. Da aber von den beiden Lösungen modulo j_q zufolge der zweiten Kongruenz nur eine in Betracht kommt, gibt (64) auch in diesem Falle sämtliche Lösungen.

Nunmehr ist die erweiterte Aufgabe der eigentlichen Darstellung von m durch Φ zu behandeln, bei der (α) und $(n_0\gamma) : j_0$ einen gemeinsamen Idealteiler haben. Der größte gemeinsame Idealteiler sei j_τ von der Relativnorm τ. Alsdann ist τ ein Teiler von m. Bei Übergang zu äquivalenten Formen durch unimodulare Transformation ergeben sich Darstellungswerte, die dasselbe Ideal j_τ definieren. Umgekehrt lassen sich zwei Wertepaare α, γ und α', γ', die demselben Ideal j_τ zugeordnet sind, durch unimodulare Transformation ineinander überführen. Dies folgt aus einem Satze von Hurwitz[13]), der auf die hier gebrauchten Transformationen sich ausdehnen läßt. Ein ausgezeichnetes Wertepaar gibt es nicht, jedoch läßt sich jede zum Ideal j_τ gehörige Darstellung auf ein bestimmtes Wertepaar α, γ transformieren, so daß der erweiterten Darstellungstheorie die Gleichung

$$\Phi(\alpha, \gamma) = \Phi'(\alpha, \gamma) = m \tag{69}$$

zugrundegelegt werden kann. Beide Darstellungen von m werden alsdann derselben Klasse angehören, wenn die Äquivalenz von Φ und Φ' durch eine unimodulare Substitution, welche das Wertepaar $x = \alpha$, $y = \gamma$ in sich überführt, nachgewiesen werden kann. Die Berechnung sämtlicher Substitutionen von dieser Eigenschaft führt auf die Formel

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma\nu & \alpha^2\nu \\ -\gamma^2\nu & 1 + \alpha\gamma\nu \end{pmatrix}, \tag{70}$$

wobei $\nu\tau^2$ dem Ideal $\bar{j}_0 \bar{j}_\tau^2$ angehört. Die Anwendung der Transformationsformel (36) auf (70) ergibt die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{A} & -\bar{b} \\ b & c\sqrt{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma\nu & \alpha^2\nu \\ -\gamma^2\nu & 1 + \alpha\gamma\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\nu} & \bar{\gamma}^2\bar{\nu} \\ -\bar{\alpha}^2\bar{\nu} & 1 - \bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'\sqrt{A} & -\bar{b}' \\ b' & c'\sqrt{A} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Die Elimination von $\bar{\nu}$ aus der ersten und dritten Gleichung einerseits und der zweiten und vierten andererseits ergibt die beiden Gleichungen

$$\bar{\alpha}(a - a') + \bar{\gamma}(b - b') : \sqrt{A} = \gamma\nu m, \tag{72}$$

$$-\bar{\alpha}(\bar{b} - \bar{b}') : \sqrt{A} + \bar{\gamma}(c - c') = -\alpha\nu m. \tag{73}$$

---

[13]) Zahlbericht von Hilbert, Satz 53.

Die Elimination von ν aus diesen ergibt (69). Äquivalenz von Φ und Φ' wird durch (70) vermittelt, wenn sich aus (72), (73) ein so beschaffenes ν ergibt, daß $\nu\tau^2$ dem Ideal $\bar{j}_0\bar{j}_\tau^2$ angehört. In diesem Falle ist der größte gemeinsame Teiler $\nu m j_\tau : \bar{j}_0$ von $\gamma\nu m$ und $\alpha\nu m : \bar{j}_0$ auf der rechten Seite von (72), (73) durch $\bar{j}_\tau m : \tau$ teilbar. Auf der linken Seite geht $\bar{j}_\tau$ als größter gemeinsamer Teiler von $\bar{\alpha}$ und $(n_0\gamma) : \bar{j}_0$ auf, und es bedeuten (72) und (73) für die Koeffizienten von Φ und Φ' eine Bedingung modulo $m : \tau$. Wie oben werde n_0 prim zu mA gewählt und das Wertepaar α, γ so ausgewählt, daß $(n_0\gamma) : j_0$ durch m teilbar und α prim zu j_0 ist. Alsdann ist j_τ der größte gemeinsame Teiler von α und m, und es sind zufolge (69) a und a' durch $m : \tau$ teilbar, ferner, da $\alpha\nu m$ und $\bar{\gamma}(c - c')$ in (73) durch $\bar{j}_0\bar{j}_\tau m : \tau$ teilbar sind, $(b - b') : \sqrt{A}$ durch $j_0 m : \tau$ teilbar. Φ und Φ' sind daher äquivalent, wenn b und b' dieselbe Lösung der Kongruenzen

$$\xi\bar{\xi} \equiv D n_0 \pmod{m\sqrt{A} : \tau}, \qquad \xi \equiv b \pmod{j_0\sqrt{A}} \tag{74}$$

darstellen. Diese stimmen mit (63) überein, wenn m durch $m : \tau$ ersetzt wird.

Andererseits läßt sich zu jeder Lösung von (74) eine Form Φ konstruieren, die eine zu j_τ gehörige Darstellungsklasse von m repräsentiert. Die Gleichung $\Phi(\alpha, \gamma) = m$ läßt sich umformen in

$$-B\bar{B} + D n_0 \alpha\bar{\alpha} = m c A, \tag{75}$$

wenn

$$\alpha b + \gamma c\sqrt{A} = B \tag{76}$$

gesetzt wird. Hierbei sind A, D, n_0, m vorgegebene Größen, und zwar ist mA prim zu Dn_0. Die Zahl α werde so ausgewählt, daß

$$(\alpha, m\sqrt{A}) = j_\tau \tag{77}$$

ist. Zudem sei α prim zu n_0. Wenn ξ_0 eine Lösung der Kongruenzen (74) ist, läßt sich zufolge der Voraussetzungen über α eine Zahl

$$B \equiv \alpha\xi_0 \pmod{m j_0\sqrt{A}} \tag{78}$$

mit der Nebenbedingung $(\alpha, B\bar{B}) = j_\tau$ angeben, und aus (75) ergibt sich ein ganzzahliges $c_0 = c : n_0$ von der Beschaffenheit $(\alpha, mc_0 \mid \bar{A}) = j_\tau$. Alsdann können b und $n_0\gamma$ so bestimmt werden, daß $n_0\gamma$ durch mj_0 teilbar ist, und es wird

$$B \equiv \alpha b \pmod{m j_0 c_0\sqrt{A}}. \tag{79}$$

Daraus ergibt sich zufolge (75) ein ganzzahliges durch $m : \tau$ teilbares a. Zudem erfüllt b die Kongruenzen (74) in der vorgegebenen Lösung ξ_0, denn zufolge (78) und (79) ist

$$b \equiv \xi_0 \pmod{m j_0\sqrt{A} : \tau}. \tag{80}$$

Durch Summation der Anzahlen der Darstellungsklassen für die verschiedenen in m aufgehenden Teiler τ läßt sich $\psi(q^\mu)$ berechnen. Zerfällt q in $K_\lambda(\sqrt{A})$ nicht, so ist $\tau = 1$ und

$$\psi(q^\mu) = \chi(q^\mu). \tag{81}$$

Zerfällt q in $K_\lambda(\sqrt{A})$ in zwei verschiedene Primideale, so ist $\tau = 1, q, q^2, \ldots, q^\mu$ und

$$\psi(q^\mu) = \chi(q^\mu) + 2\chi(q^{\mu-1}) + 2\chi(q^{\mu-2}) + \ldots + 2. \tag{82}$$

Zerfällt q in $K_\lambda(\sqrt{A})$ in zwei gleiche Primideale, so ist $\tau = 1, q$ und

$$\psi(q^\mu) = \chi(q^\mu) + \chi(q^{\mu-1}). \tag{83}$$

In jedem Falle erhält man die Formel (59).

4. Die Form Φ_0. — Das Enthaltensein ternärer Formen in der Form Φ.

Das Enthaltensein ternärer Formen in der quaternären Form Φ stellt eine erste Beziehung zu diesen Formen her. Setzt man in (43) $x_2 = 0$, so erhält man die ternäre Form

$$f = a x_1^2 + x_1(b_2 y_1 - b_1 y_2) + c_0(n_0 y_1^2 + n_1 y_1 y_2 + n_2 y_2^2), \tag{84}$$

deren Diskriminante nach (2)

$$c_0 D \tag{85}$$

beträgt, wenn D die Diskriminante von Φ bedeutet. Für $c_0 = 1$ geht die Form in eine solche über, die in der Inhaltsübersicht bereits als Grundform eingeführt worden ist. Diese enthält die binäre Form $\varphi = (n_0, n_1, n_2)$ mit der Diskriminante A, und es ist zufolge der in Abschnitt 2 gemachten Voraussetzungen A und D quadratfrei und A prim zu $2D$.

Die speziellen Formen Φ, bei denen $c = n_0$ ist, seien im folgenden mit Φ_0 bezeichnet. Eine solche enthält also bei $x_2 = 0$ eine Grundform mit der Diskriminante D. Die Eigenschaft von Φ_0 bleibt erhalten bei Ausübung einer Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

und es besteht

$$b' = b + n_0 \gamma \sqrt{A}. \tag{87}$$

Für die Grundform stellt sich die Transformation (86) durch

$$y_1 = y_1' + \gamma_1 x_1, \qquad y_2 = y_2' + \gamma_2 x_1 \tag{88}$$

dar, wobei

$$\gamma_1 + \frac{\omega}{n_0}\gamma_2 = \gamma \tag{89}$$

ist. nW $n_0\gamma$ eine Zahl aus j_0 ist, werden γ_1 und γ_2 ganze Zahlen aus K_λ.

Vermittels der Transformation (86) bzw. (88) läßt sich erreichen, daß der Koeffizient a durch eine vorgegebene zu D prime Zahl m teilbar wird. Wenn n_0 prim zu m gewählt wird, lassen sich immer Zahlen b' finden, die den Kongruenzen

$$b' \equiv b \pmod{j_0\sqrt{A}}, \qquad b'\bar{b}' \equiv D n_0 \pmod{m\sqrt{A}} \tag{90}$$

genügen. Die erste Kongruenz gewährleistet ein ganzzahliges $n_0\gamma$, daß dem Ideal j_0 angehört, die zweite einen Koeffizienten a', der durch m teilbar ist. Die Anzahl der Lösungen dieser Kongruenzen wurde mit $\chi(m)$ bezeichnet und ist im vorigen Abschnitt näher bestimmt worden.

Hieran knüpfen sich einige Bemerkungen, die in der vorliegenden Arbeit mannigfache Anwendung finden. Sei eine Grundform $f(x_1, y_1, y_2)$ gegeben, deren Koeffizient a durch die vorgegebene Zahl m teilbar ist. Vermöge der Substitution

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = v_1\eta, \quad y_2 = v_2\eta \tag{91}$$

wird eine in f enthaltene binäre Form mit den Variablen ξ und η

$$a\xi^2 + \xi\eta(b_2 v_1 - b_1 v_2) + \eta^2(n_0 v_1^2 + n_1 v_1 v_2 + n_2 v_2^2) \tag{92}$$

abgeleitet, die für $\xi = 1, \eta = 0$ die durch m teilbare Zahl a darstellt. Werden für die Parameter v_1 und v_2 zwei zueinander prime ganze Zahlen aus K_λ eingesetzt, so ist die Darstellung der binären Form durch f eine eigentliche. Die Diskriminante der Form stellt in v_1 und v_2 wiederum eine binäre Form

$$A' = (b_2 v_1 - b_1 v_2)^2 - 4a(n_0 v_1^2 + n_1 v_1 v_2 + n_2 v_2^2) \tag{93}$$

dar. Im Laufe der Untersuchung werden sich bezüglich der Bestimmung von v_1 und v_2 verschiedene Aufgaben einstellen. So wird verlangt, daß A' eine zu 2 prime Zahl ohne quadratischen Teiler sei, oder daß (92) zu einer Form des Hauptgeschlechtes wird oder zwei Formen dasselbe Geschlecht erhalten. Die einfachste Lösung wird erhalten, wenn A' zu einer Primzahl gemacht wird. Dazu ist vorerst erforderlich, daß (93) als binäre Form in v_1 und v_2 primitiv ist. Dies läßt sich durch Wahl von b_1 und b_2 bzw. $(b) : j_0$ immer erreichen. Da D prim zu m ist, fällt auch $(b) : j_0$ prim zu m aus. Darüber hinaus läßt sich erreichen, daß $(b) : j_0$ prim zu a wird, indem $(b) : j_0$ prim zu D gewählt wird. Da A prim zu 2 ist, läßt sich $(b) : j_0$ zufolge (87) auch prim zu 2 machen. Alsdann ist die Form (93) primitiv; denn ein Teiler der Form müßte in der Diskriminante

$$2^4 aD \tag{94}$$

zum Quadrat aufgehen. Da D keinen quadratischen Teiler besitzt, müßte dieser in $2^4 a$ aufgehen, was nicht angeht, da $(b) : j_0$ prim zu $2a$ ist. Jede primitive quadratische Form stellt Primzahlen dar. Zur Begründung ist der allgemeine Satz, daß jede Idealklasse eines algebraischen Körpers unendlich

viele Primideale enthält[14]), heranzuziehen oder vielmehr dessen Erweiterung auf Ringklassen, da wegen des Faktors 2^4 in (94) der Form (93) stets eine Ringklasse zugeordnet ist.

Über die allgemeine Aufgabe der Darstellung einer ternären Form durch die Form Φ folgen einige Bemerkungen. Jeder solchen Darstellung ist eine lineare Relation in $x, \bar{x}, y, \bar{y}$ zugeordnet, die in der Gestalt

$$(\delta x - \bar{\delta}\bar{x}) : \sqrt{A} - (\beta y - \bar{\beta}\bar{y}) : \sqrt{A} = 0 \tag{95}$$

anzusetzen ist, wobei δ eine ganze Zahl aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ und β eine solche aus $\bar{j}_0$ ist. Jede vollständige arithmetische Auflösung dieser Gleichung durch drei Parameter liefert die Darstellung einer ternären Form. Die Darstellung ist eine eigentliche, wenn (δ) und $(\beta) : j_0$ keinen Teiler aus K_λ haben. Für die Diskriminante der ternären Form wird zufolge der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen durch Ableitung der Kontravariante von Φ aus der Determinante (44) die Formel

$$D \cdot \frac{1}{n_0} \Phi(\beta, \delta) \tag{96}$$

gefunden. Zur näheren Bestimmung der in Φ enthaltenen ternären Formen dient alsdann folgender:

Satz 3. *Sämtliche in Φ enthaltenen ternären Formen lassen sich durch eine in K_λ rationale Transformation nach Absonderung eines Zahlfaktors in ein und dieselbe Grundform f mit der Diskriminante D überführen.*

Einer in Φ enthaltenen ternären Form sei die lineare Relation (95) zugeordnet. Der größte gemeinsame Idealteiler von (δ) und $(\beta) : \bar{j}_0$ sei j_τ von der Relativnorm τ. Dann gibt es ganze Zahlen α und $n_0\gamma$ derart, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \tau \tag{97}$$

ist und $n_0\gamma$ dem Ideal j_0 angehört. Die Transformation mit den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ führt die Relation (95) über in

$$\tau(x - \bar{x}) : \sqrt{A} = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 0 \tag{98}$$

und die Form Φ in eine Form Φ' mit $D' = \tau^2 D$ und einem durch τ teilbaren c_0'. Φ ergibt für $x_2 = 0$ zufolge (85) eine ternäre Form mit der Diskriminante

$$\tau^2 D c_0' = \tau^2 D \cdot \frac{1}{n_0} \Phi(\beta, \delta). \tag{99}$$

Für $\tau = 1$ stimmt dies mit (96) überein. Ferner werde Φ' durch

$$x = x' c_0' : \tau \tag{100}$$

transformiert. Die Division der Koeffizienten durch c_0' ergibt eine Form Φ_0 mit der Diskriminante D, in der aber die beiden ersten Koeffizienten im allgemeinen nicht mehr ganze Zahlen sind. Vermöge einer Transformation (86) mit einem γ aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ gelangt man zufolge (87) zu jeder vorgeschriebenen

[14]) Furtwängler, Math. Annalen 63 (1907), S. 1—37, § 13.

Form Φ_0 mit der Diskriminante D und ganzzahligen Koeffizienten. Werden $x, \bar{x}, y, \bar{y}$ in der linearen Relation (95) durch die Variablen der ternären Form ausgedrückt, so liefern die Transformationen (97), (100), (86) eine in K_λ rationale Transformation, welche die ternäre Form in eine bestimmte Grundform überführt. Hiermit ist Satz 3 bewiesen.

5. Die Transformationen der Form Φ_a und F in sich.

Die Transformationen, welche die Formen Φ in sich überführen, werden erhalten, wenn in der allgemeinen Transformationsgleichung (36) $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ gesetzt wird. Dies ergibt die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{A} & -\bar{b} \\ b & c\sqrt{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{A} & -\bar{b} \\ b & c\sqrt{A} \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Die erste und dritte Gleichung lautet

$$a(\alpha - \bar{\delta}) + (b\bar{\gamma} - \bar{b}\gamma) : \sqrt{A} = 0, \tag{102}$$

$$a\bar{\beta} + c\gamma + b(\alpha - \bar{\alpha}) : \sqrt{A} = 0. \tag{103}$$

Hierbei ist c durch n_0 teilbar und b gehört dem Ideal j_0 an. Die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind nach Abschnitt 2 so zu bestimmen, daß $\alpha, \beta, n_0\gamma, \delta$ ganze Zahlen aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ sind und $n_0\gamma$ und $\bar{\beta}$ dem Ideal j_0 angehören. Die Aufgabe ist unmittelbar lösbar, wenn a ein Teiler des Ideals $(b) : j_0$ ist. Eine solche Form werde im folgenden mit Φ_a bezeichnet. Für diese speziellen Formen ergibt die Ausrechnung von (102) nach δ eine ganze Zahl, und aus (103) folgt, daß $(c\gamma) : j_0$ durch a teilbar ist. Da aber Φ als primitive Form vorausgesetzt ist, wird $c : n_0$ prim zu a, mithin $(n_0\gamma) : j_0$ durch a teilbar. Setzt man

$$\alpha = t, \qquad \gamma = au, \tag{104}$$

so werden $n_0 u$ und $\bar{\beta}$ ganze Zahlen, die dem Ideal j_0 angehören. Die zweite und vierte Gleichung ist alsdann von selbst erfüllt, und die Berechnung der Koeffizienten ergibt

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -cu - \bar{b}(t - \bar{t}) : a\sqrt{A} \\ au & \bar{t} - (\bar{b}u - b\bar{u}) : \sqrt{A} \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Die Determinante der Substitution

$$\alpha\delta - \beta\gamma = t\bar{t} + acuu + (bt\bar{u} - \bar{b}\bar{t}u) : \sqrt{A} = \Phi_1(t, u) \tag{106}$$

ist in K_λ gelegen, desgleichen die Invariante

$$\alpha + \delta = t + \bar{t} - (\bar{b}u - bu) : \sqrt{A}. \tag{107}$$

Die Koeffizienten der Fixpunktgleichung von (105)

$$\gamma\zeta^2 - (\alpha - \delta)\zeta - \beta = 0 \tag{108}$$

berechnen sich aus

$$\begin{aligned} \gamma &= a\,u, \\ \alpha - \delta &= (\bar{b}\,u - b\,\bar{u}) : \sqrt{A} + (t - \bar{t}), \\ \beta &= * - c\,\bar{u} - \bar{b}\,(t - \bar{t}) : a\sqrt{A}, \end{aligned} \tag{109}$$

sind also durch u, $\bar{u}$, $t - \bar{t}$ bestimmt und stellen in dieser Abhängigkeit eine lineare ternäre Substitution mit der Determinante $Dn_0 : A$ dar. Bei Einführung von

$$t = t_1 + \omega\,t_2, \quad u = u_1 + \frac{\omega}{n_0}\,u_2 \quad (t_1, t_2, u_1, u_2 \text{ ganze Zahlen aus } K_\lambda) \tag{110}$$

wird aus (109) eine Substitution in u_1, u_2, t_2 mit der Determinante D. Die Diskriminante von (108)

$$F = (\alpha - \delta)^2 + 4\,\beta\gamma \tag{111}$$

stellt sich daher als ternäre quadratische Form in u_1, u_2, t_2 mit der Diskriminante $16\,D^2$ dar. F läßt sich auch durch die Invarianten (106) und (107) ausdrücken:

$$F = (\alpha + \delta)^2 - 4\,(\alpha\delta - \beta\gamma), \tag{112}$$

und es folgt daraus, daß die Koeffizienten von $F\,(u_1, u_2, t_2)$ ganze Zahlen aus K_λ sind. Die Zusammensetzung zweier Substitutionen T und T' ergibt eine Substitution T'' von derselben Art[15]). Eine in den Variablen w und z angesetzte Substitution

$$S = \begin{pmatrix} w & -c\,\bar{z} - \bar{b}\,(w - \bar{w}) : a\sqrt{A} \\ a\,z & \bar{w} - (\bar{b}\,z - b\,\bar{z}) : \sqrt{A} \end{pmatrix} \tag{113}$$

werde durch T in S' transformiert:

$$TST^{-1} = S'. \tag{114}$$

Da S und S' dieselben Invarianten haben, wird zufolge (112) die Form F durch die Transformation bis auf einen Faktor reproduziert, und zwar besteht, wenn entsprechend (110) w_1, w_2, z_1, z_2 eingeführt werden,

$$F\,(z_1', z_2', w_2') = \Phi_1^2\,(t, u) \cdot F\,(z_1, z_2, w_2). \tag{115}$$

---

[15]) Die Kompositionsformel lautet für $a = 1$:

$$\begin{aligned} t'' &= t\,t' - c\,\bar{u}\,u' - \bar{b}\,t_2\,u' \\ u'' &= u\,t' + \bar{t}\,u' - (b_1\,u_2 - b_2\,u_1)\,u'. \end{aligned}$$

Die vollständige Aufstellung der Formel in den Größen t_1, t_2, u_1, u_2 gibt bemerkenswerterweise Ausdrücke, die sämtlich aus sieben Summanden bestehen:

$$\begin{aligned} u_1'' &= (u_1\,t_1' + t_1\,u_1') + n_2\,(t_2\,u_2' - u_2\,t_2') + n_1\,t_2\,u_1' - b_1\,u_2\,u_1' + b_2\,u_1\,u_1', \\ u_2'' &= (u_2\,t_1' + t_1\,u_2') + n_0\,(u_1\,t_2' - t_2\,u_1') + n_1\,u_2\,t_2' - b_1\,u_2\,u_2' + b_2\,u_1\,u_2', \\ t_2'' &= (t_2\,t_1' + t_1\,t_2') + c_0\,(u_2\,u_1' - u_1\,u_2') + n_1\,t_2\,t_2' - b_1\,t_2\,u_2' + b_2\,t_2\,u_1', \\ t_1'' &= t_1 t_1' - n_0 n_2 t_2 t_2' - n_0 c_0 u_1 u_1' - n_2 c_0 u_2 u_2' - n_1 c_0 u_2 u_1' - (n_0 b_1 + n_1 b_2) t_2 u_1' - n_2 b_2 t_2 u_2'. \end{aligned}$$

Bei $n_1 = b_1 = b_2 = 0$ reduzieren sich diese auf die Eulersche Quaternionenformel.

Die Abhängigkeit der z_1', z_2', w_2' von den z_1, z_2, w_2 stellt sich als eine reproduzierende Substitution von F dar, deren Koeffizienten ganze Zahlen aus K_λ sind.

Daß (115) die allgemeine Formel der Transformationen einer ternären Form in sich darstellt, ergibt sich aus der Berechnung der Kontravariante von F. Die zu $\beta a A,\ \gamma : a,\ (\alpha - \delta)\sqrt{A}$ kontragredienten Variablen seien ξ, η, ϑ und die von $z, \bar{z}, w - \bar{w}$ seien $\bar{x}, -x, x_3$. In (109) ist t, u durch w, z zu ersetzen und die zu (109) kontragrediente Substitution zu bilden:

$$\begin{aligned} \eta &= \bar{x}\, n_0 D - x\bar{b}^2 - x_3 a c \bar{b}\sqrt{A}, \\ \vartheta &= \quad * \qquad x\,\bar{b} + x_3 a c\sqrt{A}, \\ \xi &= \quad * \qquad x \quad - x_3 b : \sqrt{A}. \end{aligned} \tag{116}$$

Demzufolge besteht

$$\xi \beta a A + \eta\gamma : a + \vartheta(\alpha - \delta)\sqrt{A} = n_0 D\left(z\bar{x} - \bar{z}x + (w - \bar{w})x_3\right) \tag{117}$$

und die Kontravariante von (111)

$$\xi\eta + \vartheta^2 \tag{118}$$

geht durch (116) nach Absonderung von $n_0 D$ in die ternäre Form

$$x\bar{x} + x_3(x\bar{b} - \bar{x}b) : \sqrt{A} + a c x_3^2 \tag{119}$$

über. Setzt man $x = n_0 x_1 + \omega x_2$, so wird

$$z\bar{x} - \bar{z}x + (w - \bar{w})x_3 = \sqrt{A}\,(z_2 x_1 - z_1 x_2 + w_2 x_3) \tag{120}$$

und (119) geht nach Absonderung des Faktors n_0 in die Form

$$f = n_0 x_1^3 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + x_3(x_2 b_1 - x_1 b_2) + a c_0 x_3^2 \tag{121}$$

mit der Diskriminante D über. Der Voraussetzung, daß a ein Teiler von $(b) : j_0$ sein soll, kann durch $a = 1$ genügt werden. Mit den Transformationen von F in sich sind auch die der Kontravariante f gegeben. Die Form f ist von größter Allgemeinheit, wenn die über D und A gemachten Einschränkungen außer Betracht bleiben. Sobald diese aber gelten, bedeutet f eine Grundform.

6. Die Gruppe Γ. — Existenz von Γ und Bedingungen für Diskontinuität. — Transformation von Γ vermittels F.

Als reproduzierende Gruppe von Φ werde im folgenden stets die spezielle Gruppe der unimodularen Transformationen von Φ in sich bezeichnet. Für die reproduzierende Gruppe einer Form Φ_a besteht nach (106)

$$\Phi_1(t, u) = 1 \tag{122}$$

und diese ist mit der von Φ_1 isomorph. Denn durch Transformation

$$\zeta = \zeta' : a \tag{123}$$

geht die ζ-Substitution T von (105) in

$$\begin{pmatrix} t & -a c\bar{u} - \bar{b}(t - \bar{t}) : \sqrt{A} \\ u & \bar{t} - (\bar{b}u - b\bar{u}) : \sqrt{A} \end{pmatrix} \tag{124}$$

über. Die inhomogene reproduzierende Gruppe von Φ_1 werde mit Γ bezeichnet.

Der Nachweis der Existenz der Gruppe Γ ist zu verbinden mit einer kurzen Ableitung der Bedingungen, unter denen die Gruppe Γ in der ζ-Ebene diskontinuierlich ist. Sei $\mathfrak{U}$ der größte gemeinsame Teiler der in (110) eingeführten ganzen Zahlen u_1, u_2, t_2 aus K_λ. Die ganzen Zahlen

$$u_1 : \mathfrak{U} = \mathfrak{u}_1, \quad u_2 : \mathfrak{U} = \mathfrak{u}_2, \quad t_2 : \mathfrak{U} = \mathfrak{t}_2 \tag{125}$$

bestimmen sodann die Fixpunktgleichung von (124). Setzt man

$$F(u_1, u_2, t_2) = \mathfrak{U}^2 F(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{t}_2) = \mathfrak{U}^2 \mathfrak{D}, \tag{126}$$

so geben $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{t}_2$ eine eigentliche Darstellung der Zahl $\mathfrak{D}$ durch die Form F. Setzt man ferner

$$\alpha + \delta = \mathfrak{T}, \tag{127}$$

so geht Gleichung (112) über in

$$\mathfrak{T}^2 - \mathfrak{D}\,\mathfrak{U}^2 = 4. \tag{128}$$

Jede Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ aus K_λ liefert umgekehrt eine unimodulare ζ-Substitution, deren Fixpunktgleichung durch die Darstellungswerte $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{t}_2$ von $\mathfrak{D}$ durch F bestimmt ist. Denn es ist

$$u = \mathfrak{U}\left(\mathfrak{u}_1 + \frac{\omega}{n_0}\mathfrak{u}_2\right), \tag{129}$$

und $t = \alpha$ bestimmt sich als Summe der ganzen Zahlen

$$t = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + \sqrt{F}) + \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta - \sqrt{F}) \tag{130}$$

selbst als ganze Zahl, und zwar ist

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + \sqrt{F}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T} + \mathfrak{U}\sqrt{\mathfrak{D}}), \tag{131}$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta - \sqrt{F}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{U}(\mathfrak{u}_2 b_1 - \mathfrak{u}_1 b_2 + \mathfrak{t}_2\sqrt{A} - \sqrt{\mathfrak{D}}). \tag{132}$$

Eine notwendige Bedingung für Diskontinuität von Γ in der ζ-Ebene ist, daß sämtliche Substitutionen mit denselben Fixpunkten sich als Potenzen einer Substitution darstellen, daß also die Gleichung (128) in $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ nur eine Grundlösung hat. Der Fall, daß K_λ ein imaginärer Körper ist, scheidet aus, da der einfache Fall des imaginären quadratischen Körpers bereits auf Polyedergruppen führt. K_λ ist daher als reeller Körper vorauszusetzen und es sind die Fälle der elliptischen, hyperbolischen, parabolischen Substitutionen zu unterscheiden, in denen $\mathfrak{D}$ bzw. negativ, positiv, Null ist. Für den Fall der elliptischen Substitutionen tritt noch die Bedingung hinzu, daß die Substitution eine endliche Ordnung hat, also der Ausdruck (131) eine Einheitswurzel ist.

Aus diesen Feststellungen ergeben sich unmittelbar die gesuchten Bedingungen. Der Fall, daß $\mathfrak{D}$ ein vollständiges Quadrat in K_λ ist, werde zunächst ausgeschlossen, im besonderen also auch der Fall $\mathfrak{D} = 0$. Sei $\mathfrak{e}$ eine Einheit des Körpers $K_\lambda(\sqrt{\mathfrak{D}})$, die keine Einheitswurzel ist und deren Quadrat nicht in K_λ gelegen ist, und sei ε die Relativnorm von $\mathfrak{e}$. Jede Einheit $\mathfrak{e}^2 : \varepsilon$ liefert alsdann eine Lösung der Gleichung (128). Zufolge der aufgestellten Bedingungen darf bei negativem $\mathfrak{D}$ eine solche Lösung nicht auftreten und

bei positivem D nur auf eine einzige Grundlösung zurückführbar sein. Daher hat bei Erweiterung des Körpers K_λ mit $\sqrt{\mathfrak{D}}$ die Anzahl der voneinander unabhängigen Einheiten nicht bzw. nur um Eins zu wachsen. Aus dem Dirichletschen Theorem findet man die Bedingung, daß K_λ ein total reeller Körper ist und die zu $\mathfrak{D}$ konjugierten Werte sämtlich negativ sind. Da $\mathfrak{D}$ durch F darstellbar ist, ergibt sich, daß die zu F konjugierten Formen sämtlich negative Formen sind und aus (112), daß die zu $\Phi_1(t, u)$ konjugierten Formen sämtlich positive Formen sind. Ist Φ_1 selbst eine positive Form, so bleibt Γ auf die Gruppen der regulären Körper beschränkt. Wenn aber Φ_1 und damit auch F indefinit ist, wird eine Grenzkreisgruppe erhalten. Dies ergibt sich aus der Berechnung des hyperbolischen Inhaltes in Abschnitt 12. Die abgeleiteten Bedingungen sind daher nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend und bilden die ständige Voraussetzung im Verlaufe der weiteren Untersuchung.

Der oben ausgeschlossene Fall, daß F Quadrate darstellt, bedeutet, daß die Form $\Phi_1(t, u)$ die Null darstellt. Alsdann enthält Φ_1 ternäre Formen dieser Art, und nach Satz 3 in Abschnitt 4 stellt auch die Grundform f und ihre Kontravariante F die Null dar. Folglich hat (128) die Lösung $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{T} = 2$, und Γ enthält parabolische Substitutionen. Um $\mathfrak{T} = \alpha + \delta$ den Wert 2 zu geben, setzen wir

$$t = 1 + v, \qquad \bar{t} - (\bar{b}u - b\bar{u}) : \sqrt{A} = 1 - v \tag{133}$$

und finden für unimodulare parabolische Substitutionen die Bedingungen

$$\begin{aligned} v + \bar{v} - (\bar{b}u - b\bar{u}) : \sqrt{A} &= 0, \\ v\bar{v} + (bv\bar{u} - \bar{b}\bar{v}u) : \sqrt{A} + acu\bar{u} &= 0. \end{aligned} \tag{134}$$

Der doppelte Fixpunkt berechnet sich zu

$$\zeta = v : u. \tag{135}$$

Werden u und v mit derselben ganzen Zahl aus K_λ multipliziert, so bleibt der Fixpunkt unverändert und die Bedingungen (134) gehen in sich über. Daher gibt es λ voneinander unabhängige parabolische Substitutionen mit demselben Fixpunkt, und die Gruppe ist nur für $\lambda = 1$ in der Ebene diskontinuierlich. Die Form Φ_1 ist in der Bilinearform $x_1x_2 - y_1y_2$ und Γ in der Modulgruppe enthalten.

Zu den Formeln (125) bis (132) ist folgendes zu bemerken. Die Gruppe Γ' ist zufolge Formel (115) in Abschnitt 5 auch reproduzierende Gruppe[16]) der Form F. In dieser Gestalt ist Γ durch unimodulare ternäre Substitutionen gegeben, deren Koeffizienten ganze Zahlen aus K_λ sind. Die Zahl A steht mit F nur soweit in Beziehung, als A durch F vermittels $t_2 = 1$, $u_1 = 0$,

[16]) Jedoch nicht die vollständige reproduzierende Gruppe von F. Hierzu Teil II, Abschnitt 3.

$u_2 = 0$ dargestellt wird und die Charaktere von F bestimmt. Durch unimodulare Transformation von F läßt sich eine Transformation von Γ begründen. An die Stelle von A trete die Zahl A', die dieselben Voraussetzungen zu erfüllen hat wie A. Die der einzelnen Substitution von Γ zugeordneten Werte $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{t}_2$ mögen in $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_2'$, $\mathfrak{t}_2'$ transformiert werden. Sodann legen die Werte A', $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_2'$, $\mathfrak{t}_2'$ die Fixpunkte der transformierten Substitution fest, während $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{T}$ bezüglich der Transformation invariant bleiben. Auf Grund der Formeln (129) bis (132) ergibt sich wiederum eine unimodulare Substitution, deren Koeffizienten in $K_\lambda(\sqrt{A'})$ liegen. Wird

$$\mathfrak{U}\mathfrak{u}_1' = u_1', \quad \mathfrak{U}\mathfrak{u}_2' = u_2', \quad \mathfrak{U}\mathfrak{t}_2' = t_2' \tag{136}$$

gesetzt, so ergibt sich für t_1' der in jedem Falle ganzzahlige Wert

$$t_1' = t_1 + \tfrac{1}{2}(u_1 b_2 - u_2 b_1 + n_1 t_2 - u_1' b_2' + u_2' b_1' - n_1' t_2'). \tag{137}$$

Daß t_1' eine ganze Zahl ist, läßt sich auch unmittelbar bestätigen, indem man u_1', u_2', t_2' durch u_1, u_2, t_2 und b_1', b_2', n_1' durch die Koeffizienten der Form f ausdrückt.

7. Einführung der Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$. — Formulierung des Grundproblems der Kongruenzgruppen. — Die endliche Gruppe G.

Die vollständige Lösung der Aufgabe, alle Transformationen einer Form Φ in sich zu finden, wurde in Abschnitt 5 nur für die speziellen Formen Φ_a erhalten. Für diese ist a Teiler von $(b) : j_0$ und damit auch von D. Der daselbst gegebene Zusammenhang mit den ternären Formen läßt aber bereits vermuten, daß durch die gefundene Lösung auch die allgemeine Aufgabe zum Abschluß gebracht werden kann.

Zunächst läßt sich nur zeigen, daß bei beliebigem a die Formel (105) eine Teillösung der allgemeinen Aufgabe liefert. Sei im besonderen a gleich einer ganzen Zahl m aus K_λ, die zu D, A, n_0 prim ist. Die Formel (105) gibt Transformationen von Φ in sich mit ganzzahligen Koeffizienten, wenn $\bar{b}(t - \bar{t}) : m\sqrt{A}$ eine ganze Zahl aus j_0 ist. Da Dn_0 prim zu m ist, wird auch b prim zu m und es ist $(t - \bar{t}) : \sqrt{A} = t_2$ durch m teilbar zu wählen. Die so erhaltenen unimodularen Transformationen bilden eine reproduzierende Gruppe von Φ, die jedoch nicht die vollständige Lösung darstellt. Diese erweist sich nämlich als Untergruppe von Γ, wenn sie entsprechend (123) transformiert wird. Als solche ist sie durch

$$\beta \equiv 0 \pmod{m} \tag{138}$$

gegeben und stellt eine zur Zahl m gehörige Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$ von Γ dar. Diese Eigenschaft der Gruppe wird erst in Teil II in die Erscheinung treten. Wie entscheidend für den Fortgang der Untersuchung die Einführung der Gruppe ist, lassen folgende Betrachtungen erkennen.

Die Form $\Phi(x, y)$ stellt durch $x = 1$, $y = 0$ die Zahl m dar. Eine Transformation von Φ in sich ergibt eine derselben Klasse angehörende Darstellung von m. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Koeffizienten einer solchen Transformation, so ist $x = \alpha$, $y = \gamma$ diese Darstellung. Wenn t_2 durch m teilbar ist, liefert (105) Transformationen von Φ in sich. Daher ist

$$x = t, \quad y = mu \tag{139}$$

eine zu derselben Klasse gehörende Darstellung von m, wenn

$$\Phi_1(t, u) = t\bar{t} + mcu\bar{u} + (bt\bar{u} - \bar{b}\bar{t}u) : \sqrt{A} = 1 \tag{140}$$

und t_2 durch m teilbar ist. Man überzeugt sich aber leicht, daß (139) auch dann eine Darstellung von m ergibt, wenn t_2 nicht durch m teilbar ist. Diese gehört aber nicht mehr derselben Darstellungsklasse an. Dies ist ersichtlich, wenn t und m einen Idealfaktor aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ gemein haben. Sind aber t und m prim zueinander, so lassen sich alle unimodularen Substitutionen mit $\alpha = t$, $\gamma = mu$ unter Verwendung von (140) aus

$$\begin{pmatrix} t & -c\bar{u} - (\bar{b}'t - \bar{b}\bar{t}) : m\sqrt{A} \\ mu & \bar{t} - (\bar{b}'u - b\bar{u}) : \sqrt{A} \end{pmatrix} \tag{141}$$

finden, wobei der Parameter b' durch

$$b'\bar{t} \equiv bt \pmod{m j_0 \sqrt{A}} \tag{142}$$

bestimmt wird. Formel (141) ist eine Verallgemeinerung von (105) und transformiert $\Phi(m, b, c)$ in $\Phi(m, b', c')$. Der Fall $b' = b$ kann nur eintreten, wenn t_2 durch m teilbar ist. Ist aber b' von b modulo m verschieden, so wird zufolge der engeren Darstellungstheorie in Abschnitt 3, (64) eine andere Klasse erhalten.

Die Entscheidung der Frage, ob durch die Darstellung der Zahl m in (139) alle Klassen durchlaufen werden, hängt davon ab, ob die Gleichung (140) Lösungen besitzt, für die t einen vorgeschriebenen Wert modulo m annimmt. Zunächst wird man (140) als Kongruenz modulo m behandeln, also die Kongruenz

$$t\bar{t} + (bt\bar{u} - \bar{b}\bar{t}u) : \sqrt{A} \equiv 1 \pmod{m} \tag{143}$$

lösen. Aber die Aufgabe bleibt bestehen zu zeigen, daß zu jeder Lösung t_0, u_0 der Kongruenz (143) stets Lösungen t, u der Gleichung (140) von der Beschaffenheit

$$t \equiv t_0, \quad n_0 u \equiv n_0 u_0 \pmod{m} \tag{144}$$

existieren. Für den Fall der elliptischen Modulfunktion bietet der Beweis des Satzes keine Schwierigkeiten[17]). Für den allgemeinen Fall der trans-

[17]) F. Klein und R. Fricke: Elliptische Modulfunktion 1 (1890), Kap. 7, S. 391. 392. Teubner, Leipzig.

formierbaren automorphen Funktionen steht der Satz im Mittelpunkt der arithmetischen Untersuchung, weshalb wir ihn als das Grundproblem der Kongruenzgruppen bezeichnen. Sobald nämlich auf Grund des Satzes bewiesen ist, daß eine Form Φ alle Darstellungen einer Zahl m enthält, wenn sie eine enthält, läßt sich die Aufgabe, zu entscheiden, ob zwei Formen Φ und Φ' äquivalent sind, darauf zurückführen, eine Zahl nachzuweisen, die sowohl von Φ als auch von Φ' dargestellt wird.

Die Werte, welche t in der Kongruenz (143) annehmen kann, lassen sich unmittelbar angeben, da (143) in u und $\bar{u}$ linear und als solche lösbar ist, wenn sich in der Linearform

$$(bt\bar{u} - \bar{b}\bar{t}u) : \sqrt{A} \tag{145}$$

eine zu m prime Zahl nachweisen läßt. Die Untersuchung braucht nur für den Fall einer Primzahlpotenz $m = q^{\mu}$ durchgeführt zu werden. Für $u = b$ und $bt\bar{\omega}$ erhält die Linearform den Wert

$$b\bar{b}t_2 \quad \text{bzw.} \quad b\bar{b}t\bar{t}. \tag{146}$$

Die Zahl $b\bar{b}$ ist prim zu q, da q in Dn_0 nicht aufgeht. Die Restfaktoren t_2 und $t\bar{t}$ sind nur dann zugleich durch q teilbar, wenn $t \equiv 0 \pmod{q}$ ist. Für ein durch q teilbares t ist die Kongruenz (143) nicht lösbar, in jedem anderen Falle gibt es in der Linearform Zahlen, die nicht durch q teilbar sind, und die Kongruenz ist lösbar. Demnach beträgt die Anzahl der Werte, die t annehmen kann,

$$N(q)^{2\mu} - N(q)^{2(\mu-1)}. \tag{147}$$

Unter diesen Werten gibt es solche, bei denen t_2 durch q^{μ} teilbar ist. Ihre Anzahl beträgt

$$N(q)^{\mu} - N(q)^{\mu-1}. \tag{148}$$

Der Quotient aus (147) und (148) ergibt

$$N(q)^{\mu-1}(N(q) + 1) = \varphi(q^{\mu}). \tag{149}$$

Demzufolge kann nach Satz 2 in Abschnitt 3 die Erzeugung aller Darstellungsklassen durch (139) in Aussicht gestellt werden, wenn Γ alle Lösungen der Kongruenz (143) erzeugt. Für jeden der in (147) abgezählten Werte für t hat die Kongruenz $N(q)^{\mu}$ Lösungen, und die Anzahl aller Lösungen ist

$$N(q)^{3\mu-2}(N(q)^2 - 1). \tag{150}$$

Werden die Lösungen der Kongruenz in die Formel (124) eingetragen, so ergeben sich Substitutionen modulo m, die eine endliche Gruppe bilden. Die Ordnung der homogenen Gruppe ist für $m = q^{\mu}$ durch (150) gegeben. Im folgenden wird ausschließlich die inhomogene Gruppe betrachtet, deren Ordnung sich auf die Hälfte reduziert, wenn nicht m ein Teiler von 2 ist. Diese endliche Gruppe sei mit G bezeichnet. Die zur Einführung der Trans-

formationsgruppe $\Gamma_{(m)}$ verwendete Bedingung $t_2 \equiv 0 \pmod m$ definiert in G eine Untergruppe vom Index $\psi(m)$, die als Transformationsgruppe innerhalb G bezeichnet sei. Diese besteht aus allen unimodularen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ u & t_1 - (\bar{b}\,u - b\,\bar{u}) : \sqrt{A} \end{pmatrix} \pmod m \tag{151}$$

und enthält eine Abelsche Gruppe als Normalteiler, nämlich die Gruppe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b\,u_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pmod m, \tag{152}$$

in der u_3 ein vollständiges Wertesystem modulo m aus K_λ durchläuft. Für jede zu D, A, n_0 prime Zahl m lassen sich Transformationsgruppen in G von der besonderen Gestalt (151) aufstellen, da der letzte Koeffizient von Φ_1 durch m teilbar gewählt werden kann.

8. Eigenschaften der Gruppe G.

Im vorliegenden Abschnitt sind alle Resultate über die Gruppe G zusammengestellt, die in Teil I und II benötigt werden. Zunächst ist die einfachste Gestalt dieser Gruppe zur Ableitung zu bringen.

Satz 4. *Wenn m prim zu D, A, n_0 ist, wird G der inhomogenen Gruppe*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \equiv 1 \pmod m \tag{153}$$

isomorph, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Werte modulo m aus K_λ sind.

Die Behauptung folgt unmittelbar, wenn A quadratischer Rest von $4\,m$ ist. In diesem Falle lassen sich in der Substitution (124) $\sqrt{A}, b, \bar{b}, t, \bar{t}, u, \bar{u}$ durch Werte modulo m aus K_λ ersetzen. Andererseits läßt sich jeder Substitution (153) eine Substitution (124) zuordnen. Zunächst bestimmt man für $t, \bar{t}, u, \bar{u}$ Werte aus K_λ. Wenn der letzte Koeffizient von Φ_1 durch m teilbar ist, ergeben sich die Kongruenzen

$$t \equiv \alpha, \quad \bar{b}\,(\bar{t} - t) \equiv \beta\sqrt{A}, \quad u \equiv \gamma, \quad b\,\bar{u} - \bar{b}\,u \equiv (\delta - \bar{t})\sqrt{A} \pmod m, \tag{154}$$

in denen an Stelle von $b, \bar{b}, \sqrt{A}$ Werte aus K_λ zu setzen sind. Diese sind prim zu m und (154) liefert für $t, \bar{t}, u, \bar{u}$ bestimmte Werte aus K_λ, die sodann durch konjugierte Werte aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ zu ersetzen sind.

Ist die Annahme, daß A quadratischer Rest von $4\,m$ ist, nicht erfüllt, so läßt sich die Gruppe G in derselben Weise wie Γ in Abschnitt 6 transformieren. Man suche gemäß Abschnitt 4 (92) eine in der Grundform f eigentlich enthaltene binäre Form auf, deren Diskriminante A' prim zu $2\,m$ und quadratischer Rest von $4\,m$ ist. Alsdann wird F in eine Form F' transformiert, die an Stelle von A den Koeffizienten A' besitzt, und die transformierte Gruppe G' in Betracht gezogen. Hiermit ist Satz 4 bewiesen.

Der Fall, daß der Kongruenzmodul eine Primzahl q aus K_λ ist[18]), erfordert die vollständige Aufzählung der Klassen konjugierter Elemente und zyklischer Untergruppen. Sei $\varkappa$ der Grad von q und p die durch

$$N(q) = p^\varkappa \tag{155}$$

bestimmte natürliche Primzahl. Drei Arten umfassendster zyklischer Gruppen sind zu unterscheiden, je nachdem die Fixpunktgleichung dieser Gruppen in zwei verschiedene Faktoren zerlegbar oder unzerlegbar ist oder eine Doppelwurzel hat. Zu den Wurzeln ist auch $1 : 0 \pmod q$ zu rechnen. Alsdann gilt bei $p > 2$ der

Satz 5a. *Zu jeder Fixpunktgleichung mit verschiedenen Wurzeln modulo q gehört eine zyklische Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(p^\varkappa - 1)$, und es gibt $\frac{1}{2}p^\varkappa(p^\varkappa + 1)$ Gruppen, die eine Klasse konjugierter Gruppen bilden.*

Satz 5b. *Zu jeder unzerlegbaren quadratischen Funktion modulo q als Fixpunktgleichung gehört eine zyklische Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(p^\varkappa + 1)$, und es gibt $\frac{1}{2}p^\varkappa(p^\varkappa - 1)$ Gruppen, die wiederum eine Klasse konjugierter Gruppen bilden.*

Satz 5c. *Zu jeder Fixpunktgleichung mit einer Doppelwurzel modulo q gehört eine Abelsche Gruppe, die aus $\varkappa$ voneinander unabhängigen zyklischen Gruppen der Ordnung p besteht, und es gibt $p^\varkappa + 1 = \psi(q)$ Gruppen dieser Art, die zueinander konjugiert sind.*

Bei $p = 2$ hat die erste Art zyklischer Gruppen die Ordnung $2^\varkappa - 1$ und die zweite die Ordnung $2^\varkappa + 1$. Der übrige Inhalt des Satzes bleibt bestehen. Der Satz gibt eine vollständige Aufzählung der zyklischen Gruppen und Elemente, wie man sich durch Abzählen der Elemente leicht überzeugen kann.

Satz 6. *Die verschiedenen Klassen konjugierter Elemente lassen sich vollständig durch die Invarianten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{D}$ bezeichnen.*

Für das Einselement verschwindet die Fixpunktgleichung modulo q identisch und es ist $\mathfrak{U} \equiv 0$, $\mathfrak{T} \equiv \pm 2 \pmod q$. $\mathfrak{T}$ nimmt denselben Wert bei den Elementen der Ordnung p an, aber es ist $\mathfrak{D} \equiv 0 \pmod q$, da die Diskriminante der Fixpunktgleichung durch p teilbar ist. Wenn die Substitution etwa auf $\mathfrak{T} \equiv +2 \pmod q$ normiert wird, hat daher die Fixpunktgleichung für $p > 2$ einen Charakter modulo q, und es zerfallen die Elemente der Ordnung p in zwei Klassen. Die Untersuchung ergibt, daß sämtliche Elemente der einzelnen Klasse zueinander konjugiert sind. Wenn der Grad $\varkappa$ von q gerade ist, sind alle natürlichen Zahlen quadratische Reste von q. Daraus ergibt sich, daß für gerades $\varkappa$ auch die zyklischen Gruppen der Ordnung p in zwei Klassen zerfallen. Bei ungeradem $\varkappa$ hingegen bilden diese

[18]) Literaturangaben in dem Bericht von B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen. Ergebnisse d. Math. — Jul. Springer Berlin (1935), Bd. 4, Heft 2, § 3.

nur eine Klasse. Die in Satz 5c genannten Abelschen Gruppen bilden jedoch stets eine Klasse. Für $p = 2$ gibt es nur eine Klasse von Elementen der Ordnung 2, für die $\mathfrak{T} \equiv 0 \pmod{q}$ ist.

Die Werte $\mathfrak{T}^2 \neq 4$ verteilen sich auf die in Satz 5a und b genannten zyklischen Gruppen. Diese lassen sich innerhalb G zu Diedergruppen erweitern, so daß jedes Element der Gruppen mit seinem inversen konjugiert ist. Die Abzählung der so verbleibenden Klassen konjugierter Elemente ergibt alsdann, daß jeder Wert $\mathfrak{T}^2 \neq 4$ modulo q nur eine Klasse bezeichnet. Dies gilt auch für $p = 2$ und der Satz 6 ist bewiesen.

Die Gesamtheit aller Elemente mit einem gemeinsamen Fixpunkt bilden die als Transformationsgruppe innerhalb G bezeichnete Untergruppe. Jede dieser Gruppen hat eine der in Satz 5c genannten Abelschen Gruppen zum Normalteiler, und es gibt nur eine Klasse von $\psi(q)$ konjugierten Untergruppen.

Die vollständige Bestimmung der nichtzyklischen Untergruppen von G findet nur für den Fall $\varkappa = 1$ Verwendung. Dieser ist dadurch ausgezeichnet, daß die bisher nicht genannten Untergruppen auf die Gruppen der regulären Körper beschränkt bleiben.

Die Struktur der Gruppe G hängt nur von den Zahlen p und $\varkappa$ ab. Ist der Kongruenzmodul eine Primzahlpotenz q^μ, so hängt die Struktur nur von $q, \varkappa, \mu$ ab, ausgenommen den Fall, daß q in p mehrfach aufgeht, also p in der Körperdiskriminante von K_λ aufgeht. Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß q in p nur einmal aufgeht. Die Gruppe G modulo q^μ hat für $p > 2$, $\mu > 1$ einen Normalteiler der Ordnung $p^{3\varkappa(\mu-1)}$. Dieser besteht aus allen Substitutionen, die sich modulo q auf die Identität reduzieren. Im besonderen ist für $\mu = 2$ dieser Normalteiler eine Abelsche Gruppe, die aus $3\varkappa$ voneinander unabhängigen zyklischen Gruppen der Ordnung p besteht. Dies ergibt sich unmittelbar aus der allgemeinen Formel für diese Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1 + pr_3 & pr_2 \\ pr_1 & 1 - pr_3 \end{pmatrix} \pmod{q^2}, \tag{156}$$

in der r_1, r_2, r_3 je ein vollständiges Wertesystem modulo q durchlaufen. Der Normalteiler läßt sich aus p-ten Potenzen der Substitutionen von der Ordnung p^2 erzeugen, indem etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pr_1' & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & pr_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + pr_3 & -pr_3 \\ pr_3 & 1 - pr_3 \end{pmatrix} \pmod{q^2} \tag{157}$$

miteinander kombiniert werden. Bei $p = 2$ reduziert sich die Ordnung des Normalteilers auf $2^{3\varkappa-1}$, im übrigen bleiben aber die Resultate bestehen. Allgemeiner ist N in

$$G \pmod{q^{\nu+1}} : N = G \pmod{q^\nu} \quad (\mu > \nu > 0) \tag{158}$$

ein solcher Abelscher Normalteiler der Ordnung $p^{3\varkappa}$, der aus p^{ν}-ten Potenzen der Substitutionen von der Ordnung $p^{\nu+1}$ in G modulo $q^{\nu+1}$ vollständig erzeugt werden kann.

Bei einem beliebigen Kongruenzmodul m ist folgendes zu bemerken. Zerfällt m in zwei Faktoren m_1 und m_2, die nicht Teiler von 2 sind und zueinander prim sind, so stellt

$$(159) \qquad \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} \pmod m \qquad \begin{matrix} t_1 \equiv 1 & \pmod{m_1} \\ t_1 \equiv -1 & \pmod{m_2} \end{matrix}$$

ein Element der Ordnung 2 dar, das mit allen Elementen von $G \pmod m$ vertauschbar ist, also einen Normalteiler G_2 der Ordnung 2 definiert, und es ist

$$(160) \qquad G \pmod m : G_2 = G \pmod{m_1} \times G \pmod{m_2}.$$

Indessen ist $G \pmod{m_1} \times G \pmod{m_2}$ keine Untergruppe von $G \pmod m$, da $G \pmod m$ von $G_2 \times G \pmod{m_1} \times G \pmod{m_2}$ verschieden ist.

9. Erzeugung der endlichen Gruppe G durch die Gruppe Γ.

Zur Durchführung des in Abschnitt 7 angegebenen Gedankenganges stellen wir den Satz auf:

Satz 7. *Zwei hyperbolische Substitutionen aus Γ, die nicht dieselben Fixpunkte haben, erzeugen nur für eine endliche Anzahl von Primzahlen ersten Grades als Kongruenzmoduln eine Untergruppe von G.*

Voraussetzung des Satzes ist, daß die die Fixpunktgleichung bestimmenden Größen von Abschnitt 6 (125) $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{t}_2$ für beide Substitutionen nicht vollends übereinstimmen. Ist diese erfüllt, so kann der Fall, daß die Substitutionen nur einen Fixpunkt gemeinsam haben, nicht eintreten. Zwei Substitutionen dieser Art erzeugen keine diskontinuierliche Gruppe[19]). Da aber der Nachweis der Diskontinuität von Γ erst in Abschnitt 12 erbracht wird, ist es notwendig, dies unmittelbar zu beweisen. Wir knüpfen hierbei an die Gestalt von Γ als reproduzierende Gruppe der ternären Grundform $f(x_1, x_2, x_3)$ in Abschnitt 5 (121) an. Die Fixpunkte einer ternären Substitution der Gruppe sind als Durchschnittspunkte der Geraden

$$(161) \qquad \mathfrak{u}_2 x_1 - \mathfrak{u}_1 x_2 + \mathfrak{t}_2 x_3 = 0$$

mit dem Kegelschnitt $f = 0$ und als Pol dieser Geraden bezüglich $f = 0$ gegeben[20]). Zwei hyperbolische Substitutionen haben einen Fixpunkt gemeinsam, wenn die Verbindungsgerade ihrer Pole den Kegelschnitt berührt. Für Substitutionen aus Γ wären die Koordinaten des Berührungspunktes

[19]) R. Fricke u. F. Klein, Automorphe Funktionen I, l. c. S. 336 (4).

[20]) Dies folgt aus (117). Wenn bei $a = 1$

$$-\eta : \vartheta\sqrt{A} : \xi A = \zeta^2 : \zeta : 1$$

gesetzt wird, verschwindet f, und die rechte Seite in (117) geht in die Fixpunktgleichung (108) über.

Zahlen aus K_λ und die zugehörigen Werte $\mathfrak{D}$ nach (126) vollständige Quadrate aus K_λ, was nach Abschnitt 6 nicht eintreten kann.

Seien S_1 und S_2 die beiden hyperbolischen Substitutionen aus Γ. Für S_1, S_2 und $S_1 S_2$ habe die Invariante $\mathfrak{T}$ die Werte $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ bzw. $\mathfrak{T}_{12}$. Da S_1 und S_2 keinen Fixpunkt gemeinsam haben, kann der Ausdruck

$$\mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_{12}^2 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_{12} - 4 \tag{162}$$

nicht verschwinden und stellt eine ganze Zahl aus K_λ dar. Für jeden Primteiler von (162) als Kongruenzmodul erzeugen S_1 und S_2 nicht die vollständige Gruppe G, sondern eine Transformationsgruppe aus G oder Untergruppe aus dieser oder eine zyklische Untergruppe aus G. Die übrigen nichtzyklischen Untergruppen von G sind besonders zu behandeln. Eine Diedergruppe modulo q wird durch S_1 und S_2 erzeugt, wenn zwei der Substitutionen S_1, S_2 und $S_1 S_2$ modulo q die Ordnung 2 haben, wenn also q in zwei der Größen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_{12} \tag{163}$$

aufgeht. Bei $\varkappa = 1$ verbleiben sodann noch die Gruppen der regulären Körper. In diesen haben die Elemente die Ordnungen 2, 3, 4, 5. Eine notwendige Bedingung, daß S_1 und S_2 eine solche Gruppe erzeugen, ist daher, daß in jeder Zahlenreihe

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T} \pm 1, \quad \mathfrak{T}^2 - 2, \quad \mathfrak{T}^2 \pm \mathfrak{T} - 1 \qquad (\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_{12}) \tag{164}$$

eine durch q teilbare Zahl steht. Hiermit ist der Satz 7 bewiesen, da die Endlichkeit der Anzahl der Primzahlen in jedem Falle evident ist.

Die Ausdehnung des Satzes auf Primzahlpotenzen q^μ ergibt sich aus folgendem

Satz 8. *Sei S eine Substitution aus Γ, die modulo q die Ordnung p hat, und sei q dahin eingeschränkt, daß q in p nur einfach aufgeht und $p > 3$ ist, so hat S modulo q^μ die Ordnung p^μ, und für zwei Substitutionen S und S_* dieser Art, für die $S \equiv S_* \pmod q$ gilt, besteht*

$$S^{p^\nu} \equiv S_*^{p^\nu} \pmod{q^{\nu+1}} \qquad (\mu > \nu > 0). \tag{165}$$

Seien $\mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{D}$ die Invarianten einer Substitution S und $\mathfrak{T}', \mathfrak{U}', \mathfrak{D}'$ die Invarianten von S^p, so ist $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$ und

$$\frac{\mathfrak{T}' + \mathfrak{U}'\sqrt{\mathfrak{D}}}{2} = \left(\frac{\mathfrak{T} + \mathfrak{U}\sqrt{\mathfrak{D}}}{2}\right)^p. \tag{166}$$

Für $p > 2$ besteht

$$2^{p-1}\mathfrak{U}' = p\,\mathfrak{T}^{p-1}\mathfrak{U} + \binom{p}{3}\mathfrak{T}^{p-3}\mathfrak{U}^3\mathfrak{D} + \ldots + \mathfrak{U}^p\mathfrak{D}^{\frac{p-1}{2}}. \tag{167}$$

S hat modulo q die Ordnung p, wenn $\mathfrak{T} \equiv \pm 2$, $\mathfrak{D} \equiv 0 \pmod q$ ist, aber $\mathfrak{U}$ nicht durch q teilbar ist. Da q nur einmal durch p teilbar ist, folgt aus (167) bei $p > 3$, daß $\mathfrak{U}'$ nur einmal durch q teilbar ist. Allgemein geht q in $\mathfrak{U}'$ genau $\nu + 1$-fach auf, wenn q in $\mathfrak{U}$ genau ν-fach ($\nu > 0$) aufgeht. Die wieder-

holte Anwendung dieser Bemerkung für $\nu = 1, \ldots, \mu - 1$ ergibt den ersten Teil des Satzes 8, daß S modulo q^μ die Ordnung p^μ hat. Bei $p = 2, 3$ gilt

(168) $$\mathfrak{U}' = \mathfrak{T}\,\mathfrak{U} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{U}' = (\mathfrak{T}^2 - 1)\,\mathfrak{U}$$

und die Ordnung reduziert sich auf $p^{\mu-\varrho}$, wenn $\mathfrak{T} \equiv 0$ bzw. ± 1 modulo $p^{\varrho+1}$, aber nicht modulo $p^{\varrho+2}$ ist. Diese Fälle bleiben im folgenden außer Betracht. Zum Beweise von (165) ist nur zu zeigen, daß (165) für $\nu + 1$ richtig ist, wenn es für ν richtig ist. Die Invariante $\mathfrak{U}$ von S^{p^ν} ist durch p^ν teilbar und bei $\mathfrak{T} \equiv +2 \pmod q$ ist zufolge (167)

(169) $$\mathfrak{U}' \equiv p\,\mathfrak{U} \pmod{q^{\nu+2}}.$$

Die Multiplikation dieser Kongruenz mit $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{t}_2$ ergibt, daß u_1', u_2', t_2' modulo $q^{\nu+2}$ bestimmt sind, wenn u_1, u_2, t_2 modulo $q^{\nu+1}$ bestimmt sind. Da $\mathfrak{U}'$ durch $q^{\nu+1}$ teilbar ist, ergibt sich vermittels der Invariantengleichung (128), daß auch $\mathfrak{T}'$ und damit t_1' modulo $q^{\nu+2}$ bestimmt ist. Hiermit ist Satz 8 bewiesen.

Der Satz läßt sich auf die Gruppe $G \pmod{q^{\nu+1}}$ übertragen. Im besonderen läßt sich jeder p^ν-ten Potenz einer Substitution der Ordnung $p^{\nu+1}$ diese Substitution modulo q eindeutig zuordnen. Zufolge (165) besteht die eindeutige Zuordnung auch umgekehrt. Wird nunmehr $G \pmod q$ durch S_1 und S_2 vollständig erzeugt, so werden auch sämtliche p^ν Potenzen der Elemente der Ordnung $p^{\nu+1}$ aus $G \pmod{q^{\nu+1}}$ erzeugt, und aus diesen läßt sich nach dem vorigen Abschnitt der Normalteiler N in (158) erzeugen, so daß $G \pmod{q^{\nu+1}}$ durch S_1 und S_2 erzeugt wird, wenn dies für $G \pmod{q^\nu}$ gilt. Allgemeiner wird $G \pmod{q^\mu}$ erzeugt, wenn dies für $G \pmod q$ gilt.

Bei beliebigem m ist an die Bemerkung des vorigen Abschnittes anzuknüpfen, daß in $G \pmod m$ eine Untergruppe $G \pmod{m_1} \times G \pmod{m_2}$ nicht existiert. Daher wird $G \pmod m$ durch S_1 und S_2 erzeugt, wenn dies für $G \pmod{m_1}$ und $G \pmod{m_2}$ gilt.

10. Bestimmung der Klassenzahl der Formen Φ.

Die Bestimmung der Formenklassen wird begründet durch folgenden

Satz 9. *Jede Form Φ enthält sämtliche eigentlichen Darstellungen einer ganzen zur Diskriminante D primen Zahl m, wenn sie eine solche Darstellung leistet.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn $G \pmod m$ durch Γ erzeugt wird. Im vorigen Abschnitt wurde dies mit einigen Einschränkungen für die Zahl m bewiesen. Diese darf nur aus Primzahlen ersten Grades zusammengesetzt sein, außerdem durch eine endliche Anzahl von Primzahlen nicht teilbar sein. Zu den letzteren gehören auch die Primteiler der Zahl A, da für diese die Gruppe G nicht definiert worden ist, ferner die Primteiler der Körperdiskriminante von K_λ und der Zahlen 2, 3, wenn diese in m mehrfach aufgehen.

Unter der Voraussetzung, daß solche Primzahlen in m nicht aufgehen, läßt sich nunmehr der Satz 9 beweisen.

Es darf angenommen werden, daß die Darstellung von m durch Φ eine eigentliche im engeren Sinne ist, so daß Φ durch eine äquivalente Form ersetzt werden kann, für die $a = m$ ist. Alsdann liefert zufolge (139) auch

$$x = t, \quad y = mu \tag{170}$$

eine eigentliche Darstellung von m. Nach (146) tritt jeder Idealteiler j_τ von m aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, der keinen Teiler aus K_λ hat (Abschnitt 3), als Teiler von t auf. Seien t, mu und t', mu' zwei zu demselben Ideal j_τ gehörige Darstellungen von m. Der ersten sei die Kongruenzwurzel nach (74)

$$\xi \equiv b \,(\mathrm{mod}\, j_0 \sqrt{A}\, m : \tau) \tag{171}$$

zugeordnet. Die Wurzel der zweiten läßt sich daraus ableiten, daß t', mu' unimodular in t, mu transformiert wird. Aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta m u \\ mu' &= \gamma t + \delta m u \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{172}$$

folgt

$$n_0 \gamma \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, j_0 m : \tau), \qquad \alpha\delta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m : \tau), \tag{173}$$

$$t' \equiv \alpha t \pmod{m}. \tag{174}$$

Aus der Transformationsformel (37) ergibt sich

$$\xi' \equiv b' \equiv b\,\alpha\bar{\delta} \equiv b\,\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \qquad (\mathrm{mod}\, m : \tau). \tag{175}$$

Da die Gruppe G vollständig durch Γ erzeugt wird, so gibt es zu jedem zu $m : j_\tau$ primem α einen Wert t', der (174) erfüllt. Nach Abschnitt 3 (64) werden daher durch (175) alle Wurzeln der Kongruenz (74) erzeugt und (170) liefert nach Satz 2 sämtliche zu j_τ gehörige und damit auch sämtliche $\psi(m)$ Darstellungsklassen. Der Index der Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$ als Untergruppe von Γ beträgt gleichfalls $\psi(m)$ und jeder der abgeleiteten Darstellungsklassen ist eine bestimmte Nebenklasse von $\Gamma_{(m)}$ eindeutig zugeordnet. Unter den genannten Einschränkungen ist damit Satz 9 bewiesen.

Satz 10a. *Jedes der $2^{\lambda-1}$ Geschlechter von Formen Φ mit diskontinuierlicher reproduzierender Gruppe, der Diskriminante D und der Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A enthält nur eine Klasse.*

Gemäß den in Abschnitt 6 genannten Bedingungen für Diskontinuität ist Φ indefinit und die $\lambda - 1$ zu Φ konjugierten Formen sind sämtlich definite Formen. Durch jede dieser Formen ist ein bestimmtes Vorzeichen festgelegt und hierdurch eine Einteilung der bezeichneten Formen Φ in $2^{\lambda-1}$ Geschlechter gegeben. Jedes dieser Geschlechter besitzt nur eine Formenklasse. Dies ergibt sich folgendermaßen.

Seien $\Phi(a, b, c)$ und $\Phi(a', b', c')$ zwei Formen der Diskriminante D, für die $b \equiv b' \pmod{j_0\sqrt{A}}$ ist und deren konjugierte Formen dieselbe Vorzeichenkombination erzeugen, so darf man annehmen, daß a und a' unter sich und zu D prim sind und dasselbe Vorzeichen haben, also aa' total positiv ist. Sodann läßt sich eine Zahl b'' mit der Eigenschaft

176) $$\begin{aligned} b'' &\equiv b \pmod{a j_0 \sqrt{A}}, \\ b'' &\equiv b' \pmod{a' j_0 \sqrt{A}} \end{aligned}$$

bestimmen, und

177) $$b''\bar{b}'' - D n_0 = -A a a' n_0 m_0$$

definiert eine ganze Zahl m_0 aus K_λ. Vermöge

178) $$x = x' + y'(\bar{b} - \bar{b}'') : a\sqrt{A}, \qquad y = y'$$

läßt sich

179) $$\Phi(a, b, c) \quad \text{in} \quad \Phi(a, b'', m_0 n_0 a')$$

und entsprechend

180) $$\Phi(a', b', c') \quad \text{in} \quad \Phi(a', b'', m_0 n_0 a)$$

transformieren. Von diesen Formen ist nachzuweisen, daß sie binäre Formen vom gleichen Geschlecht enthalten. Vermöge

181) $$x_2 = 0, \quad x_1 = \xi, \quad y_1 = v_1\eta, \quad y_2 = v_2\eta$$

gelangt man zu binären Formen in ξ und η

182) $$\begin{aligned} &a\xi^2 + \xi\eta(v_1 b_2'' - v_2 b_1'') + m_0 a' \eta^2 (n_0 v_1^2 + n_1 v_1 v_2 + n_2 v_2^2) \\ &a'\xi^2 + \xi\eta(v_1 b_2'' - v_2 b_1'') + m_0 a \eta^2 (n_0 v_1^2 + n_1 v_1 v_2 + n_2 v_2^2), \end{aligned}$$

welche a bzw. a' darstellen und dieselbe Diskriminante haben. Diese stellt in v_1 und v_2 nach Abschnitt 4 (93) eine primitive quadratische Form dar, wenn $(b'') : j_0$ prim zu $2D$ gewählt wird, eine Voraussetzung, die mit den bisherigen vereinbar ist. Alsdann seien v_1 und v_2 Werte erteilt, für die die Diskriminante eine Primzahl wird. Fällt diese negativ aus, so sind die beiden Formen (182) definit und von demselben Vorzeichen zufolge der Verfügung über a und a'. Daher gehören die Formen unabhängig vom Vorzeichen der Primzahl demselben durch die Vorzeichenkombination der $\lambda - 1$ konjugierten Formen definierten Geschlechte an. Bedeuten C und C' die durch (182) repräsentierten Formenklassen, so lassen sich nach dem Satze vom Hauptgeschlecht zwei andere Klassen C_1 und C_2 angeben, so daß

183) $$C = C_1 C_2, \qquad C' = C_1 C_2^{-1}$$

ist. Sind m_1 und m_2 zwei zueinander prime Zahlen, von denen m_1 durch Formen der Klasse C_1 und m_2 durch Formen der Klasse C_2 eigentlich dargestellt wird, so stellen die Formen von C als auch C' die Zahl $m = m_1 m_2$ eigentlich dar, und es gibt unendlich viele Zahlen, die durch die beiden Formen

(182) und damit auch durch die beiden Formen Φ eigentlich dargestellt werden. Die oben eingeführte Beschränkung für m läßt sich leicht erfüllen. Sei $\varphi_1(\xi, \eta)$ eine binäre quadratische Form aus C_1 und $\varphi_1', \ldots, \varphi_1^{(\lambda-1)}$ die zu φ_1 konjugierten Formen. Alsdann stellt das Produkt

$$\varphi_1(\xi, \eta) \cdot \varphi_1'(\xi, \eta), \ldots, \varphi_1^{(\lambda-1)}(\xi, \eta) \tag{184}$$

eine primitive binäre Form 2λ Grades in ξ, η mit natürlichen ganzen Zahlen als Koeffizienten dar, deren Diskriminante im allgemeinen nicht verschwindet. Seien ξ und η ganze natürliche zueinander prime Zahlwerte. Alsdann ist die Gesamtheit der Zahlen $\varphi_1(\xi, \eta)$ aus K_λ nur durch eine endliche Anzahl Primzahlen von höherem Grade teilbar, da die Norm dieser Zahlen in dem quadratischen Anteil der Diskriminante der Form (184) aufgeht. Es lassen sich aber ξ und η so wählen, daß (184) diese Primzahlen nicht enthält, also $\varphi_1(\xi, \eta)$ eine Zahl m_1 darstellt, die nur Primzahlen ersten Grades enthält. Auch läßt sich erreichen, daß die oben genannten in endlicher Anzahl vorhandenen Primzahlen in m_1 nicht aufgehen. Ferner suche man eine zu m_1 prime Zahl m_2 von gleicher Beschaffenheit, die durch eine Form φ_2 aus der Klasse C_2 eigentlich dargestellt wird. Indem aber die beiden Formen Φ dieselbe Zahl m eigentlich darstellen, folgt nach Satz 9 die Äquivalenz und daraus Satz 10a.

Der Satz 9 läßt sich nunmehr dahin verallgemeinern:

Satz 10b. *Eine Form Φ leistet sämtliche Darstellungen aller Zahlen, deren $\lambda - 1$ konjugierte Zahlen die Vorzeichenkombination der zu Φ konjugierten Formen erzeugen.*

Die vollständige Lösung des Grundproblems der Kongruenzgruppen wird erst nach Bestimmung der Klassenzahl der zugehörigen ternären Formen in II, 7 gegeben werden*). An den Satz 10b knüpft sich indessen eine Bemerkung über die Formen Φ_a, bei denen a in $(b) : j_0$ und damit auch in D aufgeht. Eine Formenklasse enthält nach Satz 10b Formen Φ_a, wenn es einen Teiler a von D gibt, dessen $\lambda - 1$ konjugierte Werte die zur Formenklasse gehörige Vorzeichenkombination erzeugen. Alsdann ist die vollständige reproduzierende Gruppe der Formen mit der von Φ_1 isomorph. Gibt es zu jeder der $2^{\lambda-1}$ Vorzeichenkombinationen Teiler von D, so ist allenthalben Γ die reproduzierende Gruppe der Formen. Dieser Fall bedeutet keine Einschränkung der Zahl D, wenn die zu den Einheiten aus K_λ konjugierten Werte sämtliche $2^{\lambda-1}$ Vorzeichenkombinationen erzeugen, anderenfalls hat D die genannte Eigenschaft nur dann, wenn die fehlenden Vorzeichenkombinationen durch Teiler erzeugt werden, die keine Einheiten sind. Im Hinblick

*) Anmerkung bei der Korrektur: Sobald der Klassenzahlsatz über die Formen Φ auf Diskriminanten D ausgedehnt wird, die quadratische Faktoren enthalten, im übrigen aber prim zu A sind, kann die Lösung des Grundproblems auch vermittels der entsprechend verallgemeinerten Formel für den hyperbolischen Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der reproduzierenden Gruppe gegeben werden.

auf die Transformationstheorie läßt sich die Eigenschaft von D so formulieren, daß zu jeder Zahl m aus K_λ ein Teiler a derart existiert, daß die $\lambda - 1$ zu am konjugierten Werte sämtlich positiv sind.

11. Das Maß der positiven Formen Φ.

Die Diskontinuität der Gruppe Γ ergibt sich unmittelbar aus der Berechnung des hyperbolischen Inhaltes des Diskontinuitätsbereiches. Diese Berechnung läßt sich mit Hilfe der Dirichletschen Prinzipien ausführen. Mit Ausnahme der binären Formen scheinen diese Prinzipien auf indefinite Formen bisher keine Anwendung gefunden zu haben. Es ist zweckmäßig, die entsprechende Untersuchung an den definiten Formen, die den Bedingungen der Diskontinuität nach Abschnitt 6 genügen, voranzustellen, obschon diese nur auf die Gruppen der regulären Körper Anwendung findet. Die Untersuchung betrifft das von Eisenstein eingeführte Maß der Formen. Die Anzahl der Formenklassen sei h und n_i die Ordnung der reproduzierenden Gruppe der einzelnen Form einer Formklasse. Sodann ist das Maß M durch die Summe

$$M = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{n_i} \tag{185}$$

gegeben. Die Formen Φ werden als positive Formen vorausgesetzt, während die Vorzeichen der konjugierten Formen nicht näher bestimmt sind. Alsdann gilt der

Satz 11. *Das Maß für die positiven Formen Φ mit der Diskriminante $D = q_1 \ldots q_\mu$ und der Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A ist durch die Formel*

$$M = k \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \left[N(q_i) + \left(\frac{A}{q_i}\right) \right] \tag{186}$$

gegeben, in der k eine rationale nur von K_λ abhängige durch

$$k = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2^\lambda \pi^{2\lambda}} \cdot \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-2}} \tag{187}$$

gegebene Zahl bedeutet, wobei das Produkt über alle Primzahlen von K_λ zu erstrecken ist und Δ die Körperdiskriminante von K_λ bedeutet.

Die Dirichletsche Methode ergibt den Ansatz

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{n_i} \sum \frac{1}{N(\Phi)^s} = 2^\lambda \cdot \prod \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(q^\nu)}{N(q)^{\nu s}}\right). \tag{188}$$

Die erste Summation auf der linken Seite erstreckt sich auf alle ganzzahligen Werte aus K_λ für die Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 von Φ, die keinen gemeinsamen Teiler haben und der Form Φ einen zu D primen Wert erteilen. Zu-

dem sind, wenn ε alle Einheiten aus K_λ durchläuft, den Variablen Beschränkungen dergestalt aufzuerlegen, daß aus der Gesamtheit der Wertesysteme

$$x_1' = \varepsilon x_1, \quad x_2' = \varepsilon x_2, \quad y_1' = \varepsilon y_1, \quad y_2' = \varepsilon y_2 \tag{189}$$

nur ein Wertesystem zugelassen wird. Die zweite Summation bezieht sich auf die Anzahl der Formenklassen. Auf der rechten Seite ist die Gesamtheit der Beiträge, welche aus den verschiedenen eigentlichen Darstellungen aller positiven zu D primen Zahlen erhalten werden, in ein unendliches Produkt von unendlichen Reihen aufgelöst, das über alle in D nicht aufgehenden Primzahlen q aus K_λ zu erstrecken ist. Hierbei ist von den Zahlen

$$q' = \varepsilon q \tag{190}$$

wiederum nur eine auszuwählen. Da aber durch (189) die Form Φ mit ε^2 multipliziert wird, ist das unendliche Produkt mit $2^{\lambda-1}$ zu multiplizieren. In (188) ist 2^λ als Faktor angesetzt, da es für die in (205) auszuführende Integration zweckmäßig ist, von den Werten (189) zwei von entgegengesetztem Vorzeichen zuzulassen ($\varepsilon = \pm 1$).

Die Formel für die Anzahl der Darstellungsklassen von q^ν enthält nach Satz 2b (59) nicht mehr das Symbol der quadratischen Reste und aus diesem Grunde gestaltet sich die Behandlung des Ausdrucks auf der rechten Seite in (188) wesentlich einfacher als bei den binären Formen. Die Ausführung der Summation für den einzelnen Faktor ergibt

$$1 + (N(q) + 1) \cdot \frac{N(q)^{-s}}{1 - N(q)^{-s+1}} = \frac{1 + N(q)^{-s}}{1 - N(q)^{-s+1}}. \tag{191}$$

Der Bruch werde mit $1 - N(q)^{-s}$ erweitert. Alsdann stellt sich die rechte Seite von (188) durch

$$2 \cdot \prod (1 - N(q)^{-2s}) \cdot \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-s+1}} \cdot \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-s}} \tag{192}$$

dar, wobei die Produkte über alle Primzahlen q zu erstrecken sind, die nicht in D aufgehen. Das erste Produkt werde auf die linke Seite von (188) gebracht und daselbst in eine Reihe entwickelt. Durch Multiplikation der Reihe mit der Doppelsumme wird die Beschränkung, daß x_1, x_2, y_1, y_2 keinen gemeinsamen Teiler haben, beseitigt. Die beiden anderen Produkte in (192) sollen dahin erweitert werden, daß die Beschränkung über q in Fortfall kommt. Wir schreiben also dafür

$$2^\lambda \cdot \prod_{\iota=1}^{\mu} (1 - N(q_\iota)^{-s+1})(1 - N(q_\iota)^{-s}) \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-s+1}} \cdot \prod \frac{1}{1 - N(q)^{-s}}. \tag{193}$$

Das erste der beiden unendlichen Produkte strebt nach Multiplikation mit $s-2$ zufolge der allgemeinen Dedekindschen Formel für die Klassenzahl eines algebraischen Körpers bei $s=2$ dem Grenzwert

$$\lim_{s=2}(s-2)\cdot\prod\frac{1}{1-N(q)^{-s+1}}=\frac{2^{\lambda-1}R}{\sqrt{\Delta}} \tag{194}$$

zu, wenn R der Regulator und Δ die Körperdiskriminante von K_λ bedeutet. Die rechte Seite von (194) ergibt sich aus der Voraussetzung, daß K_λ ein total reeller Zahlkörper ist und die Anzahl der Idealklassen gleich Eins ist. Das zweite unendliche Produkt in (193) stellt für $s=2$ eine absolut konvergente Reihe dar.

Die Behandlung der linken Seite von (188) führt in bekannter Weise auf ein vielfaches Integral. Nach einem Satze von Dirichlet[21]) gilt zunächst

$$\lim_{s=2}(s-2)\cdot\sum_{x,y}\frac{1}{N(\Phi)^s}=2\lim_{t=\infty}\frac{T}{t}, \tag{195}$$

wobei t eine reelle positive Veränderliche bedeutet und T die Anzahl aller in der unendlichen Reihe durch die Form Φ dargestellten Zahlen, deren Norm kleiner ist als $\sqrt{t}$. Der Grenzwert auf der rechten Seite stellt sich als ein 4λ-faches Volumenintegral dar, das für alle Formenklassen denselben Wert hat, so daß bei Ausführung des Grenzüberganges an dem Ansatz (188) die linke Seite übergeht in das Maß M multipliziert mit dem Wert dieses Integrals. Auch die Beschränkung von x_1, x_2, y_1, y_2 auf Werte, die der Form Φ zu D prime Werte erteilen, läßt sich beseitigen. Dazu bestimmt man die Anzahl aller Wertesysteme x_1, x_2, y_1, y_2 modulo D, die zu D prime Zahlen liefern, und dividiert diese durch die Gesamtzahl aller Wertesysteme modulo D, und setzt den Quotienten als Faktor vor das Integral. Zur Bestimmung dieses Quotienten setzen wir Φ in die Gestalt

$$a\,A\,\Phi=(a\sqrt{A}\,x-\bar{b}\,y)\,(a\sqrt{A}\,\bar{x}+b\,\overline{y})+D\,n_0\,y\,\overline{y}. \tag{196}$$

A ist prim zu D vorausgesetzt. Sei auch a prim zu D gewählt. Φ erhält einen zu D primen Wert, wenn $a\sqrt{A}x-\bar{b}\,y$ prim zu D ist. Zu jedem Wert y modulo D gibt es

$$\prod_{\iota=1}^{\mu}(N(q_\iota)-1)\cdot\left[N(q_\iota)-\left(\frac{A}{q_\iota}\right)\right] \tag{197}$$

Werte für x, die der Bedingung genügen. Somit ist der gesuchte Faktor

$$\prod_{\iota=1}^{\mu}(1-N(q_\iota)^{-1})\cdot\left[1-\left(\frac{A}{q_\iota}\right)N(q_\iota)^{-1}\right]. \tag{198}$$

Zu den 4λ Integrationsvariablen gelangt man nunmehr, wenn jede der vier Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 durch die λ Variablen der Fundamentalform von K_λ

[21]) Lejeune-Dirichlet: Vorles. über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, Braunschweig (1863), § 118.

dargestellt wird und jede dieser 4λ Variablen durch $\sqrt[4\lambda]{t}$ dividiert wird. Statt dessen kann man auch bei den Variablen

$$x_1 : \sqrt[4\lambda]{t}, \quad x_2 : \sqrt[4\lambda]{t}, \quad y_1 : \sqrt[4\lambda]{t}, \quad y_2 : \sqrt[4\lambda]{t} \tag{199}$$

und den entsprechenden Variablen der $\lambda - 1$ zu Φ konjugierten Formen verbleiben, wenn die Substitutionsdeterminante

$$\Delta^{-2} \tag{200}$$

vor das Integral gesetzt wird. In den Variablen (199) gilt

$$N(\Phi) \leqq 1. \tag{201}$$

Das System der Substitutionen (189) samt den $\lambda - 1$ konjugierten Systemen bilden eine Kollineation im Raume der 4λ Variablen. Jede Einheit aus K_λ liefert eine solche Kollineation, und die Gesamtheit der Kollineationen bilden eine in diesem Raume diskontinuierliche Gruppe. Die Bedingung (201) schneidet aus dem Diskontinuitätsbereich bei geeigneter Wahl desselben einen endlich begrenzten Raum heraus, dessen Volumen zu bestimmen ist. Zu diesem Zwecke transformieren wir die Form vermöge einer Substitution mit der Determinante D^{-1} in die Form

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}, \tag{202}$$

wobei $\xi, \bar{\xi}$ und $\eta, \bar{\eta}$ konjugiert-komplexe Veränderliche bedeuten. Die Substitution ist so zu wählen, daß sie in den reellen Anteilen von ξ und η geschrieben, reelle Koeffizienten besitzt. Desgleichen sind die $\lambda - 1$ konjugierten Formen entsprechend ihrem Vorzeichen in

$$\pm\left(\xi^{(\varrho)}\bar{\xi}^{(\varrho)} + \eta^{(\varrho)}\bar{\eta}^{(\varrho)}\right) \qquad (\varrho = 1, \ldots, \lambda - 1) \tag{203}$$

zu transformieren. Setzt man

$$\xi = \sqrt{\varrho}\, e^{i\alpha}, \ \eta = \sqrt{\sigma - \varrho}\, e^{i\beta}, \quad \xi' = \sqrt{\varrho'}\, e^{i\alpha'}, \ \ldots, \ \eta^{(\lambda-1)} = \sqrt{\sigma^{(\lambda-1)} - \varrho^{(\lambda-1)}}\, e^{i\beta^{(\lambda-1)}}, \tag{204}$$

so erhält das 4λ-fache Integral in den reellen Variablen ϱ, α, $\sigma - \varrho$, β, ..., $\beta^{(\lambda-1)}$ die Gestalt

$$N(D)^{-1} \iiint \ldots \int d\varrho\, d\alpha\, d\sigma\, d\beta\, d\varrho'\, d\alpha' \ldots d\sigma^{(\lambda-1)}\, d\beta^{(\lambda-1)}. \tag{205}$$

Hierbei sind die ϱ und die $\sigma - \varrho$ auf positive Werte beschränkt. Die Bedingung (201) geht über in

$$\sigma \cdot \sigma' \cdot \ldots \cdot \sigma^{(\lambda-1)} \gtrless 1. \tag{206}$$

Durch die Substitutionen (189) wird σ mit ε^2 multipliziert und durch die konjugierten Substitutionen die $\sigma', \ldots, \sigma^{(\lambda-1)}$ mit dem Quadrat der zu ε konjugierten Einheiten $\varepsilon', \ldots, \varepsilon^{(\lambda-1)}$. Die α und β durchlaufen unbeschränkt die Werte 0 bis 2π, so daß sich (205) auf das 2λ-fache Integral

$$N(D)^{-1}(2\pi)^{2\lambda} \iiint \ldots \int d\varrho\, d\sigma\, d\varrho' \ldots d\sigma^{(\lambda-1)} \tag{207}$$

reduziert. Bei Integration nach ϱ durchläuft ϱ die Werte von 0 bis σ und (207) geht in das $2\lambda - 1$-fache Integral

$$\frac{1}{2} N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda} \iint \dots \int d\sigma^2 \, d\varrho' \dots d\sigma^{(\lambda-1)} \tag{208}$$

über. Die Fortsetzung des Verfahrens liefert ein λ-faches Integral

$$2^{-\lambda} N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda} \iint \dots \int d\sigma^2 \, d\sigma'^2 \dots d(\sigma^{(\lambda-1)})^2. \tag{209}$$

Indem nach σ integriert und die Bedingung (206) verwertet wird, ergibt sich das $\lambda - 1$-fache Integral

$$\frac{1}{2} N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda} \int \dots \int d(\log \sigma') \dots d(\log \sigma^{(\lambda-1)}). \tag{210}$$

Sodann ist die Substitution

$$\log \sigma^{(\varrho)} = \tau_1 \log|\varepsilon_1^{(\varrho)}| + \tau_2 \log|\varepsilon_2^{(\varrho)}| + \dots + \tau_{\lambda-1} \log|\varepsilon_{\lambda-1}^{(\varrho)}| \quad (\varrho = 1, \dots, \lambda - 1) \tag{211}$$

auszuführen, in der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\lambda-1}$ ein System von Grundeinheiten aus K_λ bedeuten. Die Variablen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{\lambda-1}$ haben die Grenzen 0 und 2, so daß der Wert des Integrals sich zu

$$2^{\lambda-2} N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda} R \tag{212}$$

berechnet. Unter Berücksichtigung von (200), (198), (195), (194), (193) ergeben sich die Formeln (186) und (187).

Die Ermittlung der rationalen Zahl k vermöge der Formel (187) ergibt sich aus der Bemerkung, daß der Nenner der Zahl $k : 2^{\lambda-1}$ die natürliche Primzahl p nur dann $\varkappa$-fach enthalten kann, wenn der durch $2\cos\left(\frac{2\pi}{p^\varkappa}\right)$ definierte algebraische Zahlkörper in K_λ enthalten ist. Die Behauptung erweist sich zunächst für die Ordnungen n_i in der Definition (185) für M als richtig. Sobald bewiesen ist, daß jedes der $2^{\lambda-1}$ Geschlechter, die durch die Vorzeichen der zu Φ konjugierten Formen gegeben sind, dasselbe Maß besitzen, folgt die Behauptung für den Nenner von $M : 2^{\lambda-1}$ und aus Formel (186) auch für den Nenner von $k : 2^{\lambda-1}$, wenn etwa für D ein Primteiler von p aus K_λ eingesetzt wird. Bei $\lambda = 1$ ist $k = \frac{1}{12}$ und man erhält die bekannte Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{213}$$

Vermöge dieser Gleichung ergibt sich für $\lambda = 2$

$$\prod \frac{1}{1 - \left(\frac{\Delta}{p}\right) p^{-2}} = \frac{24 k \pi^2}{\Delta^{\frac{3}{2}}}, \tag{214}$$

wobei p im Produkt links alle natürlichen Primzahlen durchläuft[22]). Es ist für

$$\begin{array}{l} \Delta = 5, \quad 8, \quad 12, \quad 13, \quad 17, \quad 21, \quad 24, \quad 28, \quad 29, \quad 33, \\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{60}, \quad \frac{1}{24}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}. \end{array} \tag{215}$$

Eine tetraedrische Form Φ wird für $\lambda = 1$, $D = 2$ erhalten. Bei Adjunktion von $K_2 = K(\sqrt{5})$ läßt sich diese in eine ikosaedrische Form mit der Diskriminante $D = 1$ transformieren. Die Aufstellung der Form wird in Teil II, Abschnitt 11, gegeben werden.

12. Der hyperbolische Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe.

Sei nunmehr Φ eine indefinite Form, die den Bedingungen für Diskontinuität in Abschnitt 6 genügt. Alsdann gilt der

Satz 12. *Die Form Φ mit der Diskriminante D und der Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A besitzt eine diskontinuierliche reproduzierende Gruppe, deren Diskontinuitätsbereich den hyperbolischen Inhalt*

$$I = 4\pi M : 2^{\lambda - 1} \tag{216}$$

hat, wobei die Zahl M nach den Regeln (186) *und* (187) *des Satzes* 11 *zu berechnen ist.*

Dieser Satz stellt eine enge Beziehung des in der Dirichletschen Methode auftretenden Grenzwertes

$$\lim_{t=\infty} \frac{T}{t} \tag{217}$$

zu der hyperbolischen Maßbestimmung her. Zunächst sei eine Bemerkung über indefinite binäre Formen, deren Koeffizienten natürliche Zahlen sind, vorausgeschickt. Daselbst tritt ein Integral $\int\int d\xi\, d\eta$ auf, das einerseits durch

$$0 \leqq \xi\eta \leqq 1 \tag{218}$$

mit positivem ξ, η, andererseits vermöge einer Kollineation

$$\xi' = \varepsilon\xi, \quad \eta' = \varepsilon^{-1}\eta \tag{219}$$

mit positivem ε begrenzt wird. Die Kollineation transformiert den Bereich (218) in sich. Eine endliche Begrenzung für das Integral wird dadurch erhalten, daß in nebenstehender Figur eine sich nicht schneidende Kurve PQ von der Hyperbel $\xi\eta = 1$ zur angrenzenden Asymptote $\xi = 0$ gezogen und diese durch (219) in die Kurve $P'Q'$ transformiert wird. Der Bereich $PQQ'P'$ hat sodann den von den begrenzenden Kurven unabhängigen Wert $\log(\varepsilon)$. Eine spezielle Form des Bereiches bildet der Hyperbelsektor POP'. Wird

[22]) Aus (214) ergibt sich für k die allgemeingültige Formel

$$\frac{1}{2}k = -\frac{1}{12}\left[\Sigma n\left(\frac{\Delta}{n}\right)\right] : \left[4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] \quad \left(n = 1, 2, \ldots, < \frac{1}{2}\Delta\right),$$

in der die Symbole wie in Abschnitt 2 definiert sind (Anmerkung 9). Dies folgt aus Formeln von Cauchy. (Hierzu P. Bachmann l. c., quadratische Formen 1, S. 657 u. f.

nunmehr die Hyperbel als absolutes Gebilde einer hyperbolischen Maßbestimmung betrachtet, so ist die von den Strahlen OP und OP' auf der unendlich fernen Geraden herausgeschnittene Strecke, in diesem Maßsystem gemessen, proportional dem Inhalt des Sektors, da für das Doppelverhältnis, das die Strahlen mit den Asymptoten $\eta = 0$, $\xi = 0$ bilden, der Wert ε^2 gefunden wird und $\log \varepsilon^2$ das Doppelte des Sektorinhaltes beträgt.

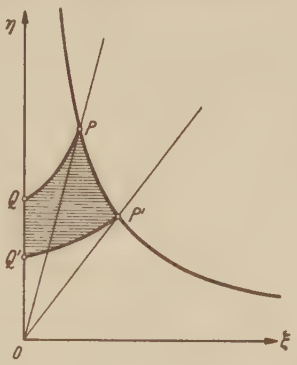


Fig. 1.

Der Zusammenhang tritt bei Ausdehnung der Betrachtung auf indefinite ternäre Formen noch deutlicher hervor. Wenn die Koeffizienten natürliche Zahlen sind, ergibt sich für (217) ein Raumintegral und zwar erweitert sich (218) zu

$$0 \leqq \xi\eta - \vartheta^2 \leqq 1. \tag{220}$$

Das zweischalige Hyperboloid $\xi\eta - \vartheta^2 = 1$ und der Asymptotenkegel $\xi\eta - \vartheta^2 = 0$ bilden die Begrenzung dieses Bereiches. Die reproduzierende Gruppe der vorgelegten ternären Form liefert Kollineationen, welche den Bereich in sich transformieren. Vermittels der Kollineationen läßt sich in ähnlicher Weise wie oben, aus dem Bereich ein endlich begrenzter Raum herausschneiden, dessen Volumen dem hyperbolischen Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe proportional ist. An der speziellen Gestalt des Raumes als hyperboloidischer Sektor, dessen Spitze im Ursprung des Koordinatensystems liegt, läßt sich die Rechnung leicht durchführen. Vermittels der quadratischen Substitution

$$\xi : \vartheta : \eta = 2\zeta\bar{\zeta} : (\zeta + \bar{\zeta}) : 2 \tag{221}$$

wird das Innere des Kegelschnittes, welchen das Hyperboloid aus der unendlich fernen Ebene herausschneidet, in die kreisgeometrische Halbebene transformiert. Als Inhalt des hyperboloidischen Sektors erhält man den Wert

$$\iiint d\xi\, d\vartheta\, d\eta = \tfrac{2}{3} \iint \frac{du \cdot dv}{v^2}, \tag{222}$$

wenn $\zeta = u + iv$ gesetzt wird. Das zweifache Integral bedeutet den kreisgeometrischen Inhalt des Diskontinuitätsbereiches. Indessen ist es nicht zweckmäßig, bei der Bestimmung desselben an die ternären Formen anzuknüpfen, vielmehr erweist sich auch in diesem Falle die Einführung der konjugiert-quadratischen Bilinearformen als wesentlich.

Sei also eine indefinite Form Φ von der Diskriminante D gegeben. Diese läßt sich in gleicher Weise wie in (202) des vorigen Abschnittes auf die Form

$$-\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} \tag{223}$$

reduzieren. Durch die Substitution

$$\xi = \zeta\eta \tag{224}$$

gelangt man unmittelbar zu der kreisgeometrischen ζ-Ebene. Indem Φ bzw. die Form (223) auf positive Werte beschränkt wird, bleibt ζ auf das Innere des Einheitskreises beschränkt. Wir setzen

$$\zeta = u + iv, \qquad \eta = \sqrt{\sigma}\, e^{i\beta}. \tag{225}$$

Es werde sogleich der allgemeine Fall des Körpers K_λ in Betracht gezogen. Die zu Φ konjugierten Formen reduziere man auf die Formen (203) und setze nach (204)

$$\xi' = \sqrt{\varrho'}\, e^{i\alpha'}, \ldots, \eta^{(\lambda-1)} = \sqrt{\sigma^{(\lambda-1)} - \varrho^{(\lambda-1)}} \cdot e^{i\beta^{(\lambda-1)}}. \tag{226}$$

Alsdann tritt an Stelle des Integrals (205) nunmehr folgendes

$$N(D)^{-1} \iiint \ldots \int 2\, du\, dv\, \sigma\, d\sigma\, d\beta\, d\varrho'\, d\alpha' \ldots d\sigma^{(\lambda-1)}\, d\beta^{(\lambda-1)}. \tag{227}$$

Die Bedingung $N(\Phi) \leqq 1$ geht über in

$$(1 - \zeta\bar{\zeta})\, \sigma\sigma' \ldots \sigma^{(\lambda-1)} \leqq 1. \tag{228}$$

Die Variablen des Integrals werden außer u und v in derselben Weise wie früher behandelt, und man gelangt zu dem $\lambda + 1$-fachen Integral

$$N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda-1} \iiint \ldots \int \frac{du\, dv}{(1 - \zeta\bar{\zeta})^2}\, d(\log\sigma') \ldots d(\log\sigma^{(\lambda-1)}). \tag{229}$$

Die Anwendung der Substitution (211) ergibt sodann

$$2^{\lambda-1} N(D)^{-1} (2\pi)^{2\lambda-1} R \iint \frac{du\, dv}{(1 - \zeta\bar{\zeta})^2}. \tag{230}$$

Das Doppelintegral bedeutet aber den vierten Teil des hyperbolischen Inhaltes des Diskontinuitätsbereiches. Bei Einführung der durch die Formeln (186) und (187) bezeichneten Zahl M ergibt sich zunächst

$$\Sigma I = 4\pi M, \tag{231}$$

wobei die Summation über die $2^{\lambda-1}$ Geschlechter zu erstrecken ist. Sämtliche Geschlechter erzeugen dieselbe Gruppe, wenn zu jeder Zahl m aus K_λ ein Teiler d von D derart vorhanden ist, daß sämtliche $\lambda - 1$ zu md konjugierten Zahlen positiv sind. Alsdann sind alle I einander gleich, und es folgt die in (216) angegebene Formel. Wenn D diese Eigenschaft nicht besitzt, so werden zwar verschiedene Gruppen erhalten, die Diskontinuitätsbereiche haben jedoch denselben Inhalt, so daß auch in diesem Falle der Satz 12 gilt. Die nähere Begründung und die Bestimmung der Anzahl dieser Gruppen ergibt sich aus dem Klassenzahlsatz über ternäre Formen in Teil II, 5. Es bleibt zu bemerken, daß die Kongruenzwurzel $\frac{1}{2}(b + \bar{b})$ modulo A und die durch j_0 definierte Idealklasse aus $K_\lambda(\sqrt{A})$ nicht in die Formel für den hyperbolischen Inhalt eingeht und bei Wahl einer anderen Wurzel oder Klasse nur eine Vertauschung der erwähnten Gruppen stattfindet. Auch diese Behauptung ist eine Folge des Klassenzahlsatzes über ternäre Formen.

(Eingegangen am 27. April 1937.)

On parabolic cylinder functions which are self-reciprocal in the Hankel-transform.

Von

S. C. Mitra, Dacca (India).

1. It has long been known that Webers's parabolic cylinder function $D_n(x\sqrt{2})$ of integral order n is self-reciprocal or skew self-reciprocal in a Fourier-transform[1]). Recently the author has proved that $x^{-\frac{1}{2}} D_{2m+1}^2(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ is self-reciprocal in a Hankel-transform of order 1[2]). The result has been extended to the case of Laguerre polynomials by Watson who has proved that the functions $e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2\alpha+\frac{1}{2}} \{L_n^{(\alpha)}(\frac{1}{2}x^2)\}^2$ are self-reciprocal in the Hankel-transform of order 2α[3]). From this result, the author's result follows at once by taking $\alpha = \frac{1}{2}$.

In a paper published at about the same time as those of the author and Watson Mr. R. S. Varma[4]) has obtained the relations

$$x^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu-3}(x) = \int_0^\infty \sqrt{(xy)}\, J_\nu(xy)\, y^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu-3}(y)\, dy,$$
$$(R(\nu) > -1)$$

and

$$x^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu}(x) = \int_0^\infty \sqrt{(xy)}\, J_\nu(xy)\, y^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu}(y)\, dy,$$
$$(R(\nu) > -\tfrac{1}{2}).$$

In this paper I give results of a like nature which involve the parabolic cylinder function of integral order n.

The following properties of $D_n(x)$ will be required in the sequel.

For unrestricted values of n, $D_n(x)$ may be defined by the series

$$(1) \qquad D_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, 2^{\frac{1}{2}n}\, e^{-\frac{1}{4}x^2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n)}\, {}_1F_1(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}x^2)$$
$$+ \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\, 2^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}\, x\, e^{-\frac{1}{4}x^2}}{\Gamma(-\frac{1}{2}n)}\, {}_1F_1(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}n; \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}x^2).$$

---

[1]) A. Milne, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **32** (1914), p. 2—14.

[2]) S. C. Mitra, *Journal, London Math. Soc.* **11** (1936), p. 252—256.

[3]) G. N. Watson, *Journal, London Math. Soc.* **11** (1936), p. 256—261.

[4]) R. S. Varma, *Proc. London Math. Soc.* Series 2, **42** (1937). p. 9—17.

The function $D_n(x)$ is a solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x^2)\,y = 0. \tag{2}$$

Other solutions of this equation are $D_{-n-1}(ix)$ and $D_{-n-1}(-ix)$, the relation between the three solutions being

$$D_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+1)\,[e^{\frac{1}{2}n\pi i}\,D_{-n-1}(ix) + e^{-\frac{1}{2}n\pi i}\,D_{-n-1}(-ix)]. \tag{3}$$

When x is large and positive,

$$D_n(x) \sim x^n e^{-\frac{1}{4}x^2},\quad D_{-n-1}(ix) \sim x^{-n-1}\,e^{\frac{1}{4}x^2}. \tag{4}$$

2. Let us write $2n$ for n and $y = x^{-n+1}\,e^{\frac{1}{4}x^2}\,w$ in (2). Then w satisfies the differential equation

$$x^2\frac{d^2w}{dx^2} + (x^3 - 2(n-1)x)\frac{dw}{dx} + ((n-1)n + (n+2)x^2)\,w = 0. \tag{5}$$

Again writing $w = ux^{-1}$, we get the equation

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + (x^3 - 2nx)\frac{du}{dx} + (n+1)(x^2+n)\,u = 0. \tag{6}$$

3. With a view to constructing a solution of (5), we shall study the result of applying the differential operator

$$\Delta \equiv x^2\frac{d^2}{dx^2} + (x^3 - 2(n-1)x)\frac{d}{dx} + ((n-1)n + (n+2)x^2)$$

to integrals of the form

$$\int_\alpha^\beta J_{n-1}(xz)\,\Phi(z)\,dz$$

the limits of integration being supposed independent of x.

By using Bessel's differential equation

$$x^2z^2J''_{n-1}(xz) + xzJ'_{n-1}(xz) + (x^2z^2 - (n-1)^2)\,J_{n-1}(xz) = 0,$$

we see on reduction that

$$\Delta\int_\alpha^\beta J_{n-1}(xz)\,\Phi(z)\,dz = \int_\alpha^\beta [(x^2 - (2n-1))\,z\frac{d}{dz}J_{n-1}(xz) + \{(n-1)(2n-1) + (n+2)x^2 - x^2z^2\}\,J_{n-1}(xz)]\,\Phi(z)\,dz.$$

From the results

$$-x^2J_{n-1}(xz) = \frac{d^2}{dz^2}J_{n-1}xz) + z^{-1}\frac{d}{dz}J_{n-1}(xz) - (n-1)^2z^{-2}J_{n-1}(xz)$$

and

$$-x^2z\frac{d}{dz}J_{n-1}(xz) = z\frac{d^3}{dz^3}J_{n-1}(xz) + \frac{d^2}{dz^2}J_{n-1}(xz) - (n^2 - 2n + 2)z^{-1}\frac{d}{dz}J_{n-1}(xz) + 2(n-1)^2z^{-2}J_{n-1}(xz)$$

it follows that

$$\Delta \int_\alpha^\beta J_{n-1}(xz)\,\Phi(z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[-z\frac{d^3}{dz^3}J_{n-1}(xz) + (z^2 - n - 3)\frac{d^2}{dz^2}J_{n-1}(xz) + \{(n^2 - 3n) - (2n-2)z^2\}$$

$$\times z^{-1}\frac{d}{dz}J_{n-1}(xz) + \{(n^2 - n)z^2 + n(n-1)^2\}z^{-2}J_{n-1}(xz)\Big]\Phi(z)\,dz.$$

By effecting some partial integrations, we see at once that

$$\Delta \int_\alpha^\beta J_{n-1}(xz)\,\Phi(z)\,dz$$

$$= \Big[-\frac{d^2}{dz^2}J_{n-1}(xz)\,z\,\Phi(z) + \frac{d}{dz}J_{n-1}(xz)\,(z\,\Phi'(z) + (z^2 - n - 2)\Phi(z))$$

$$+ J_{n-1}(xz)\{-z\,\Phi''(z) + (n + 1 - z^2)\Phi'(z) - 2nz\,\Phi(z)$$

$$+ (n^2 - 3n)z^{-1}\Phi(z)\}\Big]_\alpha^\beta$$

$$+ \int_\alpha^\beta \Big[J_{n-1}(xz)\{z\,\Phi'''(z) + (z^2 - n)\Phi''(z) + ((2n+2)z^2$$

$$- (n^2 - 3n))z^{-1}\Phi'(z) + ((n^2 + n)z^2 + (n-2)n(n+1))z^{-2}\Phi(z)\}\Big]dz.$$

Now

$$z\,\Phi'''(z) + (z^2 - n)\Phi''(z) + ((2n+2)z^2 - (n^2 - 3n))z^{-1}\Phi'(z)$$

$$+ ((n^2 + n)z^2 + (n-2)n(n+1))z^{-2}\Phi(z)$$

$$= \frac{d}{dz}\Big[z^{-1}\Big\{z^2\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + (z^3 - 2nz)\frac{d}{dz}\Phi(z) + (n+1)(z^2+n)\Phi(z)\Big\}\Big]$$

$$+ (n-1)z^{-2}\Big\{z^2\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + (z^3 - 2nz)\frac{d}{dz}\Phi(z) + (n+1)(z^2+n)\Phi(z)\Big\}$$

which vanishes by virtue of (6) if we take

$$\Phi(z) = z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z)$$

It is therefore evident that if we take $\Phi(z)$ to be $z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z)$, we have

$$\Delta \int_\alpha^\beta z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z)\,J_{n-1}(xz)\,dz$$

$$= \Big(e^{-\frac{1}{4}z^2}\Big[-\frac{d^2}{dz^2}J_{n-1}(xz)\,z^{n+1}D_{2n}(z) + \frac{d}{dz}J_{n-1}(xz)\{z^{n+1}D'_{2n}(z)$$

(7) $$+ (\tfrac{1}{2}z^{n+2} - 2z^n)D_{2n}(z)\} - J_{n-1}(xz)\{(n-1)z^n D'_{2n}(z)$$

$$- (n^2 - n)z^{n-1}D_{2n}(z) + \tfrac{1}{2}(n-1)z^{n+1}D_{2n}(z)\}\Big]\Big)_\alpha^\beta$$

and if the limits of integration are chosen so that the expression in [ ] on the right of (7) vanishes at each limit, then

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) J_{n-1}(xz)\, dz$$

is a solution of (5).

The expression in question vanishes at $z = \infty$, at $z = 0$, it is equal to zero if $n > 0$.

Consequently the function

$$\int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) J_{n-1}(xz)\, dz$$

is equal to a solution of (5) with $n > 0$.

Hence

$$\int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) J_{n-1}(xz)\, dz$$

is a linear combination of the fundamental solutions of (5), viz

$$x^{n-1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n}(x) \quad \text{and} \quad x^{n-1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{-2n-1}(\pm ix).$$

4. If we restrict ourselves to positive integral values of n only, we find easily that

$$\int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) J_{n-1}(xz)\, dz = A\, x^{n-1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n}(x).$$

E quating the coefficient of x^{n-1} on both sides and remembering that[5])

$$\int_{0}^{\infty} z^{\nu-1} e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{\mu-1}(z)\, dz = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)}\, \Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1)}$$

we find after some calculations that

$$A = (-1)^n.$$

Hence we have

$$(8) \qquad \int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) J_{n-1}(xz)\, dz = (-1)^n x^{n-1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n}(x).$$

In a similar manner, we can prove that

$$(9) \qquad \int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n-1}(z) J_n(xz)\, dz = (-1)^{n-1} x^{n-1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n-1}(x).$$

We can therefore write

$$\int_{0}^{\infty} z^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n}(z) \sqrt{(xz)}\, J_{n-1}(xz)\, dz = (-1)^n x^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n}(x)$$

---

[5]) G. N. Watson, *Proc. London Math. Soc.* Series 2, 8 (1910), p. 397—400.

and

$$\int_0^\infty z^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{2n-1}(z) \sqrt{(xz)}\, J_n(xz)\, dz = (-1)^{n-1} x^{n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2n-1}(x).$$

5. I have previously proved[6]) that $y = D_n^2(x)$ satisfies the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + (4n + 2 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0. \tag{10}$$

Solutions of (10) are $D_n^2(x)$, $D_{-n-1}^2(\pm ix)$ and also the product of any two of $D_n(x)$, $D_{-n-1}(ix)$ and $D_{-n-1}(-ix)$. The only solution which is odd in x is $[D_{-n-1}^2(ix) - D_{-n-1}^2(-ix)]$.

It has also been shown that the solution of (10) may be expressed in the form

$$\int_\alpha^\beta x J_1(xz)\, \Phi(z)\, dz$$

where $\Phi(z)$ satisfies the same equation as $D_n^2(x)$ (apart from the change from x to z) and the limits of integration are properly chosen.

Let us take n to be a positive integer and

$$\Phi(z) = [D_{-n-1}^2(iz) - D_{-n-1}^2(-iz)].$$

If we take the limits of integration to be zero and infinity, then by virtue of (3) and (4), we easily find that the integrand vanishes at both the limits.

Proceeding on the same lines as before, we find that

$$\int_0^\infty x J_1(xz)\, \{D_{-n-1}^2(iz) - D_{-n-1}^2(-iz)\}\, dz$$

is the only linear combination of

$$D_{-n-1}^2(\pm ix) \quad \text{and} \quad D_{-n-1}(ix)\, D_{-n-1}(-ix).$$

Now

$$J_1(xz) = \frac{xz}{4\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t - \frac{x^2z^2}{4t}\right) \cdot t^{-2}\, dt\ ^{6'}).$$

Consequently

$$\int_0^\infty x J_1(xz)\, \{D_{-n-1}^2(iz) - D_{-n-1}^2(-iz)\}\, dz$$

$$= \frac{x^2}{4\pi i} \int_0^\infty z\, \{D_{-n-1}^2(iz) - D_{-n-1}^2(-iz)\}\, dz \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t - \frac{x^2z^2}{4t}\right) \cdot t^{-2}\, dt.$$

---

[6]) *Journal, London Math. Soc.* **11** (1936), p. 256—260.

[6']) The contour is the same as that defined by Whittaker and Watson, Modern Analysis, 3rd. Edition. Arts. 17.1 and 17.2.

On changing the order of integration[7]) we find that the integral is equal to

$$\frac{x^2}{4\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \exp t\cdot t^{-2}\,dt \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2z^2}{4t}\right)\cdot z\,\{D^2_{-n-1}(iz) - D^2_{-n-1}(-iz)\}\,dz.$$

Since[8])

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2z^2}{4t}\right)\cdot z\,\{D^2_{-n-1}(iz) - D^2_{-n-1}(-iz)\}\,dz$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\,2\pi i}{\Gamma(n+1)}\,x^{-1}\,(2t)^{3/2}\,(2t-x^2)^n\,(2t+x^2)^{-n-1},$$

the integral is equal to

$$\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}\,x}{\Gamma(n+1)}\int_{-\infty}^{(0+)} \exp t\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,(2t-x^2)^n\,(2t+x^2)^{-n-1}\,dt.$$

Making use of Hankel's formula[9])

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^t\,t^{-n-1}\,dt$$

where $|\arg t| \leqq \pi$ on the path of integration, and comparing the coefficients of x, x^3 etc. we easily find that

$$\int_0^{\infty} x\,J_1(xz)\,\{D^2_{-n-1}(iz) - D^2_{-n-1}(-iz)\}\,dz$$

$$= (-1)^n\,\{D^2_{-n-1}(ix) - D^2_{-n-1}(-ix)\}. \tag{11}$$

In the language of transforms, $x^{-\frac{1}{2}}\,\{D^2_{-n-1}(ix) - D^2_{-n-1}(-ix)\}$ is self-reciprocal or skew self-reciprocal in the Hankel-transform of order 1 according as n is an even or an odd integer.

6. The above result can also be obtained very easily with the help of the Operational Methods.

A given function $f(x)$ is said to be represented operationally by another function $\Phi(p)$, if

$$\Phi(p) = p\int_0^{\infty} e^{-px}\,f(x)\,dx, \tag{12}$$

provided that the integral converges. The relation (12) between $f(x)$ and $\Phi(p)$ may be denoted as

$$\Phi(p) \doteqdot f(x)\ ^{10}).$$

---

[7]) The change in the order of integration is justifiable. See *Bromwich, Theory of infinite series*, second Edition, Art. 177.

[8]) *Proc. Edinburgh Math. Soc.* Series 2, 4 (1934), p. 27—32.

[9]) Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, 3rd. Edition. Art. 12. 22.

[10]) B. V. d. Pol and K. F. Nissen, *Phil. Mag.* 8 (1929), 13 (1932).

If $f(x) = x$, then $\Phi(p) = \frac{1}{p}$ and we have the relations

$$\frac{1}{p} \doteqdot x \text{ or } x \doteqdot \frac{1}{p}.$$

We have proved before [11]) that

$$(13) \quad \frac{2\pi}{\Gamma(n+1)} \sqrt{p}\, \frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}} \doteqdot i\,\{D^2_{-n-1}(i\sqrt{2x}) - D^2_{-n-1}(-i\sqrt{2x})\},$$

and B. V. d. Pol has shown that [12])

$$(14) \quad \Phi\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty (x z^{-1})^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\,(x z)^{\frac{1}{2}}\right) F(z)\, dz.$$

Let $\Phi(p) = \frac{2\pi}{\Gamma(n+1)} \sqrt{p}\, \frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}}$;

$$F(x) = i\,\{D^2_{-n-1}(i\sqrt{2x}) - D^2_{-n-1}(-i\sqrt{2x})\}.$$

Then

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \Phi(p).$$

Hence we get afler slight reductions,

$$\int_0^\infty x J_1(xz)\,\{D^2_{-n-1}(iz) - D^2_{-n-1}(-iz)\}\, dz = (-1)^n\,\{D^2_{-n-1}(ix) - D^2_{-n-1}(-ix)\}.$$

---

[11]) S. C. Mitra, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* Series 2, 4 (1934), p. 27 — 32.
[12]) B. V. d. Pol, U. R. S. I. *Document A. G.* 1934 / No. 12 / Comm. V.

(Eingegangen am 23. März 1937.)

Integralgeometrie 26.

Über die kinematische Hauptformel.

Von

Ta-Jen Wu*) in Hamburg und Wuchang.

In der Euklidischen Ebene seien $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ Gebiete, die von einer oder mehreren einfachen, geschlossenen Kurven berandet sind. Man bezeichnet ihren Flächeninhalt mit F_0 und F_1 und ihre Randkurven mit $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$. Die Gesamtkrümmung der Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ nennen wir K_0 und K_1 und ihren Umfang U_0 und U_1. Bei der Berechnung der Gesamtkrümmung wird der Integrationsweg so durchlaufen, daß das Gebiet immer links von der Randkurve liegt. Betrachtet man nun $\mathfrak{K}_0$ als fest und $\mathfrak{K}_1$ als beweglich, so gilt *die kinematische Hauptformel in der Ebene*[1])

$$(1^0) \qquad \boxed{\int K_{01}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi\{K_0F_1 + U_0U_1 + F_0K_1\}},$$

wobei K_{01} die Gesamtkrümmung der Randkurve $\mathfrak{R}_{01}$ des Durchschnittes $\mathfrak{K}_{01} = \mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1$ und $\dot{\mathfrak{R}}_1$ die „*kinematische Dichte*“ von $\mathfrak{R}_1$[2]) bedeutet. Ist ferner F_{01} der Flächeninhalt von $\mathfrak{K}_{01}$, so gilt[3])

$$(2^0) \qquad \boxed{\int F_{01}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi F_0F_1}.$$

Die Formel (2⁰) werden wir später benutzen.

Die beiden Formeln (1⁰) und (2⁰) gelten nicht nur in der Euklidischen Ebene, sondern auch auf der *Euklidischen Einheitskugel*[4]).

---

*) „Research fellow“ der „China Foundation“.

[1]) Siehe z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft, zweite erweiterte Auflage, Leipzig und Berlin (1936), S. 36—39.

[2]) Die kinematische Dichte ist eine gewisse Differentialform dritter Ordnung. Die Lage der beweglichen Kurve $\mathfrak{R}_1$ ist nämlich durch die Lage eines mit $\mathfrak{R}_1$ starr verbundenen Linienelements eindeutig bestimmt. Ist $\dot{\mathfrak{x}}$ das von dem Ursprung des Linienelements beschriebene Flächenelement und $\dot{\varphi}$ eine infinitesimale Drehung des Linienelements um $\mathfrak{x}$, so ist $\dot{\mathfrak{R}}_1 = \dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\varphi}$. Die Differentialform zweiter Ordnung $\dot{\mathfrak{x}}$ nennt man die „*Punktdichte*“ des Punktes $\mathfrak{x}$. Ähnlich definiert man die kinematische Dichte und Punktdichte auf der Einheitskugel.

[3]) Siehe etwa das unter [1]) genannte Heft, S. 32.

[4]) Siehe W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, zweites Heft. Leipzig und Berlin (1937), S. 81—82.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, die Gültigkeit der Formel (1^0) auf Kurven mit mehrfachen Punkten zu erweitern. Dazu müssen wir passende Definitionen für die betreffenden Größen K, F und U wählen. Ähnliche Erweiterungen kann man auch im Raume durchführen.

Hiermit möchte ich Herrn Blaschke für Anregung und Ratschläge und Herrn Bol und Herrn Maak für die Hilfe in der Ausarbeitung dieses Manuskripts meinen herzlichen Dank aussprechen.

§ 1.

Zerlegung einer gerichteten, geschlossenen Kurve.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall der *Euklidischen Ebene.* Unter einer *stetigen, geschlossenen Kurve* verstehen wir die Menge von Punkten, deren rechtwinklige Koordinaten (x_1, x_2) den zwei folgenden Gleichungen genügen:

$$(1) \qquad x_i = x_i(t), \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \qquad (i = 1, 2),$$

wobei $x_i(t)$ reelle, stetige Funktionen der reellen Veränderlichen t bedeuten und $x_i(0) = x_i(1)$ sind. Wir betrachten hier aber nur solche stetigen, geschlossenen Kurven, die *stückweise stetig gekrümmt sind und höchstens endlich viele mehrfache Punkte von höchstens endlicher Ordnung haben.* Einen *mehrfachen Punkt* kann man sich immer aus mehreren Doppelpunkten zusammengesetzt denken. Unter einem *Doppelpunkt* verstehen wir hier einen Punkt, in dem die betrachtete Kurve sich selbst schneidet; ein Stützpunkt wird also nicht als Doppelpunkt, sondern als zwei einfache Punkte angesehen[5]).

Hat eine stetige geschlossene Kurve einen festen Umlaufssinn, so nennen wir sie eine *gerichtete, stetige, geschlossene Kurve.* Die Summe von endlich vielen gerichteten, stetigen, geschlossenen Kurven nennen wir eine *gerichtete, geschlossene Kurve.*

Es ist nun wohlbekannt, daß jede gerichtete, stetige, geschlossene Kurve sich in eine Summe von endlich vielen gerichteten, einfachen geschlossenen Kurven zerlegen läßt, so daß jedes einfache Kurvenstück der gegebenen Kurve vor und nach der Zerlegung denselben Umlaufssinn hat. Dabei heißt eine geschlossene Kurve (oder auch ein Kurvenstück) *einfach,* wenn sie (oder es) keinen mehrfachen Punkt im oben erklärten Sinne hat. Da eine gerichtete, geschlossene Kurve die Summe von endlich vielen gerichteten, stetigen, geschlossenen Kurven ist, so läßt sich auch eine gerichtete, geschlossene Kurve ebenso zerlegen.

---

[5]) Ein mehrfacher Punkt im gewöhnlichen Sinne kann also gelegentlich hier auftreten als mehrere einfache Punkte, oder mehrere mehrfache Punkte.

§ 2.

Gesamtkrümmung.

Die Gesamtkrümmung $K(\mathfrak{R})$ einer gerichteten, stetigen, geschlossenen Kurve $\mathfrak{R}$ ist das Kurvenintegral der Krümmung $\varkappa$ der Kurve:

$$K(\mathfrak{R}) = \int_{\mathfrak{R}} \varkappa \dot{s}. \tag{2}$$

Hat die Kurve $\mathfrak{R}$ Ecken, muß man an jeder Ecke die „Außenwinkel" mitrechnen. Einen solchen Außenwinkel wollen wir später einfachheitshalber mit *Knickwinkel* bezeichnen. Ein Knickwinkel ist stets dem Betrag nach $\leqq \pi$.

Ist andererseits $\mathfrak{R}$ eine gerichtete, geschlossene Kurve, die aus den gerichteten, stetigen, geschlossenen Kurven $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^2, \ldots, \mathfrak{R}^r$ besteht:

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{R}^i \tag{3}$$

und ist $K(\mathfrak{R}^i)\,(i = 1, 2, \ldots, r)$ die Gesamtkrümmung der Kurve $\mathfrak{R}^i$, so definiert man die Summe

$$K = K(\mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^{r} K(\mathfrak{R}^i) \tag{4}$$

als die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{R}$. Ist

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i \tag{5}$$

eine beliebige Zerlegung der Kurve $\mathfrak{R}$, so daß $\mathfrak{C}^i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine gerichtete, einfache, geschlossene Kurve ist, und ist $K^i = K(\mathfrak{C}^i)$ die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{C}^i$, so behaupten wir jetzt

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} K^i}. \tag{6}$$

Diese Behauptung stammt mit der Definition (4) der Gesamtkrümmung überein, wenn die Kurven $\mathfrak{R}^i\,(i = 1, 2, \ldots, r)$ alle einfach sind.

Bevor wir die Relation (5) beweisen, müssen wir noch eine Bemerkung machen. Es sei A ein Punkt in der Ebene, durch den die Kurve $\mathfrak{R}$ genau zweimal hindurchgeht. Die Kurve $\mathfrak{R}$ hat in A entweder einen Doppelpunkt oder zwei einfache Punkte, je nachdem A ein Schnittpunkt oder ein Stützpunkt von $\mathfrak{R}$ ist. Jedenfalls enthält eine kleine Umgebung von A zwei gerichtete, stetige Kurvenstücke $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ von $\mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{W}_i'$ der Teil von $\mathfrak{W}_i$ vor dem Punkt A und $\mathfrak{W}_i''$ der Teil nach A $(i = 1, 2)$. Man bezeichnet mit φ_1 bzw. φ_2 den Knickwinkel des gerichteten Kurvenstückes $\mathfrak{W}_1$ bzw. $\mathfrak{W}_2$ in A und ψ_1 bzw. ψ_2 den Knickwinkel des gerichteten Kurvenstückes $\mathfrak{W}_1' + \mathfrak{W}_2''$ bzw. $\mathfrak{W}_2' + \mathfrak{W}_1''$. Wir möchten nun zeigen,

daß *dann und nur dann* $\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2$, *wenn die zwei Paare* $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_2'$ *und* $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ *sich nicht* trennen. (Siehe Fig. 1).

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem $\mathfrak{W}_1'$ und $\mathfrak{W}_1''$ horizontal und $\mathfrak{W}_2'$ und $\mathfrak{W}_2''$ vertikal sind. Dann ist

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \psi_1 = -\psi_2 = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Die Gleichung

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2 \tag{8}$$

ist also erfüllt. Sie bleibt offenbar richtig, wenn man z. B. $\mathfrak{W}_1'$ und $\mathfrak{W}_2'$ vertauscht. Man sieht aber leicht, daß sie auch richtig bleibt, wenn man die vier betrachteten Kurvenstücke um A beliebig, aber so dreht, daß die Tangente jedes Kurvenstückes die andere nicht überschreitet. Die Gleichung (8) gilt somit in jedem Falle, bei dem $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_2'$ und $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ sich nicht trennen.

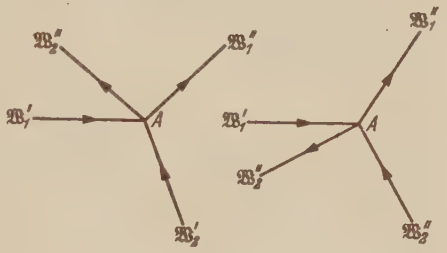


Fig. 1.

Wir behandeln jetzt den Fall, daß $\mathfrak{W}_1'$ und $\mathfrak{W}_2'$ horizontal und $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ vertikal sind. Wir haben hier

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \psi_1 = \psi_2 = \mp\frac{\pi}{2}; \tag{9}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2 \pm 2\pi.$$

Drehen wir die vier Kurvenstücke um A, so sehen wir, daß die Gleichung (8) nicht erfüllt ist, wenn $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_2'$ und $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ sich trennen.

Nun wollen wir die Relation (6) beweisen. Es genügt zu zeigen, daß bei den mehrfachen Punkten von $\mathfrak{R}$ durch die Zerlegung in einfache Bögen sich für die Gesamtkrümmung kein neuer Beitrag ergibt. Dies gilt offenbar bei einem Doppelpunkt. Denn wenn die Kurvenstücke $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ in der obigen Betrachtung sich schneiden, trennen sich die zwei Paare $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_2'$ und $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ nicht und daher ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2$. Da man jeden mehrfachen Punkt als Vereinigung mehrerer Doppelpunkte ansehen kann, so gilt das auch für jeden mehrfachen Punkt.

§ 3.

Charakteristik, Flächeninhalt und Zusammenhangszahl.

Man betrachtet eine stetige, gerichtete und geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$ und einen Punkt $\mathfrak{x}$ in der Ebene. Wenn ein Punkt $\mathfrak{y}$ einmal die Kurve $\mathfrak{R}$ durchläuft, so dreht sich die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ um einen Winkel $2\pi k$ um $\mathfrak{x}$. Die ganze Zahl k ist eine Funktion k ($\mathfrak{R}$; $\mathfrak{x}$) der Kurve $\mathfrak{R}$ und des Punktes $\mathfrak{x}$. Man nennt k die *Charakteristik* der Kurve $\mathfrak{R}$ bezüglich des

Punktes $\mathfrak{x}$. Sind $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^2, \ldots, \mathfrak{R}^r$ stetige, gerichtete und geschlossene Kurven, die zusammen eine Kurve $\mathfrak{R}$ bilden, dann nennt man die Summe

$$k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{r} k(\mathfrak{R}^i; \mathfrak{x}) \tag{10}$$

die *Charakteristik* von $\mathfrak{R}$.

Als *Flächeninhalt des „von $\mathfrak{R}$ umschlossenen Gebietes $\mathfrak{R}$"* definieren wir folgendes Integral[6])

$$\boxed{F = F(\mathfrak{R}) = \int k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})\, \dot{\mathfrak{x}}} \tag{11}$$

erstreckt über die ganze Ebene. Hierbei bedeutet $\dot{\mathfrak{x}}$ die Punktdichte des Punktes $\mathfrak{x}$. (Siehe Fußnote [2]).)

Es sei (5) eine Zerlegung der Kurve $\mathfrak{R}$, und A^i der positiv genommene Flächeninhalt der von den $\mathfrak{C}^i (i = 1, 2, \ldots, n)$ umschlossenen endlichen Gebiete $\mathfrak{R}_i$. Es wird nun behauptet, daß

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{n} \eta^i A^i}, \tag{12}$$

wobei $\eta^i = +1$ oder -1, je nachdem das Gebiet $\mathfrak{R}^i$ links oder rechts von $\mathfrak{C}^i$ liegt, d. h., je nachdem die Kurve $\mathfrak{C}^i$ einen positiven oder einen negativen Umlaufssinn hat. In der Tat, ist $k(\mathfrak{C}^i; \mathfrak{x})$ die Charakteristik der Kurven $\mathfrak{C}^i$, so folgt aus (10), (11)

$$F(\mathfrak{R}) = \int \sum_{i=1}^{n} k(\mathfrak{C}^i; \mathfrak{x})\, \dot{\mathfrak{x}} = \sum_{i=1}^{n} \int k(\mathfrak{C}^i; \mathfrak{x})\, \dot{\mathfrak{x}} = \sum_{i=1}^{n} F(\mathfrak{C}^i), \tag{13}$$

wobei $F(\mathfrak{C}^i)$ *nach der Definition* (11) den Flächeninhalt der von $\mathfrak{C}^i$ umschlossenen Gebiete bedeutet. Nun ist aber $k(\mathfrak{C}^i; \mathfrak{x}) = \eta^i$, wenn $\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}^i$, und sonst $= 0$. Man hat also

$$F(\mathfrak{C}^i) = \eta^i A^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt (12).

Endlich sei p bzw. q die Anzahl der positiv bzw. negativ durchlaufenen Kurven $\mathfrak{C}^i$; dann nennt man

$$N = N(\mathfrak{R}) = p - q \tag{15}$$

die *Zusammenhangszahl* von $\mathfrak{R}$. Ihre Unabhängigkeit von der Zerlegung ist leicht einzusehen. Ist die Gesamtkrümmung der einfachen, geschlossenen Kurven $\mathfrak{C}^i$ nämlich $K(\mathfrak{C}^i) = K^i$, so hat man offenbar

$$K^i = 2\pi\eta^i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

---

[6]) Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Kurvenintegral $\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{R}} x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1$.

Wegen der Additivität der Gesamtkrümmung

$$K = K(\mathfrak{R}) = K\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} K(\mathfrak{C}^i) = \sum_{i=1}^{n} K^i \tag{17}$$

und der offenbar richtigen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \eta^i = N \tag{18}$$

folgt

$$\boxed{K = 2\pi N}. \tag{19}$$

Da K von der Zerlegung unabhängig ist, ist N auch zerlegungsinvariant.

§ 4.

Kanonische Zerlegung und Umfang.

Von hier an setzen wir voraus, daß unsere gerichtete und geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$ den folgenden Bedingungen genügt:

(A_1) $\mathfrak{R}$ *soll sich nirgends so stützen, daß* $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_2'$ *und* $\mathfrak{W}_1''$, $\mathfrak{W}_2''$ [7]) *sich trennen* und

(A_2) $\mathfrak{R}$ *soll kein Kurvenstück enthalten, das mehrmals in verschiedenen Richtungen durchlaufen wird.*

Wir wollen nun eine bestimmte Zerlegung einer gegebenen gerichteten, geschlossenen Kurve $\mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften (A_1) und (A_2) erklären, die man als die *Kanonische Zerlegung* der Kurve bezeichnen kann.

Die Kurve $\mathfrak{R}$ zerlegt die ganze Ebene in eine gewisse Anzahl von zusammenhängenden Gebieten $\mathfrak{B}^\nu$. In jedem dieser Gebiete ist die Charakteristik $k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})$ konstant. Es sei $M = \operatorname{Max}\{k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})\}$ und $-m = \operatorname{Min}\{k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})\}$; dann ist $-m \leqq 0 \leqq M$. Nehmen wir den allgemeinen Fall $M \neq 0$, $m \neq 0$, so zerfallen die Gebiete $\mathfrak{B}^\nu$ in höchstens $M + m + 1$ Klassen mit den Charakteristiken M, $M-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -m$ (siehe Fig. 2). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}^i$ $(i \neq 0, -m \leqq i \leqq M)$ die Menge der Punkte $\mathfrak{x}$ mit $k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) = i$, so ist $\mathfrak{G}^i$ die Summe einer gewissen Anzahl von $\mathfrak{B}^\nu$. Nach der Definition von M ist $\mathfrak{G}^M$ sicher nicht leer[8]), und die gerichteten Kurvenstücke, die zu dem Rand von $\mathfrak{G}^M$ gehören, bilden zusammen eine Anzahl von gerichteten, einfachen und geschlossenen Kurven. Bezeichnen wir die Summe dieser Kurven mit $\mathfrak{S}^M$, so kann man schreiben: $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^M + \mathfrak{R}^1$,

---

[7]) Nach der Bezeichnung in § 2.

[8]) Wenn $\mathfrak{R}$ keine mehrmals durchlaufene, geschlossene Teilkurve hat, so sieht man leicht, daß kein $\mathfrak{G}^i$ leer ist.

wo $\mathfrak{R}^1$ eine gerichtete geschlossene Kurve ist, deren Charakteristik $k(\mathfrak{R}^1; \mathfrak{x})$ die folgenden Eigenschaften hat:

$$k(\mathfrak{R}^1; \mathfrak{x}) = \begin{cases} k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) - 1 = M - 1, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \mathfrak{G}^M, \\ k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{20}$$

Im Falle $M > 1$, haben wir $k(\mathfrak{R}^1; \mathfrak{x}) = M - 1$, wenn $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}^M + \mathfrak{G}^{M-1}$, und die gerichtete Randkurve $\mathfrak{S}^{M-1}$ von $\mathfrak{G}^M + \mathfrak{G}^{M-1}$ ist wieder die

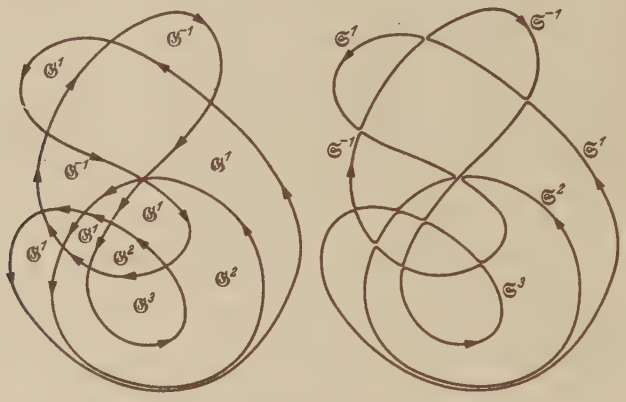


Fig. 2.

Summe einer Anzahl von gerichteten, einfachen, geschlossenen Teilkurven von $\mathfrak{R}$. Weiterhin können wir schreiben: $\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{S}^{M-1} + \mathfrak{R}^2$, wobei $\mathfrak{R}^2$ wieder eine gerichtete, geschlossene Kurve ist. So fahren wir fort bis wir die Gleichung

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{M} \mathfrak{S}^i + \mathfrak{R}^M \tag{21}$$

erhalten. Dabei bedeutet $\mathfrak{S}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ die gerichtete Randkurve von $\mathfrak{G}^i + \mathfrak{G}^{i+1} + \ldots + \mathfrak{G}^M$, die eine Summe von gerichteten, einfachen und geschlossenen Kurven ist. $\mathfrak{R}^M$ ist eine gerichtete geschlossene Kurve, deren Charakteristik die folgenden Eigenschaften hat:

$$k(\mathfrak{R}^M; \mathfrak{x}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \sum_{i=1}^{M} \mathfrak{G}^i \\ k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{22}$$

Beginnen wir nun andererseits mit $\mathfrak{G}^{-m}$, so können wir schreiben

$$\mathfrak{R}^M = \sum_{i=-1}^{-m} \mathfrak{S}^i. \tag{23}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{S}^i$ $(i = -1, -2, \ldots, -m)$ die gerichtete Randkurve von $\mathfrak{G}^i + \mathfrak{G}^{i-1} + \ldots + \mathfrak{G}^{-m}$, die eine Summe von einfachen, geschlossenen Kurven ist. Daß $\mathfrak{R}^M$ außerdem nichts enthält, folgt aus der Tatsache,

daß die Kurve $\mathfrak{K}$ wegen der Voraussetzung (A_2) keine geschlossene Teilkurven haben kann, deren Charakteristik überall Null ist.

Aus (22) und (23) ergibt sich endlich die Zerlegung von $\mathfrak{K}$, die man als die kanonische Zerlegung bezeichnet:

$$\mathfrak{K} = \sum_{i=-m}^{M} \mathfrak{S}^i. \tag{24}$$

Setzt man

$$\mathfrak{S}^+ = \sum_{i=1}^{M} \mathfrak{S}^i, \quad \mathfrak{S}^- = \sum_{i=-1}^{-m} \mathfrak{S}^i, \tag{25}$$

so kann man (24) auch in der Form

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^- \tag{26}$$

schreiben. Die Kurve $\mathfrak{S}^+$ bzw. $\mathfrak{S}^-$ besteht aus den Teilen von $\mathfrak{K}$, die Gebiete von positiver bzw. negativer Charakteristik beranden. Daß auch

$$K(\mathfrak{K}) = \sum_{i=-m}^{M} K(\mathfrak{S}^i) = K(\mathfrak{S}^+) + K(\mathfrak{S}^-) \tag{27}$$

gilt, folgt aus (A_1) und § 2.

Die besonderen Fälle $M = 0$ und $m = 0$ sind klar.

Ist L^+ bzw. L^- die positiv genommene Länge der Kurve $\mathfrak{S}^+$ bzw. $\mathfrak{S}^-$, so definieren wir die *Länge* oder den „*Umfang*" U der Kurve $\mathfrak{K}$ durch die Gleichung

$$\boxed{U = L^+ - L^-}. \tag{28}$$

Zwei gerichtete, geschlossene Kurven sollen *äquivalent* heißen, wenn sie dieselbe kanonische Zerlegung haben. Äquivalente Kurven haben offenbar dieselbe Charakteristik und Gesamtkrümmung, und also dieselbe Zusammenhangszahl, denselben Flächeninhalt und Umfang. Wenn zwei Kurven, die die Bedingungen (A_1) und (A_2), erfüllen und bezüglich jedes Punktes dieselbe Charakteristik haben, so haben sie nach dem oben erklärten Verfahren dieselbe kanonische Zerlegung und sind also äquivalent.

§ 5.

Durchschnitt.

Ist $\mathfrak{K}$ eine gerichtete, geschlossene Kurve die den Bedingungen (A_1) und (A_3) in § 4 genügt, so ist sie bis auf äquivalente Kurven eindeutig bestimmt durch ihre Charakteristik $k(\mathfrak{K}; \mathfrak{x})$ und also durch die $\mathfrak{G}^i$. Man kann deshalb das von $\mathfrak{K}$ umgeschlossene Gebiet $\mathfrak{K}$ mit $\{\mathfrak{G}^i\}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{K} = \{\mathfrak{G}^i\} \qquad i \neq 0, \; -m \leqq i \leqq M. \tag{29}$$

Sind $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\mathfrak{R}_1$ zwei gerichtete, geschlossene Kurven, mit den Charakteristiken $k(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{x})$ bzw. $k(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{x})$, die den Bedingungen (A_1) und (A_2) in § 4 genügen und endlich viele Treffpunkte[9]) haben, und sind

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_0 = \{\mathfrak{G}_0^i\}, & i \neq 0, \ -m_0 \leqq i \leqq M_0, \\ \mathfrak{R}_1 = \{\mathfrak{G}_1^i\}, & i \neq 0, \ -m_1 \leqq i \leqq M_1 \end{cases}$$

die zugehörigen Gebiete, so definiert man als den Durchschnitt $\mathfrak{R}_{01} = \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ das Gebiet

$$(31) \qquad \mathfrak{R}_{01} = \{\mathfrak{G}_{01}^i\}, \quad i \neq 0, \ -m_{01} \leqq i \leqq M_{01}$$

wobei $\mathfrak{G}_{01}^i$ die Menge der Punkte $\mathfrak{x}$ mit $k(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{x}) \cdot k(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{x}) = i$ bedeutet. Diese Menge ist offenbar die Summe einer gewissen Anzahl von zusammenhängenden Gebieten; sie kann auch leer sein. Man sieht auch sofort, daß

$$(32) \qquad \begin{aligned} M_{01} &= \operatorname{Max}\{M_0 M_1;\ m_0 m_1\}, \\ -m_{01} &= \operatorname{Min}\{-m_0 M_1;\ -M_0 m_1\}. \end{aligned}$$

Nach dem in § 4 erklärten Verfahren, kann man eine gerichtete, geschlossene Kurve konstruieren, die die Randkurve von $\mathfrak{R}_{01}$ ist und die Charakteristik

$$(33) \qquad k_{01}(\mathfrak{x}) = k(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{x}) \cdot k(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{x})$$

hat. Da diese Kurve nicht notwendig die Bedingungen (A_1) und (A_2) in § 4 erfüllt, so sind zwei Kurven, die die Charakteristik $k_{01}(\mathfrak{x})$ haben, nicht notwendig äquivalent. Man sieht aber leicht, daß die Randkurve von $\mathfrak{R}_{01}$ bis auf äquivalente Kurven eindeutig bestimmt ist, wenn die Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ sich nur in einfachen Punkten treffen und nirgends stützen.

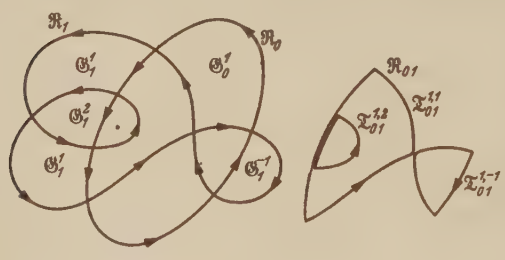


Fig. 3.

Die folgende Konstruktion (vgl. Fig. 3) einer Randkurve von $\mathfrak{R}_{01}$ wird uns helfen, die Richtigkeit der letzten Aussage einzusehen. Wir betrachten die kanonischen Zerlegungen der Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$:

$$(34) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_0 = \sum_{i=-m_0}^{M_0} \mathfrak{S}_0^i, \\ \mathfrak{R}_1 = \sum_{j=-m_1}^{M_1} \mathfrak{S}_1^j \end{cases}$$

und setzen

$$(35) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_0^i = \mathfrak{G}_0^i + \mathfrak{G}_0^{i+1} + \ldots + \mathfrak{G}_0^{M_0} & \text{für } i = 1, 2, \ldots, M_0, \\ \mathfrak{H}_0^i = \mathfrak{G}_0^i + \mathfrak{G}_0^{i-1} + \ldots + \mathfrak{G}_0^{-m_0} & \text{für } i = -1, -2, \ldots, -m_0. \end{cases}$$

[9]) Das heißt, Schnittpunkte und Stützpunkte.

Entsprechend definieren wir $\mathfrak{H}_1^j$ $(j \neq 0,\ -m_1 \leqq j \leqq M_1)$. Dann sind $\mathfrak{H}_0^i$ bzw. $\mathfrak{H}_1^j$ die von $\mathfrak{S}_0^i$ bzw. $\mathfrak{S}_1^j$ umschlossenen endlichen Gebiete. Nun definieren wir

$$\mathfrak{T}_{01}^{ij} = \eta_0^i \mathfrak{H}_0^i \cdot \mathfrak{S}_1^j + \eta_1^j \mathfrak{H}_1^j \cdot \mathfrak{S}_0^i = k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x})\, \mathfrak{S}_1^j + k(\mathfrak{S}_1^i; \mathfrak{x})\, \mathfrak{S}_0^i, \tag{36}$$

wobei $\eta_0^i = +1$ oder -1, je nachdem $i > 0$ oder < 0 und entsprechend für η_1^j. Ein Minuszeichen vor einem gerichteten Kurvenstück heißt, daß dieses Kurvenstück in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden soll. Der Ausdruck $k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x})\, \mathfrak{S}_1^j$ bezeichnet z. B. eine Anzahl von gerichteten Kurvenstücken der Kurve $\mathfrak{S}_1^j$, worin ein Kurvenstück $k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x})$-mal durchgelaufen wird, wenn es in einem Gebiet liegt, wo $k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x}) \neq 0$ ist, während die Reste von $\mathfrak{S}_1^j$ einfach weggelassen werden. Dann lassen sich die gerichteten Kurvenstücke in $\mathfrak{T}_{01}^{ij}$ nach der Voraussetzung über die relative Lage von $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ auf eine einzige Weise verknüpfen. $\mathfrak{T}_{01}^{ij}$ ist eine gerichtete, geschlossene Kurve, deren Charakteristik die Werte 0, 1 oder 0, -1 hat, je nachdem $\eta_0^i \cdot \eta_1^j > 0$ oder < 0. Die zusammengesetzte Kurve

$$\mathfrak{R}_{01} = \sum_{i,j=-m_0,-m_1}^{M_0,M_1} \mathfrak{T}_{01}^{ij} \tag{37}$$

hat die Charakteristik $k_{01}(\mathfrak{x})$; denn es ist klar, daß

$$k(\mathfrak{T}_{01}^{ij}; \mathfrak{x}) = k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x}) \cdot k(\mathfrak{S}_1^j; \mathfrak{x}), \tag{38}$$

so daß nach der Additivität von k folgt

$$k(\mathfrak{R}_{01}; \mathfrak{x}) = \sum_{i,j} k(\mathfrak{T}_{01}^{ij}; \mathfrak{x}) = \sum_i k(\mathfrak{S}_0^i; \mathfrak{x}) \cdot \sum_j k(\mathfrak{S}_1^j; \mathfrak{x}) = k(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{x}) \cdot k(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{x}). \tag{39}$$

Aus (36) folgt nun die Gleichheit

$$\mathfrak{R}_{01} = k(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{x})\, \mathfrak{R}_1 + k(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{x})\, \mathfrak{R}_0. \tag{40}$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes für $\mathfrak{R}_{01}$ sieht man leicht, daß die Kurve $\mathfrak{R}_{01}$ die Bedingungen (A_1) und (A_2) in § 4 erfüllt und die Randkurve von $\mathfrak{R}_{01}$ ist also bis auf äquivalente Kurven eindeutig bestimmt.

§ 6.

Die kinematische Hauptformel in der Euklidischen Ebene.

Sei $\mathfrak{R}_0$ eine feste gerichtete, geschlossene Kurve und $\mathfrak{R}_1$ eine bewegliche, und beide sollen die Bedingungen (A_1) und (A_2) in § 4 erfüllen. Wegen der Rektifizierbarkeit der Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ folgt, daß sie *fast immer* endlich viele Treffpunkte haben[10]). Sei K_{01} die Gesamtkrümmung einer Randkurve des Durchschnittes $\mathfrak{R}_{01}$ der von $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ umschlossenen

[10]) Mit anderen Worten, ist die Menge der Lagen von $\mathfrak{R}_1$, die $\mathfrak{R}_0$ in unendlich vielen Punkten treffen, vom Maß Null. Dies ist ein Ergebnis von W. Maak.

Gebiete $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$, dann ist K_{01} eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{R}_1$ eine *allgemeine* Lage in bezug auf $\mathfrak{R}_0$ hat (siehe § 5). Das Integral

$$\int K_{01}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 \tag{41}$$

hat also einen bestimmten Wert, und man kann

$$K_{01} = K(\mathfrak{R}_{01}) \tag{42}$$

setzen, wobei $\mathfrak{R}_{01}$ die in § 5 konstruierte Kurve bedeutet. Nach (37) und wegen der Additivität der Gesamtkrümmung folgt

$$K(\mathfrak{R}_{01}) = \sum_{i,j} K(\mathfrak{T}_{01}^{ij}). \tag{43}$$

Wir berechnen also zunächst das Integral

$$\int K_{01}^{ij}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 = \int K(\mathfrak{T}_{01}^{ij})\,\dot{\mathfrak{R}}_1. \tag{44}$$

Zu diesem Zweck bemerken wir, daß $\eta_0^i\,\mathfrak{S}_0^i$, $\eta_1^j\,\mathfrak{S}_1^j$ und $\eta_0^i\cdot\eta_1^j\,\mathfrak{T}_{01}^{ij}$ Kurven sind, deren Charakteristiken nur die Werte 0 und 1 annehmen. Es seien ferner $K_0^i = K(\mathfrak{S}_0^i)$ bzw. $F_0^i = F(\mathfrak{S}_0^i)$ bzw. $U_0^i = U(\mathfrak{S}_0^i)$ die Gesamtkrümmung bzw. der Flächeninhalt bzw. Umfang von $\mathfrak{S}_0^i$ gemäß unseren obigen Definitionen, dann sind $\eta_0^i K_0^i$, $\eta_0^i F_0^i$ und $\eta_0^i U_0^i$ die entsprechenden Größen für $\eta_0^i\,\mathfrak{S}_0^i$ und es gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} K_0 = K(\mathfrak{R}_0) = \sum_i K_0^i, \\ F_0 = F(\mathfrak{R}_0) = \sum_i F_0^i, \\ U_0 = U(\mathfrak{R}_0) = \sum_i U_0^i. \end{cases} \tag{45}$$

Analoge Bemerkungen gelten für die Kurven $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_{01}$. Nach der Formel (1°) folgt also für die Kurven $\eta_0^i\,\mathfrak{S}_0^i$ und $\eta_1^i\,\mathfrak{S}_1^j$

$$\int \eta_0^i\,\eta_1^j\,K_{01}^{ij}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi\{\eta_0^i K_0^i\cdot\eta_1^j F_1^j + \eta_0^i U_0^i\cdot\eta_1^j U_1^j + \eta_0^i F_0^i\cdot\eta_1^j K_1^j\}. \tag{46}$$

Summiert man nach i, j, so bekommt man nach (42) bis (45) und den zu (45) analogen Formeln für $\mathfrak{R}_1$ die gewünschte *kinematische Hauptformel*:

$$\boxed{\int K_{01}\,\dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi\{K_0 F_1 + U_0 U_1 + F_0 K_1\}}. \tag{47}$$

In der Herleitung unserer Formel (47) haben wir vorausgesetzt, daß die Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ den Bedingungen (A_1) und (A_2) in § 4 genügen. Daß diese Formel gültig bleibt auch für Kurven, die diesen Bedingungen nicht genügen, sieht man gleich, wenn man die betrachteten Kurven als Grenzkurven von Kurvenfolgen ansieht, die aus lauter Kurven mit den Eigenschaften (A_1) und (A_2) in § 4 bestehen.

Setzt man

$$K_0 = 2\pi N_0, \quad K_1 = 2\pi N_1, \quad K_{01} = 2\pi N_{01}, \tag{48}$$

so daß N_0 bzw. N_1 bzw. N_{01} nach (19) die Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_{01}$ bedeuten, so kann man die Hauptformel auch in der Form

$$\boxed{\int N_{01}\,\dot{\mathfrak{R}}_0 = 2\pi(N_0 F_1 + F_0 N_1) + U_0 U_1} \tag{49}$$

schreiben.

§ 7.

Die kinematische Hauptformel in der sphärischen Geometrie.

Nun betrachten wir Kurven auf einer Einheitskugel. Ist $\mathfrak{C}$ eine gerichtete, einfache, geschlossene Kurve, so zerlegt $\mathfrak{C}$ die ganze Kugel in ein links von $\mathfrak{C}$ liegendes Gebiet $\mathfrak{B}_l$ und ein rechts von $\mathfrak{C}$ liegendes $\mathfrak{B}_r$. Die beiden Gebiete sind zusammenhängend, wenn $\mathfrak{C}$ sich nicht stützt. Man kann die Charakteristik $k(\mathfrak{C}; \mathfrak{x})$ von $\mathfrak{C}$ in zwei verschiedenen Weisen definieren:

$$\text{I.}\quad k(\mathfrak{C}; \mathfrak{x}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_l, \\ 0, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_r; \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad k(\mathfrak{C}; \mathfrak{x}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_l, \\ -1, & \text{wenn } \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_r. \end{cases}$$

Eine beliebige, gerichtete, geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$ kann man wie in der Ebene in eine Summe von gerichteten, einfachen, geschlossenen Kurven zerlegen: $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i$, so daß man für die Gesamtkrümmung[11]) erhält: $K(\mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^{n} K(\mathfrak{C}^i)$. Die Charakteristik von $\mathfrak{R}$ definieren wir als

$$k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} k(\mathfrak{C}^i; \mathfrak{x}). \tag{50}$$

Die zwei Definitionen für die Charakteristik einer Kurve, nämlich I und (50) bzw. II und (50) liefern verschiedene Hauptformeln, die wir einzeln betrachten müssen.

Zunächst nehmen wir die Definition I und (50). Dann ist $k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})$ nie negativ. Der Flächeninhalt

$$F = F(\mathfrak{R}) = \int k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x})\,\dot{\mathfrak{x}} \tag{51}$$

des von $\mathfrak{R}$ umschlossenen Gebietes $\mathfrak{R}$ hat keinen negativen Bestandteil und zwar ist

$$F(\mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^{n} F(\mathfrak{C}^i) = \sum_{i=1}^{n} F^i, \tag{52}$$

---

[11]) Unter der Gesamtkrümmung einer gerichteten Kurve $\mathfrak{R}$ auf der Kugel verstehen wir das Integral der geodätischen Krümmung längs $\mathfrak{R}$.

wobei

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i \tag{53}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ist

$$K^i = K(\mathfrak{C}^i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{54}$$

die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{C}^i$, so gilt nach der Formel von Gauß und Bonnet

$$K^i + F^i = 2\pi, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{55}$$

Summiert man die Gleichungen (55) nach i, so erhält man

$$\boxed{K + F = 2\pi n}, \tag{56}$$

wobei K die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Die natürliche Zahl n, d. h. die Anzahl von gerichteten, einfachen und geschlossenen Kurven, in die die Kurve $\mathfrak{R}$ sich zerlegen läßt, ist also eine Zerlegungsinvariante der Kurve $\mathfrak{R}$. Man kann sie *Zusammenhangszahl* nennen und mit N bezeichnen [12]).

Genau wie im Euklidischen Falle kann man den Durchschnitt $\mathfrak{K}_{01}$ zweier Gebiete $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ definieren. Weiterhin wie in § 5, aber nicht notwendig mit der *kanonischen* Zerlegung der Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$, kann man die Randkurve $\mathfrak{R}_{01}$ von $\mathfrak{K}_{01}$ konstruieren. Wir erhalten hier als *kinematische Hauptformel* wieder die Formel

$$\int K_{01}\, \mathfrak{R}_1 = 2\pi \{K_0 F_1 + U_0 U_1 + F_0 K_1\}, \tag{57}$$

worin die Umfänge U_0, U_1 der Kurven $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$ auch keine negativen Bestandteile mehr enthalten.

Unter Berücksichtigung der aus (2°) leicht herzuleitenden Formel

$$\int F_{01}\, \dot{\mathfrak{R}}_1 = 2\pi F_0 F_1, \tag{58}$$

erhalten wir statt (49) aus (56) und (57) die folgende Formel für das Integral über die Zusammenhangszahl N_{01} der Randkurve des Durchschnittes $\mathfrak{K}_{01}$:

$$\boxed{\int N_0, \dot{\mathfrak{R}}_1 = 4\pi^2 N_0 N_1 + K_0 K_1 + U_0 U_1}. \tag{59}$$

---

[12]) Inzwischen bemerken wir, daß die Anzahl n von gerichteten (positiv und negativ umlaufenen), einfachen geschlossenen Kurven, in die eine gegebene gerichtete, geschlossene Kurve $\mathfrak{R}$ in der *Euklidischen Ebene* zerfällt, auch von der Zerlegung unabhängig ist. Denn die Kurve $\mathfrak{R}$ wird durch stereographische Projektion in eine gerichtete, geschlossene Kurve $\mathfrak{R}'$ auf der Kugel projiziert, und jeder Zerlegung von $\mathfrak{R}$ entspricht eine von $\mathfrak{R}'$ und umgekehrt. Es folgt daraus weiter, daß die Anzahl p bzw. q in (15) von positiv bzw. negativ umlaufenen, gerichteten, einfachen und geschlossenen Kurven in der Zerlegung von $\mathfrak{R}$ auch von der Art, der Zerlegung unabhängig ist.

§ 8.

Die kinematische Hauptformel in der sphärischen Geometrie.

(Fortsetzung.)

Nimmt man die Definition II und (50) für die Charakteristik einer gerichteten, geschlossenen Kurve, so erhält man einen neuen Ausdruck für das Integral $\int K_{01}\dot{\mathfrak{R}}_1$. Es ist zu beachten, daß man mit denselben zwei Kurven $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ hier einen ganz anderen Durchschnitt $\mathfrak{K}_{01}$ als in § 7 und also einen verschiedenen Wert für K_{01} bekommt.

Nehmen wir zunächst eine gerichtete, einfache, geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ auf der Kugel, die die Kugel in das linksliegende Gebiet $\mathfrak{B}_l$ und das rechtsliegende Gebiet $\mathfrak{B}_r$ zerlegt. Ist $K(\mathfrak{C})$ die Gesamtkrümmung der Kurve $\mathfrak{C}$ und A_l bzw. A_r der positiv zu nehmende Flächeninhalt des Gebietes $\mathfrak{B}_l$ bzw. $\mathfrak{B}_r$, so hat man nach der Formel von Gauß und Bonnet

$$\begin{cases} K(\mathfrak{C}) + A_l = 2\pi, \\ -K(\mathfrak{C}) + A_r = 2\pi. \end{cases} \tag{60}$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$2K(\mathfrak{C}) + F(\mathfrak{C}) = 0, \tag{61}$$

wobei

$$F(\mathfrak{C}) = A_l - A_r = \int k(\mathfrak{C}; \mathfrak{x})\dot{\mathfrak{x}}, \tag{62}$$

nach unserer Definition in § 3 den Flächeninhalt des von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Gebietes $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{B}_l, \mathfrak{B}_r\}$ bedeutet.

Ist $\mathfrak{R}$ irgendeine gerichtete, geschlossene Kurve, die das Gebiet $\mathfrak{K}$ umschließt, und ist

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i \tag{63}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$, so haben wir

$$2K(\mathfrak{C}^i) + F(\mathfrak{C}^i) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{64}$$

und durch Addition nach i ergibt sich

$$\boxed{2K(\mathfrak{R}) + F(\mathfrak{R}) = 0}. \tag{65}$$

Nun nehmen wir zwei gerichtete, einfache, geschlossene Kurven $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$! Es seien $\mathfrak{K}_0 = \{\mathfrak{B}_{l0}, \mathfrak{B}_{r0}\}$ und $\mathfrak{K}_1 = \{\mathfrak{B}_{l1}, \mathfrak{B}_{r1}\}$ die von $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ umschlossenen Gebiete. Entsprechend der Definition in § 5 des Durchschnittes, nehmen wir jetzt als den Durchschnitt von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$

$$\mathfrak{K}_{01} = \{\mathfrak{B}_{l01}, \mathfrak{B}_{r01}\}, \tag{66}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{l01} &= \mathfrak{B}_{l0} \cdot \mathfrak{B}_{l1} + \mathfrak{B}_{r0} \cdot \mathfrak{B}_{r1}, \\ \mathfrak{B}_{r01} &= \mathfrak{B}_{l0} \cdot \mathfrak{B}_{r1} + \mathfrak{B}_{r0} \cdot \mathfrak{B}_{l1}. \end{aligned} \tag{67}$$

Der Flächeninhalt des Durchschnittes ist offenbar

$$F_{01} = A_{l01} - A_{r01}, \tag{68}$$

wobei A_{l01} bzw. A_{r01} den positiv genommenen Flächeninhalt des Gebietes $\mathfrak{B}_{l01}$ bzw. $\mathfrak{B}_{r01}$ bedeutet. Da F_{01} durch $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ eindeutig bestimmt ist, ist nach (65) die Randkurve von $\mathfrak{K}_{01}$ bis auf Kurven mit gleicher Gesamtkrümmung auch durch $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ eindeutig bestimmt.

Fig. 4 zeigt, wie man eine Randkurve von $\mathfrak{K}_{01}$ konstruieren kann. In diesem Falle sind die beiden Gebiete $\mathfrak{B}_{l0} \cdot \mathfrak{B}_{l1}$ und $\mathfrak{B}_{r0} \cdot \mathfrak{B}_{r1}$ zusammenhängend und in der Figur unschraffiert. Ist $ABCD$ die gerichtete Randkurve *im gewöhnlichen Sinne* des Gebietes $\mathfrak{B}_{l0} \cdot \mathfrak{B}_{l1}$ und $AB'C'D'$ die entsprechende des Gebietes $\mathfrak{B}_{r0} \cdot \mathfrak{B}_{r1}$, so kann man als Randkurve $\mathfrak{R}_{01}$ des Gebietes $\mathfrak{K}_{01}$ die gerichtete Kurve $ABCDAD'C'B'A$ nehmen. Diese Kurve ist einfach geschlossen nach unserer Definition in § 1, stützt sich aber in den Punkten A, B, C, D. Die zusammengesetzte Kurve $ABCDA + AD'C'B'A$ ist offenbar keine Randkurve von $\mathfrak{K}_{01}$. Ist nämlich $k(\mathfrak{R}_{01}; x)$ die Charakteristik von $\mathfrak{R}_{01}$, so hat die letztere Kurve die Charakteristik $k(\mathfrak{R}_{01}; x) - 1$.

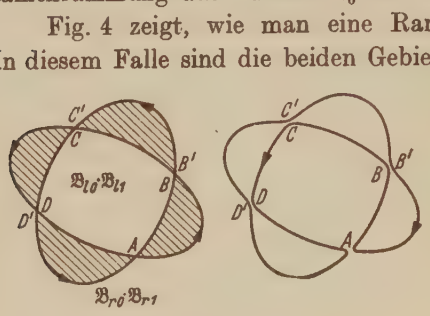


Fig. 4.

Sei A'_{l01} bzw. A''_{l01} der positiv genommene Flächeninhalt des Gebietes $\mathfrak{B}_{l0} \cdot \mathfrak{B}_{l1}$ bzw. $\mathfrak{B}_{r0} \cdot \mathfrak{B}_{r1}$. Aus (2^0) folgt erstens

$$\int A'_{l01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = 2\pi A_{l0} A_{l1} \tag{69}$$

und zweitens, wenn man die Kurven $-\mathfrak{C}_0$ und $-\mathfrak{C}_1$ betrachtet,

$$\int A''_{l01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = 2\pi A_{r0} A_{r1}. \tag{70}$$

Da $A_{l01} = A'_{l01} + A''_{l01}$ ist, folgt aus (69) und (70)

$$\int A_{l01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = 2\pi (A_{l0} A_{l1} + A_{r0} A_{r1}). \tag{71}$$

Bezeichnet man mit K_0 bzw. K_1 die Gesamtkrümmung der Kurve $\mathfrak{C}_0$ bzw. $\mathfrak{C}_1$, so haben wir nach (60) und (61)

$$\begin{cases} A_{l0} = 2\pi - \frac{1}{2} F_0, & A_{r0} = 2\pi + \frac{1}{2} F_0, \\ A_{l1} = 2\pi - \frac{1}{2} F_1, & A_{r1} = 2\pi + \frac{1}{2} F_1, \end{cases} \tag{72}$$

daraus folgt

$$\int A_{l01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = \pi (16\pi^2 + F_0 F_1). \tag{73}$$

Andererseits erhält man ähnlich, wenn man etwa die Kurven $\mathfrak{C}_0$ und $-\mathfrak{C}_1$ betrachtet:

$$\int A_{r01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = \pi (16\pi^2 - F_0 F_1). \tag{74}$$

Aus (68), (73) und (74) folgt

$$\int F_{01}\dot{\mathfrak{C}}_1 = 2\pi F_0 F_1, \tag{75}$$

analog zu (2°). Ist K_{01} die Gesamtkrümmung der Kurve $\mathfrak{K}_{01}$, so folgt aus (61)

$$\int K_{01}\dot{\mathfrak{C}}_1 = -4\pi K_0 K_1. \tag{76}$$

Die Formeln (75) und (76) gelten auch für zwei beliebige gerichtete, geschlossene Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$. Um diese Aussage zu beweisen, braucht man nur $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ je in die Summe von gerichteten, einfachen, geschlossenen Kurven zu zerlegen:

$$\mathfrak{K}_0 = \sum_{i=1}^{n_0} \mathfrak{C}_0^i, \quad \mathfrak{K}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} \mathfrak{C}_1^j. \tag{77}$$

Dann wendet man die Formeln (75) und (76) auf jedes Paar $\mathfrak{C}_0^i\ \mathfrak{C}_1^j$ an und addiert. Man erhält damit die beiden Formeln

$$\boxed{\int F_{01}\dot{\mathfrak{K}}_1 = 2\pi F_0 F_1} \tag{78}$$

und

$$\boxed{\int K_{01}\dot{\mathfrak{K}}_1 = -4\pi K_0 K_1}. \tag{79}$$

(Eingegangen am 27. März 1937.)

Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe V.

Ein Strahlenkomplex und seine Normalenkomplexe.

Von

Wolfgang Haack in Berlin-Charlottenburg.

Der Strahlenkomplex $(\mathfrak{A})$ möge sich in der Umgebung des Strahles $\mathfrak{A}$ regulär verhalten. Dann ist jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ die Spitze eines Kegels, dessen Erzeugenden dem Komplex $(\mathfrak{A})$ angehören. Dem uneigentlichen Punkt entspricht der durch $\mathfrak{A}$ gehende Zylinder von $(\mathfrak{A})$. Der Komplexkegel, dessen Spitze im Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$ liegt, schneidet den Zylinder senkrecht. Die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ des Komplexes in $\mathfrak{A}$ ist die zu $\mathfrak{A}$ senkrechte Tangente an den Zylinder im Punkt $\mathfrak{x}$. Die Binormale $\mathfrak{B}$ des Komplexes in $\mathfrak{A}$ schneidet $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht. Mit einem Komplex $(\mathfrak{A})$ sind daher zwei Komplexe, der Hauptnormalenkomplex $(\mathfrak{H})$ und der Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$, verbunden. Schon in der ersten Arbeit über Strahlenkomplexe[1]) ergab sich, daß die Komplexe $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{H})$ in gegenseitiger Involution liegen, der eine ist der Hauptnormalenkomplex des anderen; beide haben die einzige Invariante I. Ordnung, den Hauptdrall k, und den Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$ gemeinsam. Diese merkwürdige Eigenschaft veranlaßte mich zur Untersuchung der geometrischen Beziehungen, die zwischen den drei Komplexen $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{B})$ bestehen. Die in den einzelnen Paragraphen behandelten Gegenstände hängen nur lose miteinander zusammen.

Im § 1 wird gezeigt, daß nicht nur die beiden Komplexe $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{H})$, sondern ∞^2 verschiedene Komplexe den Hauptdrall k und den Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$ gemeinsam haben. Es gilt der Satz: Nimmt man mit allen Strahlen eines regulären Komplexes $(\mathfrak{A})$ eine konstante Verschraubung um die zugehörigen Binormalen vor, so bleibt der Hauptdrall k und der Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$ ungeändert. Die naheliegende Frage, ob es außer diesen ∞^2 Komplexen noch andere gibt, die denselben Hauptdrall und Binormalenkomplex besitzen, konnte nur für die im letzten Paragraphen behandelte Klasse von Komplexen beantwortet werden.

[1]) Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 560—581; im folgenden zitiert durch I.

Im § 2 werden die drei Linearformen, der Hauptdrall und das begleitende Dreibein des Komplexes (𝔅) berechnet. Die Anregung zu den Untersuchungen des § 3 bildet die Tatsache, daß der Binormalenkomplex (𝔅) eines linearen Komplexes in ein Strahlensystem entartet, dessen Strahlen die Achse des linearen Komplexes senkrecht schneiden. Es werden alle Komplexe (𝔄) bestimmt, deren (𝔅) in ein Strahlensystem entartet; dabei zeigt sich, daß nur zwei spezielle Klassen von Strahlensystemen als Entartung von (𝔅) in Betracht kommen, entweder ein zylindrisches Strahlensystem, dessen Strahlen die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten eines festen Zylinders sind, oder ein Strahlensystem mit konstantem mittleren Drall. Die zur letzten Klasse gehörigen Komplexe (𝔄) besitzen konstanten Hauptdrall k. Da k die einzige Invariante erster Ordnung ist, sind diese Komplexe für den Aufbau der Differentialgeometrie von besonderer Bedeutung.

Für die spätere Anwendung werden im § 4 die Invarianten zweiter Ordnung von (𝔊) berechnet. Im § 5 werden alle (regulären) Strahlenkomplexe bestimmt, deren begleitendes Dreibein gegen das ihres Binormalenkomplexes (𝔅) konstant verschraubt ist. Diese Komplexe besitzen mit (𝔅) den gleichen Hauptdrall. Sie lassen sich konstruktiv erzeugen mittels einer Kongruenz von Kreisen mit festem Radius. Die Ebenen der Kreise umhüllen eine Minimalfläche.

Im § 6 wird schließlich eine Konstruktion derjenigen Komplexe (𝔄) entwickelt, deren (𝔅) ein zylindrisches Strahlensystem ist. Diese Komplexe lassen sich auch durch die folgende Eigenschaft kennzeichnen: Auf einem Komplexstrahl gibt es im allgemeinen vier Punkte, deren Komplexkegel 𝔄 als Wendeerzeugende besitzen. Von diesen vier Punkten fallen zwei in dem uneigentlichen Punkt von 𝔄 zusammen, während die beiden anderen zum Zentralpunkt symmetrisch liegen.

Ableitungsgleichungen eines Komplexes. Die folgenden Untersuchungen werden auf die in I abgeleiteten Formeln aufgebaut, von denen hier die wichtigsten zusammengestellt seien. Eine Gerade wird dargestellt durch einen dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}}.$$

Sind die Komponenten von 𝔄 Funktionen dreier Parameter u^1, u^2, u^3, so beschreibt 𝔄 einen Komplex, dessen geometrische Eigenschaften durch die duale quadratische Differentialform

$$(1) \qquad (d\,\mathfrak{A}\; d\,\mathfrak{A}) = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial u^i}\,\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial u^k}\right) d\,u^i\, d\,u^k$$

bestimmt sind. Aus dieser Form wurden in I, § 1 und 2 der Hauptdrall k und drei Linearformen gewonnen, die zur Definition invarianter

Ableitungen dienten. Das System invarianter Ableitungen, bezogen auf das Dreibein $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ ist

$$(2)\qquad \begin{array}{|l|l|l|} \hline \mathfrak{A}_1 = \varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} & \mathfrak{H}_1 = -A\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_1 = -\varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + A\mathfrak{H} \\ \mathfrak{A}_2 = (1+\varepsilon k)\mathfrak{H} & \mathfrak{H}_2 = -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} - B\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_2 = B\mathfrak{H} \\ \mathfrak{A}_3 = (1+\varepsilon k)\mathfrak{B} & \mathfrak{H}_3 = -C\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_3 = -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} + C\mathfrak{H} \\ \hline \end{array}$$

Hier hängen A, B, C mit den vier Hauptinvarianten k, p, q, r durch die Gleichungen

$$(3)\qquad A = -q - \varepsilon\tfrac{1}{2}p; \quad B = 2k_1 + \varepsilon k_3; \quad C = -p + \varepsilon(\tfrac{1}{2}r - k_2)$$

zusammen. Zwischen den zweiten invarianten Ableitungen einer Größe S bestehen die Relationen [I, § 3, (9a)]

$$(4)\qquad \begin{aligned} S_{12} - S_{21} + pS_1 + qS_3 &= 0, \\ S_{23} - S_{32} + rS_1 + 2k_1S_2 - pS_3 &= 0, \\ S_{31} - S_{13} - 2k_1S_1 + qS_2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgen drei duale Integrabilitätsbedingungen für die Invarianten

$$(5)\qquad \begin{aligned} B_1 - A_2 - pA - qC + \varepsilon\tfrac{1}{2} &= 0, \\ C_1 - A_3 - 2k_1A + qB &= 0, \\ B_3 - C_2 + rA + 2k_1B - pC + (1+\varepsilon 2k) &= 0. \end{aligned}$$

§ 1.

Dreht man jeden Strahl eines Komplexes $(\mathfrak{A})$ um seinen Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ in der zur Binormalen $\mathfrak{B}$ senkrechten Ebene um einen beliebigen festen Winkel und verschiebt ihn gleichzeitig längs $\mathfrak{B}$ um eine feste Strecke, so entsteht aus $(\mathfrak{A})$ ein neuer Komplex $(\mathfrak{L})$. Die Strahlen von $(\mathfrak{L})$ lassen sich durch den dualen Vektor

$$(6)\qquad \mathfrak{L} = X\mathfrak{A} + Y\mathfrak{H}$$

als Linearkombination von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ darstellen; dabei sind X und Y konstante duale Zahlen, die der Bedingung

$$(7)\qquad X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 + 2\varepsilon(x\bar{x} + y\bar{y}) = 1$$

genügen. Der Cosinus des dualen Winkels, den $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{A}$ einschließen, ist $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}) = X$. Da $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{B}) = 0$ ist, schneidet $\mathfrak{L}$ die Binormale $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ senkrecht. Die Strahlen von $\mathfrak{L}$ erhält man also durch eine konstante Schraubung der Strahlen des Komplexes $(\mathfrak{A})$ längs der zugehörigen Binormalen.

Durch die Gesamtheit dieser Schraubungen entstehen aus jedem Komplex $(\mathfrak{A})$, dessen Binormalenkomplex nicht entartet, ∞^2 neue Komplexe $(\mathfrak{L})$. Zwischen den Strahlen von $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{L})$ besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Wir werden zeigen, daß alle diese Komplexe

in entsprechenden Strahlen den gleichen Hauptdrall und dieselbe Binormale besitzen. Die Schraubungen bilden eine zweigliedrige Gruppe von Transformationen, die den Hauptdrall und den Binormalenkomplex fest läßt.

Der Hauptdrall und das begleitende Dreibein von $(\mathfrak{L})$ werden durch die duale quadratische Differentialform $(d\,\mathfrak{L}\,d\,\mathfrak{L})$ bestimmt. Zu ihrer Berechnung hat man zunächst die invarianten Ableitungen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ bezüglich der Grundformen des Komplexes $(\mathfrak{A})$ zu bilden und daraus die invariante Ableitung $\mathfrak{L}_a$ nach einer beliebigen Richtung zusammenzustellen. Es wird nach (2)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 &= (\varepsilon\tfrac{1}{2}X - Y\,A)\,\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_2 &= (1+\varepsilon k)\,X\,\mathfrak{H} - (1+\varepsilon k)\,Y\,\mathfrak{A} - Y\,B\,\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{L}_3 &= [(1+\varepsilon k)\,X - Y\,C]\,\mathfrak{B}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die invariante Ableitung nach einer beliebigen, durch α, β, γ bezeichneten Fortschreitungsrichtung ist dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_a &= \alpha\,\mathfrak{L}_1 + \beta\,\mathfrak{L}_2 + \gamma\,\mathfrak{L}_3 \\ &= \mathfrak{A}\{-\beta y - \varepsilon\beta(ky+\bar{y})\} + \mathfrak{H}\{\beta x + \varepsilon\beta(kx+\bar{x})\} \\ &\quad + \mathfrak{B}\{\gamma x - (\alpha a + \beta b + \gamma c)\,y \\ &\quad + \varepsilon[\alpha(\tfrac{1}{2}x - y\bar{a} - \bar{y}a) - \beta(yb+\bar{y}b) + \gamma(kx+\bar{x} - y\bar{c} - \bar{y}c)]\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Das Skalarprodukt $(\mathfrak{L}_a\,\mathfrak{L}_a)$ ist eine duale quadratische Form, die zu $(d\,\mathfrak{L}\,d\,\mathfrak{L})$ proportional ist. Wollte man hier unmittelbar die Berechnung der linearen Grundformen des Komplexes $(\mathfrak{L})$ durchführen, so würde eine umständliche Rechnung nötig sein, die durch eine lineare Transformation der α, β, γ vermieden werden kann. Die Eigenschaften der dualen quadratischen Form bleiben bei einer linearen homogenen Transformation der α, β, γ mit nicht verschwindender Determinante ungeändert. Nach (9) liegt folgende Transformation nahe:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -\alpha\,a\,y - \beta\,b\,y + \gamma\,(x - c\,y) \\ \beta^* &= \beta \\ \gamma^* &= \alpha\,(\tfrac{1}{2}x - y\bar{a} - \bar{y}a) - \beta\,(y\bar{b} + \bar{y}b) + \gamma\,(kx + \bar{x} - y\bar{c} - \bar{y}c). \end{aligned} \tag{10}$$

Die Transformationsdeterminante ist nicht Null. Aus (9) erhält man jetzt

$$(11)\quad \mathfrak{L}_a = \mathfrak{A}\{-\beta^* y - \varepsilon\beta^*(ky+\bar{y})\} + \mathfrak{H}\{\beta^* x + \varepsilon\beta^*(kx+\bar{x})\} + \mathfrak{B}(\alpha^* + \varepsilon\gamma^*)$$

und daraus das Skalarprodukt

$$(12)\quad (\mathfrak{L}_a\,\mathfrak{L}_a) = \beta^{*2}(y^2+x^2) + \alpha^{*2} + \varepsilon[2\beta^{*2}(kx^2 + ky^2 + y\bar{y} + x\bar{x}) + 2\,\alpha^*\gamma^*].$$

Beachtet man (7) und bildet aus Real- und Dualteil der rechten Seite ein Büschel quadratischer Formen in α^*, β^*, γ^* mit dem Büschelparameter d, so erhält man

$$\alpha^{*2} + \beta^{*2} - d\,\{2\,\beta^{*2}\,k + 2\,\alpha^*\gamma^*\}. \tag{13}$$

Derjenige Wert des Parameters d, für den die Determinante der Form verschwindet, dient zur Bestimmung des Hauptdralles des Komplexes $(\mathfrak{L})$[2]). Man erhält aus (13)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -d \\ 0 & 1-2dk & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{13a}$$

Die einzige von Null verschiedene Lösung dieser Gleichung ist

$$d = \frac{1}{2k}. \tag{14}$$

Der Hauptdrall k_l von $(\mathfrak{L})$ ist dann

$$k_l = \frac{1}{2d} = k. \tag{14a}$$

Jeder Komplex $(\mathfrak{L})$ besitzt also den gleichen Hauptdrall wie $(\mathfrak{A})$. Aus (13) und (13a) erhält man die drei Gleichungen:

$$\alpha^* - d\gamma^* = 0; \quad \beta^*(1-2dk) = 0; \quad d\alpha^* = 0.$$

Diese besitzen für $d = \frac{1}{2k}$ die nicht triviale Lösung

$$\alpha^* = 0, \quad \beta^* \neq 0, \quad \gamma^* = 0. \tag{15}$$

Nach I, § 2, (5) und § 3 werden durch (15) die Zentralflächen des Komplexes $(\mathfrak{L})$ bestimmt. Bildet man die invariante Ableitung von $\mathfrak{L}$ längs dieser Fortschreitungsrichtung, die der invarianten Ableitung mit dem Index 2 von $\mathfrak{A}$ entspricht und deshalb den Index $2l$ erhalten soll, so gewinnt man die Hauptnormale $\mathfrak{H}_l$ von $\mathfrak{L}$. Es ist

$$\mathfrak{L}_{2l} = \beta^*(1+\varepsilon k)[-Y\mathfrak{A} + X\mathfrak{H}]$$

und daher die Hauptnormale von $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{H}_l = \frac{\mathfrak{L}_{2l}}{\sqrt{(\mathfrak{L}_{2l}\mathfrak{L}_{2l})}} = -Y\mathfrak{A} + X\mathfrak{H}. \tag{16}$$

Da $(\mathfrak{H}_l \mathfrak{B}) = 0$ ist, schneidet $\mathfrak{H}_l$ die Binormale $\mathfrak{B}$ des Komplexes $(\mathfrak{A})$ senkrecht. Die Binormale $\mathfrak{B}_l$ des Komplexes $(\mathfrak{L})$ schneidet nach Definition $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H}_l$ senkrecht, muß also mit der Binormalen $\mathfrak{B}$ des Komplexes $(\mathfrak{A})$ zusammenfallen. Bei einer konstanten Schraubung der Strahlen eines Komplexes $(\mathfrak{A})$ längs der Binormalen erfahren die Hauptnormalen die gleiche Schraubung, während die Binormalen und der Hauptdrall fest bleiben.

Satz 1: *Die ∞^2 Strahlenkomplexe $(\mathfrak{L})$, die durch konstante Schraubung der Strahlen eines Komplexes $(\mathfrak{A})$ um die zugehörigen Binormalen entstehen, besitzen sämtlich den gleichen Hauptdrall und denselben Binormalenkomplex.*

[2]) Vgl. I, § 1 und 5.

§ 2.

Um die geometrischen Beziehungen, die zwischen einem Komplex ($\mathfrak{A}$) und seinem Binormalenkomplex ($\mathfrak{B}$) bestehen, aufzudecken, sind die Grundformeln von ($\mathfrak{B}$) aus denen von ($\mathfrak{A}$) abzuleiten. Das geschieht ebenso wie im vorigen Paragraphen für die Komplexe $\mathfrak{L}$. Man hat die duale quadratische Form, den Hauptdrall, die drei Linearformen und daraus das begleitende Dreibein von ($\mathfrak{B}$) zu berechnen.

1. Die quadratischen Formen. Längs einer beliebigen Fortschreitungsrichtung besitzt $\mathfrak{B}$ die invariante Ableitung

$$(17)\quad \mathfrak{B}_\alpha = \alpha\,\mathfrak{B}_1 + \beta\,\mathfrak{B}_2 + \gamma\,\mathfrak{B}_3 = \alpha\{-\varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + A\,\mathfrak{H}\} + \beta\,B\,\mathfrak{H} + \gamma\{-(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} + C\,\mathfrak{H}\}.$$

Daraus folgt für das skalare Quadrat $(\mathfrak{B}_\alpha\,\mathfrak{B}_\alpha)$ die duale quadratische Form

$$(17a)\quad (\mathfrak{B}_\alpha\,\mathfrak{B}_\alpha) = \alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2(1 + \varepsilon 2k + C^2) + 2\alpha\beta A B + 2\alpha\gamma(\tfrac{1}{2}\varepsilon + AC) + 2\beta\gamma BC.$$

Durch Trennung von Real- und Dualteil erhält man die beiden quadratischen Grundformen, das Bogenelement des sphärischen Bildes von ($\mathfrak{B}$)

$$(18)\quad \Phi_1 \equiv \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2(1 + c^2) + 2\alpha\beta\,ab + 2\alpha\gamma\,ac + 2\beta\gamma\,bc$$

und die Differentialgleichung der Torsen

$$(18a)\quad \Phi_2 \equiv \alpha^2 2a\bar{a} + \beta^2 2b\bar{b} + \gamma^2(2k + 2c\bar{c}) + 2\alpha\beta(a\bar{b} + \bar{a}b) + 2\alpha\gamma(\tfrac{1}{2} + a\bar{c} + \bar{a}c) + 2\beta\gamma(b\bar{c} + \bar{b}c).$$

Eine Form des Formenbüschels $2\delta\Phi_1 - \Phi_2$ zerfällt nur dann in Linearformen, wenn der Büschelparameter δ gleich dem Hauptdrall k_b von ($\mathfrak{B}$) ist. k_b ist nach Definition der von Null verschiedene Wert von δ, für den die Determinante des Büschels verschwindet. Nach einfacher Rechnung erhält man für den Hauptdrall k_b des Binormalenkomplexes

$$(19)\quad k_b = \frac{\tfrac{1}{4}b\bar{b} - \tfrac{1}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b)\,(\bar{b}c - b\bar{c}) + k(a\bar{b} - ab)^2}{\tfrac{1}{4}b^2 + (a\bar{b} - \bar{a}b)^2}.$$

2. Zylinder und Zentralflächen. Da die Determinante der quadratischen Form Φ_1 verschwindet, besitzt das Gleichungssystem

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} = 0; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta} = 0; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\gamma} = 0$$

eine Lösung $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$, durch die die Zylinder von ($\mathfrak{B}$) bestimmt sind. Man erhält aus den beiden Gleichungen

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0,$$
$$a\alpha_1 + b\beta_1 + \frac{1+c^2}{c}\gamma_1 = 0$$

für die Zylinder von ($\mathfrak{B}$)

$$(20)\quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = b : -a : 0 = 2k_1 : q : 0.$$

Zur Bestimmung der Zentralflächen geht man von der quadratischen Form $2k_b\Phi_1 - \Phi_2$ aus, deren Determinante verschwindet, und berechnet die Lösung des Gleichungssystems

$$\alpha[2a^2k_b - 2a\bar{a}] + \beta[2abk_b - (a\bar{b} + \bar{a}b)] + \gamma[2ack_b - (\tfrac{1}{2} + a\bar{c} + \bar{a}c)] = 0,$$
$$\alpha[2abk_b - (a\bar{b} + \bar{a}b)] + \beta[2b^2k_b - 2b\bar{b}] + \gamma[2bck_b - (b\bar{c} + \bar{b}c)] = 0,$$
$$\alpha[2ack_b - (\tfrac{1}{2} + a\bar{c} + \bar{a}c)] + \beta[2bck_b - (b\bar{c} + \bar{b}c)] + \gamma[2(1+c^2)k_b - (2k + 2c\bar{c})] = 0.$$

Ist $a\bar{b} - \bar{a}b \neq 0$, so erhält man mit einer Normierungsgröße ϱ

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \varrho\{b^2k_b - b\bar{b} + (a\bar{b} - \bar{a}b)(\bar{b}c - b\bar{c})\}, \\ \beta_2 &= \varrho\{-abk_b + \tfrac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) + (a\bar{b} - \bar{a}b)(a\bar{c} - \bar{a}c)\}, \\ \gamma_2 &= \varrho\{-(a\bar{b} - \bar{a}b)^2\} \end{aligned} \tag{21}$$

für die Zentralflächen von $(\mathfrak{B})$.

3. Das begleitende Dreibein. Die Hauptnormale $\mathfrak{H}_b$ des Binormalenkomplexes folgt aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \alpha_2\mathfrak{B}_1 + \beta_2\mathfrak{B}_2 + \gamma_2\mathfrak{B}_3 \\ &= [-\gamma_2 + \varepsilon(-\tfrac{1}{2}\alpha_2 - \gamma_2 k)]\mathfrak{A} + (\alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C)\mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Setzt man für α_2, β_2, γ_2 die Werte aus (21) ein, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}' = \varrho\{&[-\tfrac{1}{2}b(a\bar{b} - \bar{a}b) + \varepsilon(a\bar{b} - \bar{a}b)(-bk_b + \tfrac{1}{2}\bar{b})]\mathfrak{H} \\ &+ [(a\bar{b} - \bar{a}b)^2 + \varepsilon\{\tfrac{1}{2}b(-bk_b + \bar{b}) - \tfrac{1}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b)(\bar{b}c - b\bar{c}) \\ &+ k(a\bar{b} - \bar{a}b)^2\}]\mathfrak{A}\} \end{aligned}$$

oder nach einfacher Umformung

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}' = \varrho\{&(a\bar{b} - \bar{a}b)[-\tfrac{1}{2}b\mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a}b)\mathfrak{A}] \\ &+ \varepsilon(-bk_b + \tfrac{1}{2}\bar{b})[(a\bar{b} - \bar{a}b)\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2}b\mathfrak{A}] \\ &+ \varepsilon[\tfrac{1}{4}b\bar{b} - \tfrac{1}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b)(\bar{b}c - b\bar{c}) + k(a\bar{b} - \bar{a}b)^2]\mathfrak{A}\}. \end{aligned}$$

Beachtet man (19), so wird das Quadrat

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{B}' = \varrho^2(a\bar{b} - \bar{a}b)^2[\tfrac{1}{4}b^2 + (a\bar{b} - \bar{a}b)^2](1 + \varepsilon 2k_b).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\omega^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + (a\bar{b} - \bar{a}b)^2, \tag{22}$$

dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'}} = \frac{1}{\varrho(a\bar{b} - a\bar{b})\omega\sqrt{1 + \varepsilon 2k_b}} = \frac{1 - \varepsilon k_b}{\varrho\omega(a\bar{b} - \bar{a}b)},$$

und man erhält für $\mathfrak{H}_b = \dfrac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'}}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_b = \frac{1}{\omega(a\bar{b} - \bar{a}b)}\{&(a\bar{b} - \bar{a}b)[-\tfrac{1}{2}b\mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a}b)\mathfrak{A}] \\ &+ \varepsilon(-bk_b + \tfrac{1}{2}\bar{b})[(a\bar{b} - \bar{a}b)\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2}b\mathfrak{A}] \\ &+ \varepsilon[\omega^2k_b\mathfrak{A} - (a\bar{b} - \bar{a}b)k_b\{-\tfrac{1}{2}b\mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a}b)\mathfrak{A}\}]\}. \end{aligned}$$

Das zweite Glied mit ε kann man vereinfachen zu

$$\varepsilon \tfrac{1}{2} k_b b [(a\bar{b} - \bar{a} b) \mathfrak{H} + \tfrac{1}{2} b \mathfrak{A}],$$

so daß sich schließlich für die Hauptnormale von $(\mathfrak{B})$ der Ausdruck ergibt

$$(23)\quad \mathfrak{H}_b = \frac{1}{\omega}[-\tfrac{1}{2} b \mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{A}] + \varepsilon \frac{\bar{b} - b k_b}{2\omega(a\bar{b} - \bar{a} b)}[(a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2} b \mathfrak{A}].$$

Daraus folgt sofort die Binormale von $(\mathfrak{B})$

$$(23\,a)\quad \mathfrak{B}_b = \frac{1}{\omega}[(a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2} b \mathfrak{A}] - \varepsilon \frac{\bar{b} - b k_b}{2\omega(a\bar{b} - \bar{a} b)}[-\tfrac{1}{2} b \mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{A}].$$

Die Geraden

$$(23\,b, c)\quad \frac{1}{\omega}[-\tfrac{1}{2} b \mathfrak{H} + (a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{A}] \text{ und } \frac{1}{\omega}[(a\bar{b} - \bar{a} b)\mathfrak{H} + \tfrac{1}{2} b \mathfrak{A}]$$

sind die Parallelen zu $\mathfrak{H}_b$ und $\mathfrak{B}_b$ durch den Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$. Der Ausdruck

$$(24)\quad \frac{\bar{b} - b k_b}{2(a\bar{b} - \bar{a} b)} = |\mathfrak{x}_b - \mathfrak{x}|$$

gibt die Entfernung $|\mathfrak{x}_b - \mathfrak{x}|$ des Zentralpunktes $\mathfrak{x}$ des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ vom Zentralpunkt $\mathfrak{x}_b$ seines Binormalen-Komplexes auf $\mathfrak{B}$ an. $\mathfrak{x}_b$ wird daher gegeben durch den Vektor

$$(25)\quad \mathfrak{x}_b = \mathfrak{x} + \frac{\bar{b} - b k_b}{2(a\bar{b} - \bar{a} b)} \mathfrak{b}.$$

Aus den Gleichungen (23), (24) erkennt man, daß im allgemeinen das Dreibein von $(\mathfrak{B})$ gegenüber dem Dreibein von $(\mathfrak{A})$ beliebig verdreht ist. Die Frage nach den Strahlenkomplexen, die mit ihren Binormalenkomplexen überall das begleitende Dreibein gemeinsam haben, wird im fünften Paragraphen behandelt; sie erweist sich als äquivalent der Frage nach den Komplexen, in denen überall $k_b = k$ und $|\mathfrak{x}_b - \mathfrak{x}| = \text{konst.}$ ist.

§ 3.

Es gibt Strahlenkomplexe $(\mathfrak{A})$, die sich in der Umgebung eines Strahles $\mathfrak{A}$ völlig regulär verhalten, deren Binormalen-Komplex $(\mathfrak{B})$ jedoch in ein Strahlensystem entartet. Die einfachsten Komplexe dieser Art sind die linearen Komplexe, deren $(\mathfrak{B})$ aus ∞^2 Geraden besteht, die die Komplexachse senkrecht schneiden. $(\mathfrak{B})$ ist also in diesem Falle ein lineares, zylindrisches Strahlensystem. Es sollen in diesem Paragraphen alle (regulären) Strahlenkomplexe bestimmt werden, deren $(\mathfrak{B})$ ein Strahlensystem ist.

1. Entartung von $(\mathfrak{B})$ in ein zylindrisches Strahlensystem. Nach (20) ist der Binormalenkomplex zylindrisch, die Binormalen schneiden also sämtlich eine feste, uneigentliche Kurve, wenn

$$k_1 = q = 0 \tag{26}$$

ist. Nebenbei sei bemerkt, daß die Binormalen eine uneigentliche Gerade schneiden, wenn außer (26) noch $c_3 = 0$ ist; denn für das sphärische Bild $\mathfrak{b}$ von $(\mathfrak{B})$ gilt dann $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = 0$ und $|\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_{33}| = 0$.

Soll nun $(\mathfrak{B})$ in ein zylindrisches Strahlensystem entarten und dabei $(\mathfrak{A})$ regulär bleiben, so muß zunächst (26) erfüllt sein; ferner darf der duale Vektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{b} + \varepsilon\bar{\mathfrak{b}}$ nur von zwei wesentlichen Parametern abhängen, so daß die Determinante

$$|\bar{\mathfrak{b}}_1\bar{\mathfrak{b}}_2\bar{\mathfrak{b}}_3| = 0$$

sein muß. Aus (2) folgt nach Trennung von Real- und Dualteil

$$|\bar{\mathfrak{b}}_1\bar{\mathfrak{b}}_2\bar{\mathfrak{b}}_3| = |-\tfrac{1}{2}\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}p\mathfrak{h};\ \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{h};\ -\bar{\mathfrak{a}} - k\mathfrak{a} + \bar{c}\mathfrak{h} + c\bar{\mathfrak{h}}| = -\tfrac{1}{2}\bar{\mathfrak{b}}|\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, -\mathfrak{a} + c\bar{\mathfrak{h}}|.$$

Die rechte Seite verschwindet nur für $\bar{\mathfrak{b}} = k_3 = 0$. Daher ist

$$k_1 = k_3 = q = 0 \tag{27}$$

die Bedingung dafür, daß der Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$ eines Komplexes $(\mathfrak{A})$ in ein zylindrisches Strahlensystem entartet. Die geometrischen Eigenschaften dieser Komplexe werden im § 6 abgeleitet. Dort wird eine einfache Konstruktion für $(\mathfrak{A})$ angegeben.

2. Entartung von $(\mathfrak{B})$ in ein (nicht-zylindrisches) Strahlensystem. Soll $(\mathfrak{B})$ in ein Strahlensystem entarten, welches nicht zylindrisch ist, so darf durch den betrachteten Strahl $\mathfrak{B}$ kein Zylinder gehen, dessen Erzeugenden dem System $(\mathfrak{B})$ angehören. Nun gibt es aber nach (20) durch $\mathfrak{B}$ eine Fortschreitungsrichtung, längs der das sphärische Bild $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{B}$ fest bleibt. Soll kein Zylinder durch $\mathfrak{B}$ gehen, so muß die invariante Ableitung $\mathfrak{B}_\alpha$ längs dieser Fortschreitungsrichtung verschwinden. Nach (20) und (2) wird daher

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\alpha &= 2k_1\mathfrak{B}_1 + q\mathfrak{B}_2 = 2k_1(-\varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + A\mathfrak{H}) + q(B\mathfrak{H}) \\ &= -\varepsilon k_1\mathfrak{A} + (2k_1A + qB)\mathfrak{H} = 0.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ müssen verschwinden. Daraus folgt nach (3): $k_1 = 0$; $qk_3 = 0$. Hier würde $q = 0$ auf den zylindrischen Fall des vorigen Abschnittes führen, also ist $q \neq 0$ und

$$k_1 = 0; \qquad k_3 = 0. \tag{27a}$$

Es gibt aber nur dann einen regulären Strahlenkomplex $(\mathfrak{A})$, in dem (27a) erfüllt ist, wenn diese Gleichungen mit den Integrabilitätsbedingungen (4), (5) verträglich sind. Aus (4) folgt, wenn man $S = k$ setzt, die weitere Gleichung $qk_2 = 0$, also für $q \neq 0$

$$k_2 = 0. \tag{27b}$$

Daher gilt der

Satz 2: *Ist in einem Strahlenkomplex der Hauptdrall k konstant, dann entartet der Binormalenkomplex in ein (nichtzylindrisches) Strahlensystem und umgekehrt.*

Man gelangt leicht zu einigen geometrischen Eigenschaften dieser Komplexe. Nach I, § 6, IV ist $B = 2k_1 + \varepsilon k_3 = 0$ die Bedingung dafür, daß die zweite duale Invariante der durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zentralfläche des Komplexes ($\mathfrak{A}$) verschwindet. Da der Drall der Zentralfläche gleich k ist, so bedeutet $k =$ konst., daß die Zentralflächen gewöhnliche, zueinander kongruente Schraubenflächen sind; und es gilt der

Satz 3: *Jeder Komplex mit konstantem Hauptdrall k entsteht durch eine zweiparametrische Bewegung einer gewöhnlichen Schraubenfläche. Die Kongruenz der Schraubenachsen ist der entartete Binormalenkomplex.*

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: Der entartete Binormalenkomplex ($\mathfrak{B}$), also die Kongruenz der Schraubenachsen, ist keineswegs willkürlich. Um das zu zeigen, soll der mittlere Drall h des Strahlensystems ($\mathfrak{B}$) berechnet werden. Die beiden quadratischen Grundformen des Strahlensystems sind[3]) das Bogenelement des sphärischen Bildes von ($\mathfrak{B}$)

$$\dot{s}^2 = \alpha^2 q^2 + 2\alpha\gamma\, p\, q + \gamma^2 (1 + p^2)$$

und die Differentialgleichung der Torsen

$$\Phi_2 = \alpha^2 p\, q + \alpha\gamma\,(1 - r\, q + p^2) + \gamma^2 (2k - r\, p).$$

Der mittlere Drall h von ($\mathfrak{B}$) ist dann

$$4h = \frac{1}{q^2}\{q^2 (2k - r\, p) - p\, q\,(1 - r\, q + p^2) + p\, q\,(1 + p^2)\} = 2k,$$

also

$$h = \tfrac{1}{2} k.$$

Und es folgt der

Satz 4: *Wenn der Binormalenkomplex ($\mathfrak{B}$) in ein (nichtzylindrisches) Strahlensystem entartet, dann ist der mittlere Drall h dieses Strahlensystems konstant und gleich dem halben Hauptdrall des Komplexes ($\mathfrak{A}$)*[4]).

§ 4.

In I § 5 wurde gezeigt, daß der Hauptnormalenkomplex ($\mathfrak{H}$) mit dem ursprünglichen Komplex ($\mathfrak{A}$) involutorisch liegt; beide Komplexe haben denselben Hauptdrall, der eine ist der Hauptnormalenkomplex des anderen. Dies gibt die Möglichkeit zu einer sehr einfachen Berechnung der drei

---

[3]) Blaschke, Vorl. ü. Differentialgeometrie I (1930), § 123.

[4]) Eine andere Kennzeichnung der Komplexe $k =$ konst. folgt aus: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe IV [Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 252—260]. Ist in einem Strahlenkomplex k konstant, so ist der lineare Zentralkomplex zugleich Hauptkomplex und die Zentralfläche zugleich Hauptfläche im Sinne von Klein.

linearen Grundformen und der Invarianten II. Ordnung des Komplexes ($\mathfrak{H}$). Die zu ($\mathfrak{H}$) gehörigen Größen werden durch den Index $\mathfrak{h}$ gekennzeichnet. Man betrachtet ($\mathfrak{H}$) als einen selbständigen Komplex ($\mathfrak{A}_\mathfrak{h}$). Aus der involutorischen Lage folgt dann für das begleitende Dreibein

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_\mathfrak{h}; \qquad \mathfrak{H}_\mathfrak{h} = -\mathfrak{A}; \qquad \mathfrak{B}_\mathfrak{h} = \mathfrak{B}. \tag{28}$$

Für den Komplex ($\mathfrak{H}$) müssen nun die allgemeinen Ableitungsgleichungen (2) gelten, also zunächst

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\mathfrak{B}_\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}} = (1+\varepsilon k)\,\mathfrak{H}_\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_3\mathfrak{h}} = (1+\varepsilon k)\,\mathfrak{B}_\mathfrak{h}. \tag{28a}$$

Daraus berechnet man die Grundformen. Nach der ersten Gleichung wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}} &= \mathfrak{H}_{1\mathfrak{h}} = \alpha_1\mathfrak{H}_1 + \beta_1\mathfrak{H}_2 + \gamma_1\mathfrak{H}_3\\ &= \alpha_1(-a-\varepsilon\bar{a})\mathfrak{B} - \beta_1(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} - \beta_1(b+\varepsilon\bar{b})\mathfrak{B} - \gamma_1(c+\varepsilon\bar{c})\mathfrak{B} = \varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man

$$\alpha_1 a + \gamma_1 c = 0; \qquad \beta_1 = 0; \qquad \alpha_1\bar{a} + \gamma_1\bar{c} = -\tfrac{1}{2}.$$

Für die Zylinder von ($\mathfrak{H}$) erhält man daraus die normierte Fortschreitungsrichtung

$$\alpha_1 = \frac{c}{2(a\bar{c}-\bar{a}c)}; \qquad \beta_1 = 0; \qquad \gamma_1 = \frac{-a}{2(a\bar{c}-c\bar{a})}. \tag{29a}$$

In derselben Weise gelangt man von der zweiten Gleichung (28a) zur normierten Fortschreitungsrichtung der Zentralflächen von ($\mathfrak{H}$)

$$\alpha_2 = \frac{c\bar{b}-\bar{c}b}{a\bar{c}-\bar{a}c}; \qquad \beta_2 = 1; \qquad \gamma_2 = \frac{b\bar{a}-\bar{b}a}{a\bar{c}-\bar{a}c} \tag{29b}$$

und zu den Nebenflächen

$$\alpha_3 = \frac{kc-\bar{c}}{a\bar{c}-\bar{a}c}; \qquad \beta_3 = 0; \qquad \gamma_3 = -\frac{ka-\bar{a}}{a\bar{c}-\bar{a}c}. \tag{29c}$$

Die linearen Grundformen von ($\mathfrak{H}$) lassen sich aus (29a, b, c) leicht als Linearkombinationen von α, β, γ berechnen.

Für den Komplex ($\mathfrak{H}$) = ($\mathfrak{A}_\mathfrak{h}$) müssen nach (2) noch die folgenden Ableitungsgleichungen gelten

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}} = -A_\mathfrak{h}\mathfrak{B}_\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{H}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}} = -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A}_\mathfrak{h} - B_\mathfrak{h}\mathfrak{B}_\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{H}_{\mathfrak{h}_3\mathfrak{h}} = -C_\mathfrak{h}\mathfrak{B}_\mathfrak{h}.$$

Aus der ersten folgt nach (28) und (29a)

$$\frac{-c}{2(a\bar{c}-\bar{a}c)}\mathfrak{A}_1 + \frac{a}{2(a\bar{c}-\bar{a}c)}\mathfrak{A}_3 = -A_\mathfrak{h}\mathfrak{B}.$$

Setzt man für $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ die Ableitungsvektoren (2) ein, so folgt

$$A_\mathfrak{h} = \frac{-a}{2(a\bar{c}-\bar{a}c)} - \varepsilon\frac{ka-\frac{1}{2}c}{2(a\bar{c}-\bar{a}c)}. \tag{30a}$$

Ebenso bestimmt man

$$B_\mathfrak{h} = \frac{-(a\bar{b}-\bar{a}b)}{a\bar{c}-\bar{a}c} - \varepsilon\frac{\bar{b}(ka-\frac{1}{2}c)-b(k\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{c})}{a\bar{c}-\bar{a}c}, \tag{30b}$$

$$C_\mathfrak{h} = \frac{-(ka-\frac{1}{2}c)}{a\bar{c}-\bar{a}c} + \varepsilon\frac{-k(ka-\frac{1}{2}c)+(k\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{c})}{a\bar{c}-\bar{a}c}. \tag{30c}$$

Ein Komplex und sein Hauptnormalenkomplex haben gleichen Hauptdrall; aus (30a, b, c) lassen sich drei Invarianten II. Ordnung bestimmen, die ebenfalls in beiden Komplexen einander gleich sind. Es ist nämlich

$$a_\mathfrak{h}\,\bar{c}_\mathfrak{h} - c_\mathfrak{h}\,\bar{a}_\mathfrak{h} = \frac{1}{4(a\,\bar{c} - \bar{a}\,c)}. \tag{31}$$

Daraus folgt mit (30) nach kurzer Rechnung

$$J_1 = \frac{a_\mathfrak{h}^2}{a_\mathfrak{h}\,\bar{c}_\mathfrak{h} - \bar{a}_\mathfrak{h}\,c_\mathfrak{h}} = \frac{a^2}{a\,\bar{c} - \bar{a}\,c}, \tag{31a}$$

$$J_2 = \frac{(2\,k\,\bar{a}_\mathfrak{h} - \bar{c}_\mathfrak{h})^2}{a_\mathfrak{h}\,\bar{c}_\mathfrak{h} - \bar{a}_\mathfrak{h}\,c_\mathfrak{h}} = \frac{(2\,k\,\bar{a} - \bar{c})^2}{a\,\bar{c} - \bar{a}\,c}, \tag{31b}$$

$$J_3 = \frac{b_\mathfrak{h}^2\,(a_\mathfrak{h}\,\bar{b}_\mathfrak{h} - b_\mathfrak{h}\,\bar{a}_\mathfrak{h})^2}{(a_\mathfrak{h}\,\bar{c}_\mathfrak{h} - \bar{a}_\mathfrak{h}\,c_\mathfrak{h})^2} = \frac{b^2\,(a\,\bar{b} - \bar{a}\,b)^2}{a\,\bar{c} - \bar{a}\,c}. \tag{31c}$$

Beim Übergang von einem Komplex ($\mathfrak{A}$) *zu seinem Hauptnormalenkomplex* ($\mathfrak{H}$) *bleiben außer k die drei Invarianten II. Ordnung* J_1, J_2, J_3 *ungeändert.*

§ 5.

Man betrachte zusammengehörende Strahlen der drei Komplexe ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{H}$), ($\mathfrak{B}$). Das begleitende Dreibein von ($\mathfrak{A}$) bilden die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. Das Dreibein von ($\mathfrak{H}$) besteht, abgesehen von der Benennung, aus denselben Geraden. Dagegen wird das Dreibein von ($\mathfrak{B}$) im allgemeinen nicht in diese Geraden fallen. Gibt es Strahlenkomplexe, bei denen dies der Fall ist? Ein Strahlenkomplex, der mit seinem Binormalenkomplex überall das begleitende Dreibein gemeinsam hat, läßt sich nach § 1 durch konstante Verschraubung der Strahlen längs der Binormalen in allgemeinere Komplexe überführen, deren Dreibein gegen das von ($\mathfrak{B}$) beliebig aber konstant verschraubt ist. Werden die zum Komplex ($\mathfrak{B}$) gehörenden Größen mit dem Index b bezeichnet, dann kann man für die gesuchten Komplexe die beiden Eigenschaften fordern: 1. Die Hauptnormale $\mathfrak{H}_b$ von ($\mathfrak{B}$) sei parallel zu $\mathfrak{A}$. 2. Der Abstand der Zentralpunkte von ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$) sei konstant.

1. Diese geometrischen Forderungen sind durch Gleichungen zwischen den Invarianten auszudrücken. Aus $\mathfrak{H}_b \,||\, \mathfrak{A}$ erhält man nach (23)

$$b = 2\,k_1 = 0; \tag{32}$$

ferner aus der zweiten Forderung nach (24)

$$|\mathfrak{x}_b - \mathfrak{x}| = \frac{\bar{b} - b\,k_b}{2\,(a\,\bar{b} - \bar{a}\,b)} = \text{konst.}$$

Für $b = 0$ wird

$$|\mathfrak{x}_b - \mathfrak{x}| = \frac{1}{2\,a} = \frac{-1}{2\,q} = \text{konst.} \tag{33}$$

Zu diesen beiden Gleichungen kommen die Integrabilitätsbedingungen (4) und (5) hinzu, die nach Trennung von Real- und Dualteil folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} &1.\ k_{12} - k_{21} + p k_1 + q k_3 = 0, \\ &2.\ k_{23} - k_{32} + r k_1 + 2 k_1 k_2 - p k_2 = 0, \\ &3.\ k_{31} - k_{13} - 2 k_1 k_1 + q k_2 = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

$$4.\ b_1 - a_2 - p a - q c = 0, \qquad 7.\ \bar{c}_1 - \bar{a}_3 - 2 k_1 \bar{a} + q \bar{b} = 0,$$

$$5.\ \bar{b}_1 - \bar{a}_2 - p \bar{a} - q \bar{c} + \tfrac{1}{2} = 0, \quad 8.\ b_3 - c_2 + r a + 2 k_1 b - p c + 1 = 0,$$

$$6.\ c_1 - a_3 - 2 k_1 a - q b = 0, \quad 9.\ \bar{b}_3 - \bar{c}_2 + r \bar{a} + 2 k_1 \bar{b} - p \bar{c} + 2k = 0.$$

Aus 4. folgt für $b = k_1 = 0$ und $q =$ konst., wenn man (3) beachtet

$$2 p q = 0.$$

Also entweder $q = 0$ oder $p = 0$. Der erste Fall führt auf die im dritten Paragraphen angegebenen Komplexe, deren ($\mathfrak{B}$) zylindrisch ist, also entartet. Es bleibt daher nur

$$p = 0. \tag{35}$$

Dann folgt aus (34, 3 u. 8)

$$r q = 1 \quad \text{oder} \quad r = \frac{1}{q} = \text{konst.} \tag{36}$$

Die übrig bleibenden Bedingungen von (34) sind höherer Ordnung. Es sind die vier Gleichungen

$$\begin{gathered} k_{21} - q k_3 = 0, \quad k_{23} = k_{32}, \quad k_{31} + q k_2 = 0, \\ k_{33} + k_{22} + 2 k = 0. \end{gathered} \tag{34a}$$

2. Die Gleichungen (32)...(36) geben einen vollständigen Überblick über die Invarianten der betrachteten Komplexe. Aus ihnen sollen einige geometrische Eigenschaften abgeleitet werden, die schließlich eine anschauliche Konstruktion der Komplexe ermöglichen.

Hilfsatz 1. *Die Zylinder von* ($\mathfrak{A}$) *sind Kreiszylinder von gleichem Durchmesser; die Zentralkurven des Hauptnormalenkomplexes* ($\mathfrak{H}$) *sind Kreise, deren Radius im ganzen Komplex konstant ist.* ($\mathfrak{H}$) *besteht also aus den Tangenten der Kreise einer Kreiskongruenz.*

Wir beweisen zuerst den zweiten Teil des Satzes und untersuchen ($\mathfrak{H}$). Die Größen von ($\mathfrak{H}$) werden mit dem Index h bezeichnet. Dann ist die Krümmung und Torsion der Zentralkurven von ($\mathfrak{H}$) nach I, § 7, (12), (13) gegeben durch

$$-\frac{1}{\tau_h} = \frac{2 k a_h - c_h}{k p_h + \bar{c}_h}; \quad \frac{1}{\varrho_h} = \frac{1}{k p_h + \bar{c}_h} = \frac{-1}{2 k \bar{a}_h - \bar{c}_h}.$$

Nach (30a) folgt aus (35), daß $2 k a_h - c_h = 0$ ist. Das findet man durch Einsetzen der Bedingungen (32)...(36) in die rechten Seiten von (30) oder einfacher, indem man in den Gleichungen (30) den Index h an

die Größen der rechten Seiten statt an die der linken setzt. Wegen der involutorischen Lage von (𝔖) und (𝔄) bleiben dabei die Gleichungen richtig. ϱ_h folgt dann sofort aus (31) und (31b):

$$\pm \frac{1}{\varrho_h} = 2q, \tag{37}$$

also ist

$$\frac{1}{\tau_h} = 0; \quad \frac{1}{\varrho_h} = \text{konst.} \tag{37a}$$

Der Komplex (𝔖) besteht daher aus den Tangenten an ∞^2 Kreise von gleichem Radius. Nun gilt aber für die Zentralkurven jedes Komplexes (I, § 7), daß in entsprechenden Punkten die Binormalen der Kurven mit den Hauptnormalen des Komplexes und die Hauptnormalen der Kurven mit den Binormalen des Komplexes zusammenfallen. Die Komplexstrahlen 𝔄 sind die Hauptnormalen von (𝔖). Also besteht jeder unserer Komplexe (𝔄) aus den Erzeugenden aller Zylinder, die jene ∞^2 Kreise als Querschnitt haben. Der Binormalenkomplex besteht aus den Durchmessern der Kreise.

3. Die Kreiskongruenz. Um zu einer Konstruktion der Komplexe zu gelangen, muß man nach Eigenschaften der Kreiskongruenz suchen. Die Mittelpunkte der ∞^2 Kreise beschreiben eine Fläche (ʒ), die Mittelpunktsfläche; die Ebenen der Kreise umhüllen eine andere Fläche (e), die Hüllfläche. Die Flächen (ʒ) und (e) werden durch die Kreise einander punktweise zugeordnet; jeder Punkt ʒ liegt in der Tangentenebene des zugeordneten Punktes e.

Die Hüllfläche (e). Der Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ von 𝔄 ist ein Punkt eines Kreises; 𝔖 ist seine Tangente, 𝔅 die Kreisnormale. Jeder Punkt der Kreisebene wird dargestellt durch einen Vektor der Form

$$\hat{\mathfrak{e}} = \mathfrak{x} + x\,\mathfrak{h} + y\,\mathfrak{b}.$$

Beschreibt die Gerade 𝔄 einen Komplexzylinder, so bleibt nach Hilfssatz 1 die Ebene des Kreises ungeändert. Soll $\hat{\mathfrak{e}}$ ein Punkt der Hüllfläche sein, dann sind x und y so zu bestimmen, daß $\hat{\mathfrak{e}}_2$ und $\hat{\mathfrak{e}}_3$ in der Kreisebene liegen, d. h., daß $\mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{e}} = 0$ und $\mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{e}}_3 = 0$ sind. Man erhält nach (2) und I, § 7, (2)

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{e}}_2 &= -k_3\,\mathfrak{a} + k\,\mathfrak{b} + x_2\,\mathfrak{h} + y_2\,\mathfrak{b} - x\,\mathfrak{a},\\ \hat{\mathfrak{e}}_3 &= -(\tfrac{1}{2}r - k_2)\,\mathfrak{a} - k\,\mathfrak{h} + x_3\,\mathfrak{h} + y_3\,\mathfrak{b} - y\,\mathfrak{a}\end{aligned}$$

und aus $\mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{e}}_3 = 0$

$$x + k_3 = 0; \quad y + \tfrac{1}{2}r - k_2 = 0. \tag{38}$$

Dann wird der Ortsvektor e der Hüllfläche

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{x} - k_3\,\mathfrak{h} + (-\tfrac{1}{2}r + k_2)\,\mathfrak{b}. \tag{39}$$

Beschreibt der Strahl $\mathfrak{A}$ einen Zylinder, so bleibt $\mathfrak{e}$ fest; denn nach (36) ist $e_1 = 0$. Das Bogenelement der Hüllfläche wird demnach gegeben durch

$$\dot{s}^2 = (\beta\, \mathfrak{e}_2 + \gamma\, \mathfrak{e}_3)^2.$$

Es ist

$$\mathfrak{e}_2 = -\, k_{32}\, \mathfrak{h} + (k + k_{22})\, \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{e}_3 = -\,(k + k_{33})\, \mathfrak{h} + k_{23}\, \mathfrak{b} = (k + k_{22})\, \mathfrak{h} + k_{32}\, \mathfrak{b} \quad \text{(nach 34a)}.$$

Also wird

$$\dot{s}^2 = [k_{32}^2 + (k + k_{22})^2]\,(\beta^2 + \gamma^2). \tag{40}$$

Das sphärische Bild der Hüllflächen (e) wird von dem Vektor $\mathfrak{a}$ beschrieben; denn $\mathfrak{a}$ ist senkrecht zur Ebene eines Kreises und damit zur Tangentenebene der Hüllfläche. Das Bogenelement $\dot{\sigma}^2$ des sphärischen Bildes ist deshalb

$$\dot{\sigma}^2 = (\beta\, \mathfrak{a}_2 + \gamma\, \mathfrak{a}_3)^2 = \beta^2 + \gamma^2. \tag{41}$$

Die Abbildung der Hüllfläche auf ihr sphärisches Bild ist nach (40) und (41) konform. Es gilt daher der

Hilfssatz 2. *Die Hüllflächen* (e) *der Kreisebenen der zweiparametrischen Kreisschar ist eine Minimalfläche.*

Zur Berechnung der Asymptotenlinien der Hüllfläche bilden wir die zweite invariante Ableitung von $\mathfrak{e}$ längs einer Richtung $\beta : \gamma$

$$\ddot{\mathfrak{e}} = \beta\,(\beta\, \mathfrak{e}_2 + \gamma\, \mathfrak{e}_3)_2 + \gamma\,(\beta\, \mathfrak{e}_2 + \gamma\, \mathfrak{e}_3)_3.$$

Soll die Fortschreitungsrichtung $\beta : \gamma$ in eine Asymptotenlinie fallen, so muß $\ddot{\mathfrak{e}}\, \mathfrak{a} = 0$ sein, d. h. die $\mathfrak{a}$-Komponente von $\ddot{\mathfrak{e}}$ verschwinden. Daraus folgt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien der Hüllfläche

$$k_{32}\, \beta^3 - 2\beta\gamma\,(k + k_{22}) - k_{32}\, \gamma^2 = 0. \tag{42}$$

Die Mittelpunktsfläche. Der Ortsvektor $\mathfrak{z}$ der Mittelpunktsfläche ($\mathfrak{z}$) der Kreiskongruenz folgt aus (37)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \frac{1}{2q}\, \mathfrak{b}. \tag{43}$$

Dabei ist das Vorzeichen des zweiten Gliedes aus der Bedingung $\mathfrak{z}_1 = 0$ bestimmt. Ein Vergleich mit (33) zeigt, daß $\mathfrak{z}$ der Zentralpunkt von ($\mathfrak{B}$) ist, also $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_b$. *Der Ort der Zentralpunkte von* ($\mathfrak{B}$) *entartet in eine Fläche*, die mit der Mittelpunktsfläche zusammenfällt. Die Tangentenvektoren der Fläche ($\mathfrak{z}$) sind

$$\mathfrak{z}_2 = -\, k_3\, \mathfrak{a} + k\, \mathfrak{b}; \qquad \mathfrak{z}_3 = +\, k_2\, \mathfrak{a} - k\, \mathfrak{h}. \tag{44}$$

Wie schon erwähnt wurde, sind die Flächen (e) und ($\mathfrak{z}$) einander punktweise zugeordnet. Der Verbindungsvektor zugeordneter Punkte ist nach (39) und (43) unter Beachtung von (36)

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{z} = -\, k_3\, \mathfrak{h} + k_2\, \mathfrak{b}. \tag{45}$$

Nach (44) kann man dafür schreiben

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{z} = \frac{1}{k}(k_{33}\,\mathfrak{z}_3 + k_{23}\,\mathfrak{z}_2). \tag{45a}$$

Die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z}$ berühren nach Definition die Hüllfläche und nach (45a) auch die Mittelpunktsfläche. Daher gilt

Hilfssatz 3. *Das Strahlensystem, welches aus den Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte* $\mathfrak{e}$ *und* $\mathfrak{z}$ *der Hüllfläche und der Mittelpunktsfläche der Kreiskongruenz besteht, besitzt diese beiden Flächen als Brennflächen und ist ein W-Strahlensystem.*

Um den letzten Teil dieses Hilfssatzes noch zu beweisen, berechnen wir die Differentialgleichung der Asymptotenlinien von $(\mathfrak{z})$. Wir bilden die Determinanten

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_{22}| &= -k^2 k_{32}\,|\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}| \\
|\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_{23}| &= -k^2 (k + k_{33})\,|\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}|, \\
|\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_{33}| &= +k^2 k_{32}\,|\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}|.
\end{aligned}$$

Beachtet man (34a), so folgt für die Asymptotenlinien von $(\mathfrak{z})$

$$k_{32}\beta^2 - 2(k + k_{22})\beta\gamma - k_{32}\gamma^2 = 0 \tag{46}$$

das ist genau Gleichung (42). Bei der Zuordnung von $(\mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{z})$ entsprechen sich also die Asymptotenlinien.

Schließlich folgt aus (19) der

Hilfssatz 4: *Jeder Komplex der betrachteten Klasse hat mit seinem Binormalenkomplex den gleichen Hauptdrall k.*

4. Die Hilfssätze 1 bis 3 geben eine vollständige Bestimmung aller Komplexe, deren begleitendes Dreibein gegen das des Binormalenkomplexes $(\mathfrak{B})$ konstant verschraubt ist. Die im Anfang dieses Paragraphen gemachte Annahme $\mathfrak{H}_\mathfrak{b} \| \mathfrak{A}$ und die daraus folgende $\mathfrak{B}_\mathfrak{b} \| \mathfrak{H}$ zeichnen zunächst zwei Komplexe aus. Der Komplex $(\mathfrak{A})$ besteht aus ∞^2 kongruenten Kreiszylindern, der Komplex $(\mathfrak{H})$ aus den Tangenten an ∞^2 kongruente Kreise. Das Dreibein jedes dieser beiden Komplexe kann durch Parallelverschiebung in das Dreibein von $(\mathfrak{B})$ übergeführt werden (bei geeigneter Umbenennung der Achsen). Dreht man nun jede Gerade $\mathfrak{A}$ um die zugehörige Binormale (= Kreisdurchmesser) um einen festen Winkel, so werden aus den Zylindern Rotationshyperboloide, die die Kreise als Kehlkreise besitzen. Das Ergebnis kann folgendermaßen formuliert werden:

Satz 5. *Es sei ein W-Strahlensystem gegeben, dessen eine Brennfläche* $(\mathfrak{e})$ *eine Minimalfläche ist. Um jeden Punkt der anderen Brenn-*

fläche (3) *beschreibt man einen Kreis von beliebigem, aber festem Radius so, daß die Ebene des Kreises in der zugehörigen Tangentenebene der Minimalfläche liegt. Legt man durch jeden Kreis einen Rotationsregulus, der den Kreis als Kehllinie besitzt, so daß alle ∞^2 Reguli einander kongruent sind, so bilden die Erzeugenden der Reguli den allgemeinsten Strahlenkomplex, dessen Dreibein gegen das seines Binormalenkomplexes konstant verschraubt ist. Der Binormalenkomplex besteht aus den Durchmessern der Kreise, besitzt die Brennfläche* (3) *als Ort seiner Zentralpunkte und besitzt mit allen zugehörigen Komplexen den gleichen Hauptdrall k.*

§ 6.

Die Strahlenkomplexe, in denen $k_1 = k_3 = q = 0$ ist, lassen sich durch verschiedene geometrische Eigenschaften kennzeichnen. Die erste wurde im § 3 abgeleitet: Es sind die einzigen Komplexe, deren Binormalenkomplex ($\mathfrak{B}$) in ein zylindrisches Strahlensystem entartet. Eine zweite Kennzeichnung folgt aus Strahlenkomplexe III, § 4[5]) und beruht auf Untersuchungen von F. Klein: Auf einem allgemeinen Komplexstrahl $\mathfrak{A}$ gibt es vier Punkte, deren Komplexkegel $\mathfrak{A}$ als Wendeerzeugende besitzen. Unsere Komplexe sind nun dadurch ausgezeichnet, daß von den vier Punkten zwei in dem uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{A}$ zusammenfallen, die beiden anderen zum Zentralpunkt symmetrisch liegen. Durch projektive Transformationen erhält man offenbar alle Komplexe, in denen zwei der vier Punkte in einer festen Ebene liegen. Solche Komplexe hat kürzlich Mentré untersucht[6]). Eine dritte Kennzeichnung folgt aus (29 b): Die Zentralflächen eines Komplexes der betrachteten Klasse sind den Zentralflächen des Hauptnormalenkomplexes ($\mathfrak{H}$) zugeordnet. Durchläuft also $\mathfrak{A}$ eine Zentralfläche von ($\mathfrak{A}$), so erzeugt die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ eine Zentralfläche von ($\mathfrak{H}$).

Diese Komplexe können in einfacher Weise konstruiert werden:

Satz 6. *Es sei eine Schar beliebiger, zueinander paralleler Zylinder* (ζ) *gegeben. Auf jedem Zylinder zeichne man eine Schar paralleler Schraubenlinien so, daß die Steigung der Schraubenlinien beim Übergang von einem Zylinder zum benachbarten sich differenzierbar ändert. Dann bildet die Gesamtheit der Tangenten der Schraubenlinien den allgemeinsten Komplex der verlangten Art.*

Zum Beweise dieser Konstruktion nehmen wir zu den Gleichungen

$$k_1 = k_3 = q = 0$$

---

[5]) Monatshefte f. Math. u. Physik 44 (1936), S. 27—40.

[6]) P. Mentré, Comptes Rendus 178 (1924) 290—292, 179 (1924) 1131—1133.

die Integrabilitätsbedingungen (34) hinzu und erhalten vier weitere Gleichungen

$$(47)\qquad \begin{aligned} &1.\ p_1 = 0, && 2.\ \bar{c}_1 + \tfrac{1}{2} p_3 = 0,\\ &3.\ p_2 + p^2 + 1 = 0, && 4.\ \bar{c}_2 + \tfrac{1}{2} r p + p\,\bar{c} - 2k = 0. \end{aligned}$$

Berechnet man aus (47, 2) $\bar{c}_{12}$ und aus (47, 4) $\bar{c}_{21}$ und beachtet die Relation

$$\bar{c}_{12} - \bar{c}_{21} + p\,\bar{c}_1 = 0,$$

die aus (4) folgt, berechnet man ebenso p_{23} und p_{32} aus (47, 3) und (47, 2) und beachtet die Bedingung

$$p_{23} - p_{32} - p\,p_3 = 0$$

aus (4), so folgt

$$(47\,a)\qquad 5.\ r_1 = \bar{c}_1 = 0, \qquad 6.\ p_3 = 0.$$

Zur geometrischen Deutung dieser Formeln beginnen wir mit den Zentralkurven, die der Zentralpunkt beschreibt, wenn man in der Richtung $\alpha = 2k$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$ fortschreitet. Nach I, § 7, (12) und (13) ist das Verhältnis von Krümmung und Windung

$$\frac{\varrho}{\tau} = 2ka - c = p,$$

nach (47, 1) und (47, 6) also längs der Kurven konstant. Die Kurven sind daher allgemeine Schraubenlinien (Böschungslinien). Schreitet man im Komplex längs des durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinders fort, so bleiben Krümmung und Torsion der Zentralkurven ungeändert, denn es ist nach I, § 7, (12)

$$\varrho_1 = 0 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 0.$$

Die Schraubenlinien erleiden also nur eine Parallelverschiebung.

Legen wir durch eine Schraubenlinie den Zylinder ζ, dessen Erzeugenden von der Kurve unter konstantem Winkel geschnitten werden, so wird die Richtung der Zylindererzeugenden bestimmt durch den Vektor

$$\mathfrak{z} = p\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}.$$

Durch Differenzieren findet man die Gleichungen

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_3 = 0, \qquad \mathfrak{z}_2 = \lambda\,\mathfrak{z},$$

d. h. die Erzeugenden aller Zylinder ζ sind einander parallel. Läßt man $\mathfrak{A}$ einen Komplexzylinder durchlaufen, so bewegt sich der Zentralpunkt in der Richtung $\mathfrak{x}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{z}$. Die Komplexzylinder sind also die Tangentenebenen der Zylinder ζ, die die Zentralkurven als Böschungslinien enthalten. Daß die Zylinder ζ einander parallel sind, folgt aus dem Verhalten der Binormalen $\mathfrak{B}$. Bekanntlich (I, § 7) ist $\mathfrak{B}$ die Hauptnormale der Zentralkurve und daher zugleich Normale des Zylinders ζ. Der Binormalenkomplex $(\mathfrak{B})$, der ja in ein zylindrisches Strahlensystem entartet ist, bildet das gemeinsame Normalensystem der Zylinder (ζ). $\mathfrak{B}$ ist

gleichzeitig die Tangente der Zentralfläche, die im Zentralpunkt auf $\mathfrak{A}$ senkrecht steht. Wegen $\mathfrak{B}_2 = 0$ besteht daher die Zentralfläche aus allen Komplexstrahlen, die $\mathfrak{B}$ senkrecht schneiden. Damit ist die Konstruktion vollständig bewiesen.

Schließlich soll noch die Krümmung eines senkrechten Querschnittes eines Zylinders ζ berechnet werden. Dazu bestimmen wir zunächst die Fortschreitungsrichtung $\alpha : \beta : \gamma$ des durch den Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ gehenden Querschnittes. Es ist

$$\dot{\mathfrak{x}} = \alpha \mathfrak{x}_1 + \beta \mathfrak{x}_2 + \gamma \mathfrak{x}_3 = \sigma (\mathfrak{a} + p \mathfrak{h}).$$

Denn $\mathfrak{a} + p \mathfrak{h}$ ist zur Zylindererzeugenden $\mathfrak{z}$ und zu $\mathfrak{b}$ senkrecht. Man erhält nach I, § 7, (2)

$$\beta = 0; \qquad \alpha : \gamma = 2 (p \bar{c} - k) : (1 + p^2).$$

Setzt man

$$\alpha = \frac{2 (p \bar{c} - k)}{(k p + \bar{c}) \sqrt{1 + p^2}}; \qquad \beta = 0; \qquad \gamma = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{k p + \bar{c}},$$

so wird dadurch die Ableitung nach der Bogenlänge s des Querschnittes bestimmt. Da $\mathfrak{b}$ (= Realteil von $\mathfrak{B}$) der Normalenvektor der Kurve ist, wird der Betrag von $\frac{d \mathfrak{b}}{d s}$ gleich der Krümmung. Man erhält

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1 + p^2}{k p + \bar{c}}.$$

Da p_1, k_1, $\bar{c}_1$ und k_3, p_3 verschwinden, also p und k auf einem Zylinder ζ konstant sind, folgt, daß für

$$\bar{c}_3 = 0$$

die Zylinder ζ in Kreiszylinder übergehen.

Zum Schluß dieses Abschnittes wenden wir uns noch zu dem Binormalenkomplex ($\mathfrak{B}$) der betrachteten Klasse von Strahlenkomplexen. ($\mathfrak{B}$) entartet in ein Strahlensystem, dessen Strahlen die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten eines festen Zylinders sind. Dieser Zylinder ist die Evolutenfläche der Zylinderschar (ζ). Im Falle $\bar{c}_3 = 0$ besteht ($\mathfrak{B}$) aus allen Geraden, die eine feste Gerade senkrecht schneiden. ($\mathfrak{B}$) ist also identisch mit dem Binormalenkomplex eines linearen Komplexes. *Die Strahlenkomplexe, in denen* $k_1 = k_3 = q = \bar{c}_3 = 0$ *ist, sind somit alle Komplexe, die mit einem linearen Komplex denselben* ($\mathfrak{B}$) *besitzen.* Die in der Einleitung gestellte Frage nach allen Strahlenkomplexen, die den Hauptdrall und den Binormalenkomplex gemeinsam haben, ist hier leicht zu beantworten: Die Komplexe entstehen sämtlich durch konstante Verschraubung der Strahlen eines der Komplexe längs der Binormalen. Zum Beweise gehen wir aus von den Zylindern ζ und betrachten, wie sich die Steigung p der Schraubenlinien (= Zentralkurven) ändert, wenn man

längs einer Normalen von einem Zylinder ζ zum benachbarten fortschreitet. Das Bogenelement der Normalen wird bestimmt durch

$$s^2 = \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_2 = k^2.$$

Also wird

$$\frac{d\,p}{d\,s} = \frac{p_2}{k}.$$

Besitzen zwei Komplexe unserer Klasse gleichen Hauptdrall k, so stimmen sie auch in $\frac{d\,p}{d\,s}$ überein (47, 3) und können durch Verschraubung längs der Binormalen ineinander übergeführt werden. Dabei ist es gleichgültig, ob $\bar{c}_3 = 0$ ist oder nicht.

(Eingegangen am 15. Mai 1937.)

Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist.

Von

Lothar Koschmieder in Brünn.

Die in der Form

$$(1) \qquad H_n(x) = (-1)^n \exp \frac{x^2}{2} \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

darstellbaren Hermiteschen Polynome bringt der Ausdruck

$$\exp\left(s\,x - \frac{s^2}{2}\right) = \sum_n^{0,\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)$$

hervor[1]). Auf eine zweite wichtige Weise erzeugt sie die Mehlersche Formel

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \exp\left\{\frac{s}{2(1-s^2)}\left[2\,x\,X - s(x^2+X^2)\right]\right\} = \sum_n^{0,\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)\,H_n(X).$$

Watson hat sie kürzlich auf drei Arten bewiesen[2]).

Hier werde ich ein Gegenstück zu (2) in *zwei* Veränderlichen gewinnen. Es betrifft die Hermiteschen Polynome[3])

$$(3) \qquad H_{m\,n}(x,y) = (-1)^{m+n} \exp\left[\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y)\right] \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y)\right]$$

und die ihnen in der Ebene biorthogonal zugeordneten

$$(4) \qquad G_{m\,n}(x,y) = (-1)^{m+n} \exp\left[\tfrac{1}{2}\,\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right] \frac{\partial^{m+n}}{\partial \mathfrak{x}^m\,\partial \mathfrak{y}^n} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\,\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right].$$

Hierbei ist

$$(5) \qquad \varphi(x,y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad \Delta = a\,c - b^2 > 0$$

eine entschieden positive quadratische Form,

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = a\,x + b\,y, \quad \mathfrak{y} = b\,x + c\,y$$

---

[1]) Vgl. P. Appell und J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite (1926), S. 331. Ich führe dieses Werk mit A.-K. an.

[2]) G. N. Watson, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), S. 194—199. Die dortige Gestalt der Mehlerschen Formel geht in (2) über, wenn man dort $H_n(x)$ durch $2^{n/2} H_n(x\sqrt{2})$ ersetzt.

[3]) A.-K., S. 369—387.

und

$$\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \frac{c}{\Delta}\mathfrak{x}^2 - 2\frac{b}{\Delta}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + \frac{a}{\Delta}\mathfrak{y}^2 = \varphi(x,y) \tag{7}$$

die zu φ adjungierte Form. Die H_{mn}, G_{mn} werden von den Ausdrücken

$$\exp[p\mathfrak{x} + q\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\varphi(p,q)] = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{p^m}{m!}\frac{q^n}{n!} H_{mn}(x,y),$$

$$\exp[\mathfrak{p}x + \mathfrak{q}y - \tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{p},\mathfrak{q})] = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{\mathfrak{p}^m}{m!}\frac{\mathfrak{q}^n}{n!} G_{mn}(x,y)$$

erzeugt. Wie x, y seien weiterhin X, Y beliebig reell, s, t reell[4]).

Die erste der Mehlerschen Formel (2) *entsprechende Entwicklung lautet*, wie ich behaupte,

$$\sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} G_{mn}(x,y)\,G_{mn}(X,Y) \tag{8}$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{(st+\Delta)^2 - (cs+at)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(st+\Delta)^2-(cs+at)^2}\right.$$
$$\cdot [s^2(c\Delta - at^2)(x^2+X^2) + t^2(a\Delta - cs^2)(y^2+Y^2)$$
$$- 2bst(st+\Delta)(xy+XY) + 2bst(cs+at)(xY+yX)$$
$$\left. - 2s(\Delta^2 - b^2st - a^2t^2)xX - 2t(\Delta^2 - c^2s^2 - b^2st)yY]\right\};$$

sie gilt, wenn der Punkt $R(s,t)$ *in dem den Ursprung* ($s=0$, $t=0$) *enthaltenden Viereck* $\mathfrak{h}$ *verbleibt, das die jeweils im ersten, ..., vierten Quadranten verlaufenden Bögen der vier Hyperbeln*

$$(9_1)\quad st - cs - at + \Delta = 0, \qquad (9_2)\quad st - cs + at - \Delta = 0,$$

$$(9_3)\quad st + cs + at + \Delta = 0, \qquad (9_4)\quad st + cs - at - \Delta = 0$$

durch ihre Schnittpunkte $(0, a^{-1}\Delta)$, $(-c^{-1}\Delta, 0)$, $(0, -a^{-1}\Delta)$, $(c^{-1}\Delta, 0)$ *bilden* (s. Fig. 1, $a = b = 2$, $c = 3$).

Ist die etwas umfängliche, aber vollkommen übersichtliche Formel (8) bewiesen, so folgt aus ihr ohne weiteres eine zweite, auf die H_{mn} bezügliche; denn man geht von den G_{mn} zu diesen über, indem man[5]) x, y durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ (6), entsprechend X, Y durch

$$\mathfrak{X} = aX + bY, \quad \mathfrak{Y} = bX + cY \tag{10}$$

---

[4]) Ich unterlasse es hier, auch komplexe Werte dieser Größen in Betracht zu ziehen.

[5]) A.-K., S. 370.

und $c\Delta^{-1}$, $-b\Delta^{-1}$, $a\Delta^{-1}$ durch a, b, c ersetzt. Man erhält dabei aus (8) als *zweite der Formel* (2) *entsprechende Entwicklung*

$$(11)\qquad \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} H_{mn}(x,y) H_{mn}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\Delta st+1)^2-(as+ct)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(\Delta st+1)^2-(as+ct)^2}\right.$$

$$\cdot[s^2(a-c\Delta t^2)(x^2+\mathfrak{X}^2)+t^2(c-a\Delta s^2)(\eta^2+\mathfrak{Y}^2)$$

$$+2bst(\Delta st+1)(x\eta+\mathfrak{X}\mathfrak{Y})-2bst(as+ct)(x\mathfrak{Y}+\eta\mathfrak{X})$$

$$\left.-2s(1-b^2st-c^2t^2)x\mathfrak{X}-2t(1-a^2s^2-b^2st)\eta\mathfrak{Y}]\right\};$$

sie gilt in dem den Ursprung enthaltenden Viereck, das die Hyperbeln

(12_1) $\Delta st-as-ct+1=0$, (12_2) $\Delta st-as+ct-1=0$,

(12_3) $\Delta st+as+ct+1=0$, (12_4) $\Delta st+as-ct-1=0$

bilden (Fig. 2).

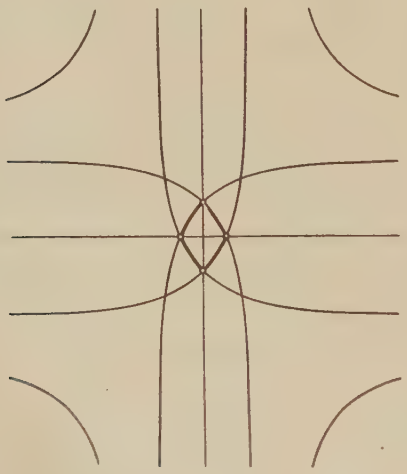


Fig. 1.

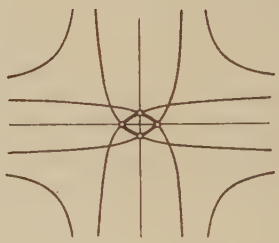


Fig. 2.

Um nun (8) herzuleiten, bedienen wir uns desselben Verfahrens wie Watson a. a. O.[2]), S. 198 f. beim dritten, ihm von G. H. Hardy mitgeteilten Beweise von (2). Hardy bezeichnet es als unwahrscheinlich, daß dieser auf der Integraldarstellung der Polynome (1) beruhende Beweis von (2) neu sei; es sei mir gestattet, zu bemerken, daß er sich in der Tat 1914 in einer Arbeit von Kapteyn[6]) findet.

[6]) W. Kapteyn, Verslag Amsterdam 22 (1914), S. 1063 f.

Die Integraldarstellung der Polynome (4) lautet[7])

$$(13)\qquad G_{mn}(x,y)=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(x,\mathfrak{y})\right](-i)^{m+n}$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)+i(x\,u+\mathfrak{y}\,v)\right]u^m v^n\,du\,dv.$$

Damit und mit dem entsprechenden Ausdruck der $G_{mn}(X,Y)$ bildet man die Summe

$$(14)\qquad G=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}G_{mn}(x,y)\,G_{mn}(X,Y)$$

$$=\frac{\Delta}{4\pi^2}\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(x,\mathfrak{y})+\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\right]\sum_{m,n}^{0,\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega\,\omega_{mn}\,du\,dv\,dU\,dV,$$

wo kurz

$$\Omega(u,v,U,V)=\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)-\tfrac{1}{2}\varphi(U,V)+i(x\,u+\mathfrak{y}\,v+\mathfrak{X}\,U+\mathfrak{Y}\,V)\right],$$

$$\omega_{mn}(u,v,U,V)=(-1)^{m+n}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}u^m v^n U^m V^n.$$

Hier darf man die Reihenfolge von Integration und Summierung umkehren, wenn das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega|\sum_{m,n}^{0,\infty}|\omega_{mn}|\,du\,dv\,dU\,dV$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)-\tfrac{1}{2}\varphi(U,V)\right]$$
$$\cdot\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{|s\,u\,U|^m}{m!}\frac{|t\,v\,V|^n}{n!}\,du\,dv\,dU\,dV$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\varphi(u,v)+\varphi(U,V)\right.\right.$$
$$\left.\left.-2|s\,u\,U|-2|t\,v\,V|\right]\right\}du\,dv\,dU\,dV$$

konvergiert. Das ist aber der Fall, wenn die in der letzten eckigen Klammer enthaltene quadratische Form der vier Veränderlichen u,v,U,V, in der wir

$$(15)\qquad |s|=\sigma,\quad |t|=\tau$$

---

[7]) A.-K., S. 376. Die dortige Formel (37) hat eine von unserer (13) etwas abweichende Gestalt; um auf (13) zu kommen, ersetze man in der ersten Formel der dortigen Nr. CXXIII u durch $u-i\,x$, v durch $v-i\,y$ und führe statt x,y die Größen (6) ein. Dann bilde man die $G_{mn}(x,y)$ nach (4).

setzen, entschieden positiv ist; sie ist es, wenn[8]) die vier Hauptminoren ihrer Diskriminante[9])

$$D = \begin{vmatrix} a & b & -\sigma & 0 \\ b & c & 0 & -\tau \\ -\sigma & 0 & a & b \\ 0 & -\tau & b & c \end{vmatrix}$$

positiv sind. Ihre Ausrechnung führt zu den Bedingungen

(16) $a > 0$, (17) $ac - b^2 = \Delta > 0$, (18) $a\Delta - c\sigma^2 > 0$,

(19) $(\sigma\tau + \Delta)^2 - (c\sigma + a\tau)^2 > 0.$

Hiervon gelten (16), (17) nach (5). In $\mathfrak{h}$ (9) trifft (18) zu, weil dort $\sigma \leqq c^{-1}\Delta$, also

$$a\Delta - c\sigma^2 \geqq a\Delta - c^{-1}\Delta^2 = c^{-1}\Delta(ac - \Delta) = b^2 c^{-1}\Delta > 0$$

ist. Schließlich ist in $\mathfrak{h}$ auch (19) erfüllt; denn dort ist nach (9) im ersten und dritten Quadranten

$$(st + \Delta)^2 - (cs + at)^2 > 0,$$

im zweiten und vierten aber

$$(st - \Delta)^2 - (cs - at)^2 > 0.$$

Mithin ist in (14) die Reihenfolge der genannten Verfahren umkehrbar, und es gilt daher auch

(20) $$G = \frac{\Delta}{4\pi^2} \exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\right] \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, dv\, dU\, dV$$

$$\cdot \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u, v) - \tfrac{1}{2}\varphi(U, V) - su\,U - tv\,V + i(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v + \mathfrak{X}U + \mathfrak{Y}V)\right].$$

Jetzt führen wir der Reihe nach die vier Integrationen nach V, U, v, u durch, indem wir jedesmal die Formel[10]) benutzen

(21) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2 + 2i\alpha\beta)\, d\alpha = \sqrt{\pi}\exp(-\beta^2).$$

Sie liefert für das Integral

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{c}{2}V^2 + iV[\mathfrak{Y} + i(tv + bU)]\right\} dV$$

$$= \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\mathsf{M}^2 + i\mathsf{M}\sqrt{\frac{2}{c}}[\mathfrak{Y} + i(tv + bU)]\right\} d\mathsf{M}$$

---

[8]) Vgl. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (1909), S. 230—239.

[9]) Ich schreibe D nur bei positiven Werten der Veränderlichen an; sind diese teilweise oder sämtlich negativ, so ergeben sich Bedingungen, die mit (16), (17), (18), (19) gleichfalls befriedigt sind.

[10]) Vgl. Watson [2]), S. 198.

mit $V = \sqrt{\frac{2}{c}}\,\mathsf{M}$ ($c > 0$ nach (5)) den Wert

$$J_1 = \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2}{c}}\exp\left\{-\frac{1}{2c}\left[\mathfrak{Y} + i(tv + bU)\right]^2\right\};$$

daher wird aus (20)

$$(22)\qquad G = \frac{\Delta}{4\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{c}}\exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\mathfrak{Y}^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(u,v) + \frac{1}{2c}t^2v^2 + i\left(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v - \frac{1}{c}t\mathfrak{Y}v\right)\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dU\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(a - \frac{b^2}{c}\right)U^2 + iU\left[\mathfrak{X} - \frac{b}{c}\mathfrak{Y} + i\left(su - \frac{b}{c}tv\right)\right]\right\}.$$

Das letzte, nach U zu nehmende Integral ermittelt man nach (21) mit der Einsetzung $U = \sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\,\Lambda$, in der $c\Delta^{-1} > 0$ nach (5), und mit Rücksicht auf (10) zu

$$J_2 = \sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\Lambda^2 + i\Lambda\sqrt{\frac{2}{c\Delta}}\left[\Delta X + i(csu - btv)\right]\right\}d\Lambda$$
$$= \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2c\Delta}\left[\Delta X + i(csu - btv)\right]^2\right\};$$

folglich vereinfacht sich (22) zu

$$(23)\qquad G = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\mathfrak{Y}^2 - \frac{\Delta}{2c}X^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} du\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a - \frac{cs^2}{\Delta}\right)u^2 + i(\mathfrak{x} - sX)u\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dv\exp\left\{-\frac{c\Delta - at^2}{2\Delta}v^2 + iv\left[\mathfrak{y} + \frac{bt}{c}X - \frac{t}{c}\mathfrak{Y} + ib\left(1 + \frac{st}{\Delta}\right)u\right]\right\}.$$

Unter dem letzten, nach v zu bildenden Integrale J_3 ist der Faktor von $-v^2$ in $\mathfrak{h}$ (9) entsprechend (18) positiv. Setzt man in J_3

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\,\mu,$$

so ergibt (21) mit Hilfe von (10)

$$J_3 = \sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\mu^2 + i\mu\sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\left[\mathfrak{y} - tY + i\frac{b}{\Delta}(\Delta + st)u\right]\right\}d\mu$$
$$= \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\exp\left\{-\frac{\Delta}{2(c\Delta - at^2)}\left[\mathfrak{y} - tY + i\frac{b}{\Delta}(\Delta + st)u\right]^2\right\};$$

mithin geht (23) über in

$$(24)\quad G = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}} \exp\Big[\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\mathfrak{Y}^2$$

$$- \frac{\Delta}{2c}X^2 - \frac{\Delta}{2(c\Delta - at^2)}(\mathfrak{y} - tY)^2\Big] \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[a - \frac{cs^2}{\Delta} - \frac{b^2(\Delta+st)^2}{\Delta(c\Delta - at^2)}\Big]u^2$$

$$+ iu\Big[\mathfrak{x} - sX - b\frac{\Delta+st}{c\Delta - at^2}(\mathfrak{y} - tY)\Big]\Big\}.$$

In dem jetzt noch verbliebenen Integrale J_4 bringt man die erste eckige Klammer leicht auf die Gestalt

$$\frac{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}{c\Delta - at^2}$$

und findet sie positiv; denn von dem Nenner wurde dies bei J_3 vermerkt, und der Zähler ist entweder gleich der linken Seite von (19), oder ist gleich

$$(\Delta - \sigma\tau)^2 - (c\sigma - a\tau)^2 = (\Delta + \sigma\tau)^2 - (c\sigma + a\tau)^2 + 4b^2\sigma\tau.$$

Wir setzen in J_4

$$u = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}}{\sqrt{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}}\lambda$$

und wenden (21) an; dann erhalten wir

$$J_4 = \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}}{\sqrt{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}}$$

$$\cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{c\Delta - at^2}{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}\Big[\mathfrak{x} - sX - b\frac{\Delta+st}{c\Delta - at^2}(\mathfrak{y} - tY)\Big]^2\Big\}.$$

Tragen wir diesen Wert in (24) ein, so ergibt sich bei Beachtung von (7)

$$G = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}} \exp\Big\{\frac{1}{2}\varphi(x,y) + \frac{1}{2}\varphi(X,Y)$$

$$- \frac{1}{2c}(bX + cY)^2 - \frac{\Delta}{2c}X^2 - \frac{\Delta}{2(c\Delta - at^2)}(bx + cy - tY)^2$$

$$- \frac{1}{2[(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2](c\Delta - at^2)}[(\Delta^2 - b^2st - a^2t^2)x - bt(cs+at)y$$

$$- s(c\Delta - at^2)X + bt(\Delta+st)Y]^2\Big\}.$$

Wenn man den Inhalt der geschweiften Klammer als eine quadratische Form der vier Veränderlichen x, y, X, Y schreibt, so findet man als deren Vorzahlen durch einfachste Rechnung gerade die in (8) angegebenen Werte.

Die Formeln (8), (11) lassen sich in der Funktionalrechnung verwerten, wie ich ein andermal darzulegen hoffe.

(Eingegangen am 29. Juni 1937.)

Inequalities connected with binary derivation, integrated Lipschitz conditions and Fourier series.

By

L. C. Young in Cambridge (England).

1. Introduction. The inequalities considered in this note have a certain similarity with those I obtained lately for Stieltjes integrals, but are proved more simply. They show how, by the method of "binary derivation", information concerning the ordinary *Lebesgue Faltung* of two functions can be used to draw conclusions regarding their *Stieltjes integral*, and they are applied here to study classes of functions obeying certain integrated Lipschitz conditions.

The paper concludes with some remarks concerning Fourier series.

2. Binary derivation and Faltung. Let $F(u)$ be defined for $u \geqq 0$ and let $\{h\}$ denote the "binary sequence" consisting of the numbers $h\,2^{-\nu}$ for $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. We define the "binary derivative at 0"

$$F_{\{h\}} = \lim_{\nu \to \infty} \{F(h\,2^{-\nu}) - F(0)\}\, 2^{\nu}/h.$$

Binary derivation (which is a special case of "network derivation") has been used in several recent important investigations (Besicovitch [2], Saks and Zygmund [12], Saks [11] Chap. VI, §§ 4, 5).

Suppose now that f, g are functions of a real variable, with the period Λ. We choose

$$F(t) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} f(x+t)\, g(x)\, dx$$

the ordinary Lebesgue Faltung of f and g. Let us write, for $n = 1, 2, \ldots,$

$$S_n(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\Lambda\right) \left\{ g\left(x + \frac{k}{n}\Lambda\right) - g\left(x + \frac{k-1}{n}\Lambda\right)\right\}$$

(so that $S_1(x) = 0$ by periodicity) and

$$\overline{S}_n = \overline{S}_n(f, g) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} S_n(x)\, dx.$$

If the Faltung $F(t)$ exists and is finite for all t, we clearly have, by periodicity, the relation

$$\overline{S}_n = \frac{n}{\Lambda} \left\{F(0) - F\left(\frac{\Lambda}{n}\right)\right\}.$$

It follows that the bilinear functional of f, g

$$I(f,g) = \lim_{\nu \to \infty} \overline{S}_{2^\nu}$$

differs only in sign from a binary derivative of F.

The functional $I(f,g)$ may be regarded as a generalisation of a Stieltjes integral. It satisfies, as is easily seen, the relation

$$I(f,g) = I(\bar{g},\bar{f})$$

where $\bar{g}(x) = g(-x)$, $\bar{f}(x) = f(-x)$; and this relation takes the place of integration by parts. Moreover, when f, g have a Stieltjes integral over their period in the Riemann sense, this integral must agree with $\Lambda \cdot I(f,g)$, since it is, uniformly in x, the (constant) limit of $\Lambda S_n(x)$ as $n \to \infty$. Whenever convenient we shall therefore use in the sequel the same notation for $I(f,g)$ as for a Stieltjes integral and write it in the form

$$\frac{1}{\Lambda}\int_{(\Lambda)} f(x)\,dg(x)$$

where (Λ) denotes any period, simply adding where necessary that this integral is to be understood in the sense of the operation I.

$I(f,g)$ is not related so simply to the Lebesgue-Stieltjes integral. For on the one hand it cannot include the latter, since Lebesgue-Stieltjes integrals do not fulfil the relation of integration by parts (even when the two functions concerned are of bounded variation). And on the other hand it includes, as we shall see, important types of Lebesgue-Stieltjes integrals and also a number of types of integrals which are not Lebesgue-Stieltjes integrals.

3. Expression of an F. Riesz functional in $L_p, L_{p'}$ in terms of $I(f,g)$. Let f and g' be periodic functions belonging to the conjugate Lebesgue classes $L_p, L_{p'}$, i. e. functions of period Λ such that

$$\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda |f|^p\,dx < \infty, \quad \frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda |g'|^{p'}\,dx < \infty \quad \left(p > 0, p' > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

By the "F. Riesz functional" (F. Riesz [10]) we mean the Lebesgue integral

$$L(f,g') = \frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda f(x)\,g'(x)\,dx.$$

We shall prove that

(3. 1) $$L(f,g') = I(f,g)$$

where g is the indefinite Lebesgue integral of g', provided only that g is periodic.

This relation holds also in the limiting cases $p = \infty$ or $p' = \infty$, when the hypotheses are interpreted to mean that one of the functions f, g' is bounded and measurable, and the other Lebesgue integrable. We shall, however, exclude these limiting cases as their discussion is trivial.

We have to show that

$$\{F(0) - F(h)\}/h \to L(f, g')$$

as $h \to 0$ by the binary sequence $\{\Lambda 2^{-\nu}\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Actually this relation will be established as $h \to 0$ in *any* manner. We have

$$\{F(0) - F(h)\}/h = \frac{1}{\Lambda h}\int_0^{\Lambda} f(x)\{g(x) - g(x-h)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Lambda h}\int_0^{\Lambda} dx \int_{-h}^{0} dt\, f(x)\, g'(x+t).$$

Hence this differs from $L(f, g')$ by at most

$$\frac{1}{\Lambda h}\int_0^{\Lambda} dx \int_{-h}^{0} dt\, |f(x)\{g'(x) - g'(x+t)\}|;$$

and here we may invert the order of integration, the integrand being non-negative, and apply Hölder's inequality. It then becomes

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} dt \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} dx\, |f(x)\{g'(x) - g'(x+t)\}|$$

$$\leqq \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} \left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |f|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g'(x) - g'(x+t)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} dt$$

and this tends to zero with h, since

$$\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g'(x) - g'(x+t)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'}$$

tends to zero as $t \to 0$ (cf. Hobson [7], p. 613).

4. The second difference of F and the fundamental inequalities. Binary derivatives depend in a simple manner on the second difference ratio

$$\{F(2u) - 2F(u) + F(0)\}/2u^2 = \left\{\frac{F(2u) - F(0)}{2u} - \frac{F(u) - F(0)}{u}\right\}\Big/ u.$$

In fact, if we denote by a_ν the value of this ratio and by A_ν that of $\{F(u) - F(0)\}/u$, when $u = h2^{-\nu}$, we have the identity

$$A_{\nu-1} - A_\nu = h 2^{-\nu} a_\nu$$

so that

$$F_{(h)} = \lim_{\nu} A_\nu = A_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} h\, 2^{-\nu} a_\nu. \tag{4.1}$$

In particular when F is the Faltung of f and g, we have therefore

$$I(f,g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \{F(\Lambda 2^{-(\nu-1)}) - 2F(\Lambda 2^{-\nu}) + F(0)\} 2^{\nu-1}/\Lambda$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu-1}}{\Lambda^2} \int_0^{\Lambda} \{f(x+\Lambda 2^{-\nu}) - f(x)\} \{g(x) - g(x-\Lambda 2^{-\nu})\}\, dx. \tag{4.2}$$

We shall be concerned in this note chiefly with the case in which this series is *absolutely* convergent.

(4.3) Theorem. *Suppose that for the binary values $u = h2^{-\nu}$ where $h > 0$ and $\nu = 1, 2, \ldots$, we have*

$$|F(2u) - 2F(u) + F(0)|/2u^2 \leqq \varphi(u)$$

where $u^2\varphi(u)$ is monotone increasing and $\varphi(u)$ integrable for non-negative u in the neighbourhood of $u = 0$. Then the binary derivative of F exists for the sequence $\{h\}$ and we have

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} - F_{(h)} \right| \leqq \int_0^h \varphi(u)\, du. \tag{4.4}$$

The proof is immediate from (4.1) since the series which occurs there is majorised absolutely by the series

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(h2^{-\nu})(h2^{-\nu})^2 2^{\nu}/h \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{h2^{-\nu}}^{h2^{-(\nu-1)}} u^2 \varphi(u) \frac{du}{u^2}$$

if $u^2\varphi(u)$ is monotone increasing.

It may be observed that if, instead of this last hypothesis, we suppose $\varphi(u)$ monotone decreasing, the conclusion of the theorem would also hold, provided that we change the right hand side of (4.4) to

$$2\int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(u)\, du; \tag{4.5}$$

or more generally, since monotony is used only in binary intervals, we may suppose that in each binary interval $[h2^{-\nu}, h2^{-(\nu-1)}]$ one at least of the functions $u^2\varphi(u)$ and $\varphi(u)$ is monotone increasing or decreasing, provided that we add (4.5) to the right hand side of (4.4).

(4.6) Corollary. *With the same conditions on $\varphi(u)$, if we have for each n,*

$$|F_n(2u) - 2F_n(u) + F(0)|/2u^2 \leqq \varphi(u)$$

the convergence of $F_n(u)$ for each binary u to $F(u)$ implies the convergence of the binary derivative of F_n to that of F.

We can in fact select a binary value $u = h2^{-\nu_0}$ independent of n, for which the difference ratios

$$\{F_n(u) - F_n(0)\}/u \qquad \text{and} \qquad \{F(u) - F(0)\}/u$$

differ by at most $\frac{1}{3}\varepsilon$ from the corresponding binary derivatives. For all large n, the binary derivative of F_n cannot therefore differ from that of F by more than ε, so that the assertion follows.

Let us state explicitely the corresponding results for $I(f, g)$ in terms of the Faltung of f and g.

(4.7) Theorem. *Suppose that for the binary values $u = \Lambda 2^{-\nu}$ where $\nu = 1, 2, \ldots$, the Faltung of f and g is finite and*

$$\left| \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \{f(x+u) - f(x)\} \{g(x) - g(x-u)\} \, dx \right| \leqq 2u^2 \varphi(u)$$

where $\varphi(u)$ satisfies the conditions laid down in Theorem (4.3). Then $I(f, g)$ exists and we have

$$|I(f, g)| \leqq \int_0^{\Lambda} \varphi(u) \, du.$$

(4.8) Theorem. *With the same conditions on $\varphi(u)$, suppose that for the binary values $u = \Lambda 2^{-\nu}$ where $\nu = 1, 2, \ldots$, we have for each n*

$$\left| \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \{f_n(x+u) - f_n(x)\} \{g_n(x) - g_n(x-u)\} \, dx \right| \leqq 2u^2 \varphi(u)$$

and that the Faltung of f and g is (for each binary u) the finite limit of the corresponding Faltung of f_n and g_n. Then $I(f_n, g_n) \to I(f, g)$.

These results, which are special cases of (4.3) and (4.6), follow from (4.2). They have of course variants in which $\varphi(u)$ is monotone decreasing in any binary interval in which $u^2 \varphi(u)$ is not monotone increasing.

It is convenient to specialise still further Theorem (4.7) as follows:

4.9 Theorem. *Suppose that f, g are of period Λ, that their ordinary Lebesgue Faltung is finite at each point, and that, for $0 < h \leqq \frac{1}{2}\Lambda$*

$$\left\{ \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqq \varphi_1(h),$$

$$\left\{ \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} |g(x+h) - g(x)|^{p'} \, dx \right\}^{1/p'} \leqq \varphi_2(h)$$

where p, p' are conjugate indices $[p > 0, \; p' > 0, \; (1/p) + (1/p') = 1]$ and where $\varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u)$ is monotone increasing for $u \geqq 0$ and $\varphi_1(u) \, \varphi_2(u)/u^2$ is integrable in a neighbourhood of $u = 0$ on the right. Then $I(f, g)$ exists and we have

$$|I(f, g)| \leqq \int_0^{\Lambda} \frac{\varphi_1(u) \, \varphi_2(u)}{2u^2} \, du.$$

This theorem, which will be of constant use, follows at once from Theorem (4. 7) when we choose $\varphi(u) = \varphi_1(u)\,\varphi_2(u)/2u^2$, since the expression

$$\left|\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda}\{f(x+h)-f(x)\}\,\{g(x)-g(x-h)\}\,dx\right|$$

is majorised (on account of Hölder's inequality) by $\varphi_1(h)\,\varphi_2(h)$.

The formal similarity between the above inequalities and those obtained elsewhere in terms of total higher variations (Young [14], [15], [16], cf. also Love and Young [8], [9]) becomes more apparent when we replace the integral

$$\int \varphi(u)\,du \qquad \text{or} \qquad \int \frac{\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)}{2u^2}\,du$$

by the series

$$\sum n^2\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{or} \qquad \sum \varphi_1\left(\frac{1}{n}\right)\varphi_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

apart from a factor which is an absolute constant. Evidently the integral and the series converge or diverge together and their ratio is $O(1)$.

5. Integrated Lipschitz conditions. We shall extend a little the notation of Hardy and Littlewood [3], [4], [5], so as to include a logarithmic scale instead of only powers of h in the order of magnitude of the mean differences concerned. (The logarithmic scale occurs already in the classical form of the Lipschitz conditions as used for instance in the familiar convergence criterion of Dini-Lipschitz for a Fourier series.)

We shall denote by $\mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ the class of all functions f of L_p in a period Λ, that satisfy for $0 < h \leqq \frac{1}{2}\Lambda$ the condition

$$\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqq K\,\tilde{\alpha}(h) \tag{5. 1}$$

where p is an index $\geqq 1$, $\tilde{\alpha}(u)$ a monotone increasing function of u defined for $u \geqq 0$, and K a constant depending on f: this constant K may be regarded as a functional of f and is then convex and homogeneous, so that it represents the *magnitude* of the vector f in a metric of the vector space formed by the functions f.

When $\tilde{\alpha}(u)$ has the form u^{α}, α being a non-negative real number, the class $\mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ will be written simply $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ in agreement with Hardy and Littlewood.

In defining the classes $\mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ the restrictions $f \prec L_p$ and $\tilde{\alpha}(u)$ monotone increasing, might have been relaxed. It may be observed however that a function $f \prec L$ subject to (5. 1) where $\tilde{\alpha}(u) \prec L_p$ belongs to $\mathrm{Lip}(0, p)$ in the sense given above, since the relations

$$K^p\int_0^{\Lambda}[\tilde{\alpha}(u)]^p\,du \geqq \frac{1}{\Lambda}\int\!\!\int |f(x+u)-f(x)|^p\,dx\,du$$

$$= \int_0^{\Lambda}dx\left|\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda}\{f(x+u)-f(x)\}\,du\right|^p = \int_0^{\Lambda}dx\,|c-f(x)|^p$$

(where c is the mean value of f over a period) show that $f \prec L_p$. We should not therefore have introduced more extensive classes of functions if instead of $f \prec L_p$ and $\tilde{\alpha}(u)$ monotone increasing we had supposed only that $f \prec L$ and that $\tilde{\alpha}(u) \prec L_p$.

We shall denote further by W_p the class of functions of period A which have, in a period, bounded p-th power variation (or bounded higher variation of order p) (cf. Wiener [13], Young [14]).

(5.2) Theorem. *Suppose that* $f \prec \mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ *and that for a value of* $q \geqq p$ *the integral*

$$\int \tilde{\alpha}(u)\, u^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1}\, du$$

converges at $u = 0$. *Then* $f \prec L_q$.

(5.3) Theorem. *Suppose that* $f \prec \mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ *and that for a value of* $q \leqq p$ *the integral*

$$\int \tilde{\alpha}(u)\, u^{-\frac{1}{q}-1}\, du$$

converges at $u = 0$. *Then there exists a continuous function* f^* *equal to* f *almost everywhere such that* $f^* \prec W_q$.

We shall require some preliminary lemmas.

The first of these is taken from Hardy, Littlewood, Polya [6] (hereafter cited as H. L. P.), p. 198, Theorem 274.

(5.4). Lemma. *Suppose that*

$$p, q \geqq 1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geqq 1, \quad \varrho, \sigma > 0, \quad \frac{\varrho}{p'}+\frac{\sigma}{q'} = 1,$$

$$\int_0^1 |h(x,y)|^{\varrho}\, dx \leqq A, \quad \int_0^1 |h(x,y)|^{\sigma}\, dy \leqq B, \quad \int_0^1 |f(x)|^p\, dx \leqq X, \quad \int_0^1 |g(y)|^q\, dy \leqq Y;$$

then

$$\Big|\int_0^1\int_0^1 h(x,y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy\Big| \leqq A^{1/p'} B^{1/q'} X^{1/p} Y^{1/q}.$$

Proof of lemma 5.4. Supposing as we may f, g, h non-negative, we rewrite the left hand side in the form

$$\int_0^1\int_0^1 (h^{\sigma} f^p)^{1/q'} (h^{\varrho} g^q)^{1/p'} (f^p g^q)^{1-(1/p')-(1/q')}\, dx\, dy$$

and observe that this is majorised by

$$\Big(\int_0^1\int_0^1 h^{\sigma} f^p\, dx\, dy\Big)^{1/q'} \Big(\int_0^1\int_0^1 h^{\varrho} g^q\, dx\, dy\Big)^{1/p'} \Big(\int_0^1\int_0^1 f^p g^q\, dx\, dy\Big)^{1-(1/p')-(1/q')},$$

on account of Hölder's inequality (cf. H. L. P., p. 22, Theorem 11). The required inequality then follows at once.

(5.5) Lemma. *If g is the indefinite integral of a function $g' \prec L_\mu$ and $p' \geqq 1$, $0 < 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{p'} \leqq 1$, then*

$$\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g(x+h) - g(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} \leqq \left(\frac{h}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{p'}+1-\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{\Lambda}\int |g'|^{\mu}\, dx\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

We have in fact, by the converse of Hölder's inequality, supposing $\Lambda = 1$ without loss of generality

$$(5.6)\quad \left(\int_0^1 |g(x+h) - g(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'} = \text{upper bound} \int_0^1 f(x)[g(x+h) - g(x)]\, dx$$

for all functions f such that $\int_0^1 |f|^p\, dx = 1$. The integral on the right of (5.6) is expressible in the form

$$\int_0^1 \int_0^1 g'(x+y) f(x) h(y)\, dx\, dy,$$

where $h(y) = 1$ if $0 \leqq y \leqq h$, and $h(y) = 0$ otherwise. Hence, choosing $\varrho = \sigma = \mu$ and defining q by the relation $1/q' = (1/\mu) - (1/p')$ (so that $q \geqq 1$), the conditions of lemma (5.4) will be satisfied and we find that our double integral is majorised by

$$\left(\operatorname*{Max}_y \int_0^1 |g'(x+y)|^{\mu}\, dx\right)^{1/p'} \left(\operatorname*{Max}_x \int_0^1 |g'(x+y)|^{\mu}\, dy\right)^{1/q'} \left(\int_0^1 |h(y)|^q\, dx\right)^{1/q}$$

that is to say by

$$h^{1/q}\left(\int_0^1 |g'(x)|^{\mu}\, dx\right)^{1/\mu},$$

which proves the lemma.

(5.7). Lemma. *If $g \prec W_{q'}$, then $g \prec \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{q}, q'\right)$ and*

$$\int |g(x+h) - g(x)|^{q'}\, dx \leqq V_{q'}^{q'}(g) \cdot h.$$

This is proved in Young [14], p. 259, $V_p(f)$ denoting (for any function f and for any number $p > 0$) the mean variation of order p.

(5.8). Lemma. *If $f \prec \mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; p)$ then $f \prec \mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; q)$ for $q \leqq p$.*

We have in fact

$$\left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \leqq \left(\int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

by a well known property of mean values (cf. H. L. P., p. 26, Theorem 16).

Proof of Theorems (5.2) and (5.3). Let f satisfy the conditions postulated in (5.2) and let g be any function of period Λ which is the indefinite integral of $g' \prec L_{q'}$. Then by (5.5)

$$\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g(x+h)-g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \leqq \left(\frac{h}{\Lambda}\right)^{1-(1/p)+(1/q)} \left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g'|^q\,dx\right)^{1/q'},$$

and therefore, by Theorem (4.9), $I(f, g)$ exists and is majorised by

$$K\left(\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |g'|^{q'}\,dx\right)^{1/q'}$$

where K depends on f but not on g.

Similarly, if f satisfies the conditions postulated in (5.3) and if g is any function of $W_{q'}$, then, by (5.7) applied to g and (5.8) applied to f, we have $g \prec \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{q'}, q'\right)$ and $f \prec \mathrm{Lip}(\tilde{\alpha}; q)$, and therefore by Theorem (4.9), $I(f, g)$ exists and is majorised by $K V_{q'}(g)$.

Thus $I(f, g)$ is, in either case, a linear functional of g, $L(g)$, defined for a certain field of periodic functions g and majorised by a convex functional. By a theorem of Banach ([1], p. 28) which extends to functional spaces the principle of the "flat support" (Stützebene), $L(g)$ can be continued with the same majorant, into the corresponding field of non-periodic g.

We have therefore, in the case corresponding to (5.2)

$$I(f, g) = \int_0^{\Lambda} f^*(x)\, g'(x)\,dx$$

where $f^* \prec L_q$; and in the case corresponding to (5.3)

$$I(f, g) = \int_0^{\Lambda} f^*(x)\,dg(x)$$

where $f^* \prec W_q$ (cf. for the former case F. Riesz [10], Banach [1], p. 64; and for the latter case Love and Young [8]), these relations being valid for the class of periodic functions g considered, or else for a smaller class which, however, certainly includes trigonometric polynomials. It therefore follows that in either case f and f^* are functions of L_p with the same Fourier coefficients except for the constant term; and this requires $f - f^*$ to be constant almost everywhere.

This completes the proof of Theorem (5.2). As regards Theorem (5.3) we may now suppose $f \prec W_q$ and $f(x) = \{f(x+0) + f(x-0)\}/2$,

and it only remains to prove f continuous. But if for some x_0 we have $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|^p > 2\eta > 0$, then for all small h

$$\int_{x_0-h}^{x_0} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx > \eta h$$

and therefore $\tilde{\alpha}(u) > K u^{1/p}$ for all small u, so that

$$\int \tilde{\alpha}(u)\, u^{-\frac{1}{q}-1}\,du > K\int u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\,du \geqq \int u^{-1}\,du$$

diverges at $u=0$ contrary to our hypothesis. This completes the proof of Theorem (5.3).

In the case $\tilde{\alpha}(u) = u^{\alpha}$, Theorem (5.2) was established by Hardy and Littlewood [3] and Theorem (5.3) by Love and Young [8]. Both theorems were proved for this case by means of fractional integration. Hardy and Littlewood obtained also a slightly more precise result in the case of a function which is a fractional integral of order α of a function of L_p.

6. Remarks on the convergence of Fourier series and Fourier integrals. By employing the methods of §4 [cf. particularly Theorem [4.8)], we can obtain results which include those derived elsewhere in terms of generalised higher Wiener variations, in regard to the convergence problem of Fourier series or integrals.

Let us recall the results formerly derived (Young [14, 15, 16]). The first asserts the *convergence of the Fourier series of a function of* W_p together with that of the Cesaro means of negative order greater than $-1/p$. As remarked at the time, although this result had not been previously stated (Wiener [13] proved only convergence *almost everywhere* for general p, and convergence everywhere when $p=2$), it follows easily from a theorem of Hardy and Littlewood [4, Theorem 1] for a function of $\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{p}, p\right)$. We may add that the convergence of the series (but not that of any negative Cesaro means) can even be deduced from a slightly generalised form of a *classical* criterion of Lebesgue; this follows from remarks made by Hardy and Littlewood [4, footnote [6]) of pp. 613—614] in connection with their theorem.

A more general result, obtained later, asserts *the convergence of the Fourier series of a function having bounded higher variation of certain exponential orders.* This time, the assertion does not appear to be deducible in any simple way from any known classical criterion, and is quite independent of the Hardy-Littlewood theorem referred to above. Also, in the case of a function f subject to

$$f(x+h)-f(x) = O(|\log|h||^{-\lambda})$$

uniformly in x, it enables us to assert the convergence of the Fourier series only when $\lambda > 2$, whereas the classical Dini-Lipschitz criterion then asserts this up to $\lambda = 1$ provided that O is replaced by o. The problem whether the range of exponential orders of bounded higher variation which ensures convergence can be extended so as to correspond with the general case of the Dini-Lipschitz condition, and the problem of exponential generalisations of the Hardy-Littlewood theorem, are still open.

In order to apply the methods of § 4, we write the partial sums of the Fourier series of a function $f(x)$ (of period 2π) in the form

$$s_n(x, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

$$= \int_0^{\infty} h(u)\,d\,g[(n+\tfrac{1}{2})u] = s(x) + \int_0^{\infty} f_n(t)\,d\,g(t)$$

where (for constant x, and for an arbitrary choice of the number $s(x)$)

$$g(t) = \int_{-t}^{t}\frac{\sin v}{\pi v}\,dv,$$

$$f_n(t) = h[t/(n+\tfrac{1}{2})] - s(x),$$

$$h(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+u)+f(x-u)]\,u/(2\sin\frac{1}{2}u) & \text{for } 0 \leqq u \leqq \pi, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We obtain a similar expression for the Fourier simple integral of a function $f(x)$ (this time defined in $(-\infty, \infty)$ without the restriction of periodicity)

$$J_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}\,du = \int_0^{\infty} h(u)\,d\,g(nu) = s(x) + \int_0^{\infty} f_n(t)\,d\,g(t)$$

where $g(t)$ is defined as before, and where this time

$$f_n(t) = h(t/n) - s(x), \qquad h(u) = \tfrac{1}{2}[f(x+u)+f(x-u)].$$

Our methods do not distinguish between the two cases. We write

$$\int_0^{\infty} f_n(t)\,d\,g(t) = \int_0^{A} f_n^*(\tau)\,d\,g^*(\tau) = \int_0^{A} f_n^*(\tau)\,d\,g^*(\tau),$$

the functions f_n^* and g^* being defined in $[0, A)$ by means of the correspondence $\tau = \omega(t)$ and then extended so as to have the period $A = 4A$, as follows

$$f_n^*(\tau) = \begin{cases} f_n(t) & \text{for } 0 \leqq \tau = \omega(t) < A, \\ 0 & \text{for } A \leqq \tau < 4A; \end{cases}$$

$$g^*(\tau) = \begin{cases} g(t) & \text{for } 0 \leqq \tau = \omega(t) < A, \\ 1 & \text{for } A \leqq \tau \leqq 2A, \\ g^*(3A-\tau) & \text{for } 2A \leqq \tau \leqq 3A, \\ 0 & \text{for } 3A \leqq \tau < 4A. \end{cases}$$

Of the function $\omega(t)$ which defines the correspondence, and which will be chosen in a special way, we shall always suppose that it has a

bounded continuous derivative and that it increases strictly from 0 to A as t ranges from 0 to ∞.

It is easy to see that given $q > 1$, we can determine $\omega(t)$ so that

$$|g^*(\tau) - g^*(\tau - h)| = O(h^{1/q}) \tag{6.1}$$

uniformly in τ for all small $h > 0$. In fact, given α and β, where $0 < \alpha < \beta$, there exist α', β' where $\alpha \leqq \alpha' \leqq \beta' \leqq \beta$ and $\beta' - \alpha' \leqq \pi$, such that

$$g(\beta) - g(\alpha) = 2\left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| = 2\left|\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leqq 4\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dt}{1+t}.$$

Hence by Hölder's inequality

$$|g(\beta) - g(\alpha)| \leqq 4(\beta' - \alpha')^{1/q'}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{(1+t)^q}\right\}^{1/q} \leqq 4\pi^{1/q'}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{(1+t)^q}\right\}^{1/q}$$

and (6.1) follows at once when we choose $\omega(t) = \int_0^t (1+t)^{-q}\, dt$.

By a suitable choice of $\omega(t)$ the relation (6.1) can be strengthened to

$$|g^*(\tau) - g^*(\tau - h)| = O(h\,|\log|h||^{\gamma}) \tag{6.2}$$

where γ is any fixed number exceeding 1. To see this let $\Psi(u)$ denote for $0 \leqq u \leqq 1/e$ the convex monotone function $u/|\log u|^{\gamma}$, and let Ψ^{-1} denote the inverse function. Then by convexity

$$|g(\beta) - g(\alpha)| \leqq 4e\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dt}{(1+t)e} \leqq 4e(\beta' - \alpha')\,\Psi^{-1}(v)$$

where

$$v = \frac{1}{\beta' - \alpha'}\int_{\alpha'}^{\beta'} \Psi[1/(e + et)]\, dt.$$

Now if $v = \Psi(u)$, we have $v \leqq u \leqq 1/e$ and so

$$\Psi^{-1}(v) = u = v[\log(1/u)]^{\gamma} \leqq v[\log(1/v)]^{\gamma}.$$

Also, writing $V = (\beta' - \alpha')v/\pi$, we have $e \leqq 1/v \leqq 1/V$. Hence

$$\Psi^{-1}(v) \leqq v[\log(1/V)]^{\gamma}$$

and therefore

$$|g(\beta) - g(\alpha)| \leqq 4\pi e V[\log(1/V)]^{\gamma}$$

where

$$V = \frac{1}{\pi e}\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dt}{(1+t)[\log(e+et)]^{\gamma}} \leqq \frac{1}{\pi e}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{(1+t)[\log(e+et)]^{\gamma}}$$

and (6.2) follows when we choose

$$\omega(t) = \frac{1}{\pi e} \int_0^t \frac{dt}{(1+t)[\log(e+et)]^\gamma}.$$

This being so, Theorem (4.8) now enables us to assert that as $n \to \infty$,

$$\int_0^\Lambda f_n^*(\tau)\, d\, g^*(\tau) \to 0$$

(the integrals being interpreted if necessary in the sense of the operation I), or what amounts to the same that s_n or I_n tends to $s(x)$, provided that both the following conditions are satisfied:

(i) *the ordinary Faltung*

$$F_n(\theta) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda f_n^*(\theta+\tau)\, g^*(\tau)\, d\tau$$

tends to zero as $n \to \infty$, *for each* θ *of the form* $\Lambda 2^{-\nu}$

(ii) *for all binary* h *(of the form* $\Lambda 2^{-\nu}$*) and for all* n,

$$\frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda |f_n^*(\tau+h) - f_n^*(\tau)|\, d\tau \leqq K \tilde{\alpha}(h)$$

where $\tilde{\alpha}(h)$ *is one of the functions* $h^{1/p}$ $(p>0)$, $|\log h|^{-2\gamma}$ $(\gamma > 1)$, *and* K *is a constant independent of* n.

For, when (ii) is satisfied and we choose $\tilde{\beta}(h) = h^{1/q}$ $\left(q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1\right)$ or else $\tilde{\beta}(h) = h|\log h|^\gamma$, we find that the function $\varphi(h) = \tilde{\alpha}(h)\tilde{\beta}(h)|h^2$ satisfies the conditions laid down in Theorem (4.3), and since

$$|g^*(\tau) - g^*(\tau - h)| = O(\tilde{\beta}(h))$$

uniformly in τ, we have

$$\left| \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda [f_n^*(\tau+h) - f_n^*(\tau)]\, [g^*(\tau) - g^*(\tau-h)]\, d\tau \right| \leqq O[h^2 \varphi(h)]$$

so that Theorem (4.8) becomes applicable.

It remains to analyse the conditions (i) and (ii), and to establish their connection with the results formerly derived in terms of higher variations. In order to simplify the discussion, we shall suppose that $f(x)$ is a *bounded* function measurable (B). It then follows that the

functions $f_n(t)$ and $f_n^*(\tau)$ are uniformly bounded, and hence, by Helly's theorem, that (i) is certainly satisfied whenever

$$\int_0^\theta f_n^*(\tau)\,d\tau \to 0$$

as $n \to \infty$ for each θ, i. e. whenever for each T where $0 < T \leqq \infty$,

$$\text{(i a)} \qquad \int_0^T f_n(t)\,d\omega(t) \to 0.$$

And here we may suppose $T < \infty$ since, for sufficiently large N

$$\int_N^\infty f_n(t)\,d\omega(t) < K\int_N^\infty d\omega(t) < \varepsilon.$$

Now for a finite T the condition (i a) is satisfied (on account of Helly's theorem) whenever for each $T_1 \leqq T$

$$\text{(i b)} \qquad \int_0^{T_1} f_n(t)\,dt \to 0$$

since $\omega'(t)$ is continuous and $f_n(t)$ uniformly bounded. Finally, since $(t/n)/\sin(t/n)$ tends uniformly to 1, (i b) will hold if

$$n\int_0^{T_1/n}\{f(x+u)+f(x-u)-2s(x)\}\,du \to 0$$

as $n \to \infty$ by integer and half integer values, and therefore if

$$\text{(i*)} \qquad \int_0^t \{f(x+u)+f(x-u)-2s(x)\}\,du = o(t).$$

Thus (i) *is satisfied by any function f bounded and measurable (B), which fulfills the condition* (i*) *at the point x under consideration.*

In order to examine the condition (i i), let us write for $u \geqq 0$, $\Phi(u) = u^p$ if $\tilde{\alpha}(h) = h^{1/p}$, $\Phi(u) = \exp[u^{-(1/2\gamma)}]$ if $\tilde{\alpha}(h) = |\log h|^{-2\gamma}$. The function $\Phi(u)$ is convex in both cases (since $\Phi''(u) \geqq 0$), and therefore

$$\Phi\left\{\frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda |f_n^*(\tau+h)-f_n^*(\tau)|\,d\tau\right\} \leqq \frac{1}{\Lambda}\int_0^\Lambda \Phi(|f_n^*(\tau+h)-f_n^*(\tau)|)\,d\tau.$$

Here we take $h = \Lambda 2^{-\nu}$ and write $\tau_k = kh$ for $k = 0, 1, \ldots, 2^\nu$, so that

$$\int_0^\Lambda \Phi(|f_n^*(\tau+h)-f_n^*(\tau)|)\,d\tau = \int_0^h \sum_{k=1}^{2^\nu} \Phi(|f_n^*(\tau_k+\theta)-f_n^*(\tau_{k-1}+\theta)|)\,d\theta \leqq h\,W(f_n^*)$$

where $W(f_n^*)$ denotes the „total Φ-variation" of f_n^* in the period Λ, i. e. the upper bound of the expression $\sum_e \Phi(|\Delta_e f_n^*|)$ for non-overlapping Δ_e

in the period Λ. Remembering that $\tilde{\alpha}[\Phi(u)] = u$ by construction of Φ we thus see that

$$\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} |f_n^*(\tau+h) - f_n^*(\tau)|\, d\tau \leqq \tilde{\alpha}(h)\, W(f_n^*)/\Lambda,$$

so that (ii) is satisfied *whenever the numbers* $W(f_n^*)$ *are uniformly bounded*; and since the total Φ-variation is unaffected by a monotone transformation $\tau = \omega(t)$, this is the same as to say: *whenever the numbers* $W(f_n)$ *are uniformly bounded*, where $W(f_n)$ denotes the total Φ-variation of $f_n(t)$ in $0 \leqq t < \infty$; or again, adding the constant $s(x)$, *whenever the numbers* $X(h[t/(n+\frac{1}{2})])$ *or* $W(h[t/n])$ *are uniformly bounded.* But this is clearly the case if and only if $h(u)$ is of bounded Φ-variation, and (the factor $u/(2\sin\frac{1}{2}u)$ being trivial) this will occur whenever $f(x+u)$ is of bounded Φ-variation in u (for positive and negative u), i. e. whenever $f(x)$ is of bounded Φ-variation in x. In other words *the condition* (ii) *is certainly satisfied when* $f(x)$ *is of bounded* Φ*-variation, where* $\Phi(u) = u^p$ $(p \geqq 1)$ *or where* $\Phi(u) = \exp.[u^{-(1/2\gamma)}]$ $(\gamma > 1)$. Since for such a function the limits $f(x \pm 0)$ exist, it is clear that (i*) is satisfied for $s(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ and therefore that (i) holds. We have therefore obtained another proof of the theorems, quoted at the beginning of the §, regarding convergence of the Fourier series of functions of bounded Φ-variation of these two types, and at the same time we have established the corresponding result for the Fourier single integral.

References.

Banach, S.:

[1] Theorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne, Warszawa 1932.

Besicovitch, A. S.:

[2] On conditions for a function to be analytic etc., Proc. London Math. Soc. (2) 32 (1931), S. 1—9.

Hardy G. H. and Littlewood J. E.:

[3] Some properties of fractional integrals I, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 565—606.

[4] A convergence criterion for Fourier series, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 612—634.

[5] Some properties of fractional integrals II, Math. Zeitschr. 34 (1931), S. 403—439.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G.:

[6] Inequalities, Cambridge, 1934.

Hobson, E. W.:

[7] The Theory of Functions of a real variable vol II, 2nd ed. Cambridge, 1926.

Love, E. R. and Young, L. C.:

[8] Sur une classe de fonctionnelles linéaires, Fund. Math. 28 (1937), S. 243—257.

[9] Fractional integration by parts, appearing Proc. London Math. Soc.

Riesz, F.:

[10] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910) S. 449—497.

Saks, S.:

[11] Theory of the integral, Monografje Matematyczne n^0 8, Warszawa 1937.

Saks, S. and Zygmund, A.:

[12] On functions of rectangles and their applications to analytic functions, Ann. Scuola norm. super. Pisa 3 (1934), S. 27—32.

Wiener, N.:

[13] The Quadratic Variation of a function and its Fourier coefficients, Journ. Mass. Inst. of Technology 3 (1924), S. 73—94.

Young, L. C.:

[14] An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration, Acta mathematica 67 (1936), S. 251—282.

[15] Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p-ième de M. Wiener et sur la convergence des séries de Fourier. C. R. Acad. d. Sc. Paris (Febr. 1937).

[16] ... appearing Math. Ann.

(Eingegangen am 22. Mai 1935.)

Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*).

Von

Herbert Forster in München.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Von Poincaré wurde die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + p_1(x; y)}{cx + dy + p_2(x; y)}$$

unter der Voraussetzung behandelt, daß $p_1(x; y)$ und $p_2(x; y)$ Potenzreihen von x und y sind, die mit Gliedern frühestens zweiten Grades beginnen. Darstellungen über dieses Thema finden sich auch in Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1930, S. 97ff. und in Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin-Leipzig, 1927, S. 166ff.

Bendixson hat in Acta Math. **24** (1900) das Verhalten der Integralkurven in der Nähe singulärer Punkte für allgemeinere Differentialgleichungen untersucht, insbesondere für Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m + \mathfrak{P}_{m+1}(x; y)}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \ldots + b_m y^m + \mathfrak{Q}_{m+1}(x; y)}.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{P}_{m+1}(x; y)$ und $\mathfrak{Q}_{m+1}(x; y)$ Potenzreihen von x und y mit Gliedern von mindestens $(m+1)$-tem Grad. Ein Auszug aus dieser Arbeit findet sich auch bei Bieberbach, a. a. O. S. 79ff.

Perron hat in der Math. Zeitschr. **15** (1922) und **16** (1923) die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx + ny + \varphi(x; y)}{kx + ly + f(x; y)},$$

wobei $\varphi(x; y)$ und $f(x; y)$ keine Potenzreihen sein müssen, behandelt und gezeigt, daß man für die Funktionen $f(x; y)$ und $\varphi(x; y)$ neben der Voraussetzung, daß sie in der Nähe des Nullpunktes klein gegenüber $|x| + |y|$ sein sollen, nur wenig verlangen muß um zu erreichen, daß sich die Integral-

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität München, II. Sektion, als Dissertation angenommen.

kurven der genannten Differentialgleichung in der Nähe des Nullpunktes ebenso verhalten wie die der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx+ny}{kx+ly}.$$

Auf diese beiden letztgenannten Arbeiten stützt sich die vorliegende.

§ 2.

Die Aufgabe.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchungen ist:
Für die Funktionen $d(x;y)$ und $e(x;y)$ der Differentialgleichung

(b)
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m + d(x;y)}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m + e(x;y)}}$$

sollen hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt werden, daß sich die Integralkurven dieser Differentialgleichung in der Nähe des Koordinatenursprungs ebenso verhalten wie die Integralkurven der Differentialgleichung

(a)
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m}}.$$

Wir benützen im folgenden die Abkürzungen:

(1)
$$\begin{aligned} a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m &= A(x;y), \\ b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m &= B(x;y). \end{aligned}$$

Wir ziehen dabei nur solche Funktionen $d(x;y)$ und $e(x;y)$ in Betracht, die in der Umgebung des Ursprungs stetige Funktionen von x und y sind und bei Annäherung an den Ursprung rascher nach 0 konvergieren als die Funktionen $A(x;y)$ und $B(x;y)$, *und zwar setzen wir in dieser Hinsicht voraus, daß*

(c)
$$\boxed{\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} \frac{|d(x;y)|+|e(x;y)|}{\sqrt{x^2+y^2}^m} = 0.}$$

Von den Funktionen $A(x;y)$ und $B(x;y)$ verlangen wir, daß sie keinen reellen, linearen Faktor gemeinsam haben und daß $\frac{A(x;y)}{B(x;y)}$ nicht gleich $\frac{y}{x}$ ist; dieser Fall, nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+d(x;y)}{x+e(x;y)},$$

wurde schon von O. Perron in Math. Zeitschr. **15** (1922) behandelt.

Wir gebrauchen im folgenden einige *Abkürzungen*, die nun zusammengestellt werden. r und φ seien Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad t = \tan\varphi.$$

Wir setzen dann:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A(\varphi) &= a_0\sin^m\varphi + a_1\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi + \ldots + a_m\cos^m\varphi,\\ B(\varphi) &= b_0\sin^m\varphi + b_1\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi + \ldots + b_m\cos^m\varphi. \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}(t) &= a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m,\\ \mathfrak{B}(t) &= b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \ldots + b_m. \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \delta(r;\varphi) = \frac{d(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)}{r^m},$$

$$\varepsilon(r;\varphi) = \frac{e(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)}{r^m}.$$

Die Differentialgleichung (a) läßt sich dann auch schreiben

$$(a_1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A(\varphi)}{B(\varphi)}$$

oder

$$(a_2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{A}(t)}{\mathfrak{B}(t)}.$$

Die Differentialgleichung (b) erhält die Form

$$(b_1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{A(\varphi)+\delta(r;\varphi)}{B(\varphi)+\varepsilon(r;\varphi)}.$$

Wir setzen weiterhin

$$(5)\qquad \begin{aligned} Z(\varphi) &= A(\varphi)\cdot\sin\varphi + B(\varphi)\cdot\cos\varphi,\\ N(\varphi) &= B(\varphi)\cdot\sin\varphi - A(\varphi)\cdot\cos\varphi; \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Z}(t) &= \mathfrak{A}(t)\cdot t + \mathfrak{B}(t)\\ &= a_0 t^{m+1} + (a_1+b_0)t^m + \ldots + (a_m + b_{m-1})\cdot t + b_m,\\ \mathfrak{N}(t) &= \mathfrak{B}(t)\cdot t - \mathfrak{A}(t)\\ &= b_0 t^{m+1} + (b_1 - a_0)t^m + \ldots + (b_m - a_{m-1})t - a_m. \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \begin{aligned} \Delta(r;\varphi) &= \delta(r;\varphi)\cdot\sin\varphi + \varepsilon(r;\varphi)\cdot\cos\varphi,\\ E(r;\varphi) &= \varepsilon(r;\varphi)\cdot\sin\varphi - \delta(r;\varphi)\cdot\cos\varphi. \end{aligned}$$

Dann lautet die Differentialgleichung (a) in Polarkoordinaten

$$(d)\qquad \boxed{\frac{dr}{d\varphi} = -r\cdot\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} = -r\cdot F(\varphi)}$$

oder

$$(d_1)\qquad \frac{dr}{d\varphi} = -r\cdot\frac{\mathfrak{Z}(t)}{\mathfrak{N}(t)}$$

oder

$$(d_2)\qquad \frac{dr}{dt} = -r\,\frac{\mathfrak{Z}(t)}{\mathfrak{N}(t)}\cdot\frac{1}{1+t^2}.$$

Die Differentialgleichung (b) lautet:

$$\text{(e)} \qquad \boxed{\frac{dr}{d\varphi} = -r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)} = -r \cdot G(r;\varphi).}$$

Setzen wir

$$\text{(f)} \qquad \begin{aligned} \delta(0;\varphi) &= \varepsilon(0;\varphi) = 0, \\ \Delta(0;\varphi) &= E(0;\varphi) = 0, \end{aligned}$$

so sind gemäß unseren Voraussetzungen über $d(x;y)$ und $e(x;y)$ — speziell wegen (c) — $\delta(r;\varphi)$, $\varepsilon(r;\varphi)$, $\Delta(r;\varphi)$ und $E(r;\varphi)$ in einem gewissen Intervall $0 \leqq r \leqq r_0$ stetige Funktionen von r und φ und periodische Funktionen von φ mit der Periode 2π.

Die Gleichungen

$$Z(\varphi) = 0 \text{ und } N(\varphi) = 0$$

haben keine reelle Wurzel gemeinsam.

Nimmt man nämlich an, sie hätten eine solche Wurzel gemeinsam, so müßten auch die Gleichungen

$$Z(\varphi) \cdot \sin\varphi - N(\varphi) \cdot \cos\varphi = 0$$

und

$$Z(\varphi) \cdot \cos\varphi + N(\varphi) \cdot \sin\varphi = 0$$

diese Wurzel gemeinsam haben. Nun ist

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} Z(\varphi) \cdot \sin\varphi - N(\varphi) \cdot \cos\varphi &= A(\varphi), \\ Z(\varphi) \cdot \cos\varphi + N(\varphi) \cdot \sin\varphi &= B(\varphi). \end{aligned}$$

Also hätten die Gleichungen

$$A(\varphi) = 0, \qquad B(\varphi) = 0$$

eine reelle Wurzel und somit die Funktionen $A(x;y)$ und $B(x;y)$ im Widerspruch zu oben einen linearen reellen Faktor gemeinsam.

I. Teil.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \ldots + b_m x^m}.$$

§ 3.

Die Eindeutigkeit der Integralkurven.

Da $A(x;y)$ und $B(x;y)$ keinen reellen linearen Faktor gemeinsam haben und stetig differenzierbar sind, läßt sich um jeden Punkt mit Ausnahme

des Ursprungs ein Rechteck abgrenzen, in dem entweder für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x; y)}{B(x; y)}$$

oder für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B(x; y)}{A(x; y)}$$

die Lipschitzsche Bedingung erfüllt ist. *Es geht also durch jeden Punkt außer dem Ursprung nur eine einzige Integralkurve.*

§ 4.

Die Integralgeraden.

Für das Verhalten der Integralkurven in der Nähe des Ursprungs sind die durch diesen gehenden Integralgeraden mitbestimmend. Sie ergeben sich aus der Gleichung

$$B(x; y) \cdot y - A(x; y) \cdot x = 0.$$

In Polarkoordinaten lautet sie:

$$\boxed{N(\varphi) = 0.} \tag{8}$$

Da wir vorausgesetzt haben, daß $\frac{A(x; y)}{B(x; y)}$ nicht identisch mit $\frac{y}{x}$ ist, so ist diese Gleichung nicht identisch erfüllt und ergibt, da links eine homogene Funktion $(m+1)$-ten Grades in x und y bzw. in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ steht, *höchstens* $m+1$ *reelle Integralgeraden durch den Ursprung der x-y-Ebene.*

§ 5.

$N(\varphi) = 0$ habe keine reelle Wurzel.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (d) lautet:

$$r(\varphi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi} \tag{9}$$

Wenn nun (8) keine reelle Wurzel hat, so gibt es ein $k > 0$, so daß $|N(\varphi)| > k$ ist für alle φ. Da außerdem $Z(\varphi)$ beschränkt ist, so ist

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi$$

für alle φ endlich. $r(\varphi)$ ist somit im ganzen Bereich $-\infty < \varphi < \infty$ definiert. Es ist dort stetig und endlich und nimmt nie den Wert 0 an (wenn $r_0 \neq 0$).

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) *Wenn*

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)\,d\varphi}{N(\varphi)} = 0, \tag{10}$$

dann sind alle Integralkurven in der x-y-Ebene geschlossene Kurven.

Beweis: Da $N(\varphi)$ und $Z(\varphi)$ periodisch sind, ist:

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)\,d\varphi}{N(\varphi)} + \left(\int_{2\pi}^{\varphi+2\pi} \frac{Z(\varphi)\,d\varphi}{N(\varphi)} - \int_0^{\varphi} \frac{Z(\varphi)\,d\varphi}{N(\varphi)}\right) = 0$$

und somit ist

$$r(\varphi+2\pi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi+2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi} = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi} = r(\varphi)$$

w. z. b. w. In diesem Fall wird der Ursprung der x-y-Ebene als *Wirbelpunkt* bezeichnet.

b) *Wenn*

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi > 0, \text{ so ist } \lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = 0. \tag{11a}$$

Wenn

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi < 0, \text{ so ist } \lim_{\varphi \to -\infty} r(\varphi) = 0. \tag{11b}$$

Beweis: 1. Es sei

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi = J > 0.$$

Dann ist

$$0 < e^{-\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi} = k < 1.$$

Setzt man

$$\operatorname*{Max}_{\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi} \left(r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi}\right) = M,$$

so gilt für $\varphi = \varphi_0 + 2n\pi + \psi \geqq \varphi_0 + 2n\pi$ die Beziehung:

$$r(\varphi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\psi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi - \int_{\varphi_0+\psi}^{\varphi_0+\psi+2n\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi} = k^n \cdot r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\psi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d\varphi} \leqq k^n \cdot M.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = 0.$$

2. Entsprechend läßt sich der Beweis für

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi < 0$$

führen.

In diesen Fällen heißt der Ursprung *Strudelpunkt. Die Integralkurven sind Spiralen, die sich ihm asymptotisch nähern.*

§ 6.

$N(\varphi) = 0$ habe reelle Wurzeln. Das Verhalten der Integralkurven im Winkelraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Integralstrahlen.

Jeder reellen Wurzel φ_λ von (8) entsprechen zwei Integral*strahlen*, nämlich $\varphi = \varphi_\lambda$ und $\varphi = \varphi_\lambda + \pi$.

$\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ seien zwei aufeinanderfolgende Integralstrahlen. Hat (8) nur *eine* reelle Wurzel, so ist $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$.

$(r_0; \varphi_0)$ sei ein beliebiger Punkt des Winkelraumes $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$; $r > 0$ und $r = r(\varphi)$ die durch ihn gehende Integralkurve. Dann gilt:

I. *Die Integralkurve $r = r(\varphi)$ durchläuft den Winkelraum $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ ganz und es ist dort immer $r(\varphi) > 0$.*

Beweis: Es folgt dies unmittelbar aus Gleichung (9). Wählt man nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so gibt es ein $k > 0$, so daß

$$|N(\varphi)| > k, \text{ wenn } \varphi_1 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \varepsilon.$$

Da $Z(\varphi)$ beschränkt ist, ist also in diesem Intervall $\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi$ endlich und stetig und somit $r(\varphi)$ stetig und $0 < r(\varphi) < \infty$.

II. *Es existiert* $\lim_{\varphi \to \varphi_1} r(\varphi)$, *und zwar ist er entweder* 0 *oder* ∞. *Dasselbe gilt für* $\lim_{\varphi \to \varphi_2} r(\varphi)$.

Beweis: 1. Setzen wir $\tan \varphi_0 = \tau_0$, $\tan \varphi_1 = \tau_1$, so können wir ohne die Allgemeingültigkeit unserer Überlegungen zu beschränken annehmen, daß $-\infty < \tau_1 < \tau_0 < \infty$ ist. Es wird dann

$$r(\varphi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\tau_0}^{t} \frac{3(t)}{\Re(t)} \frac{dt}{1+t^2}}.$$

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{\mathfrak{Z}(t)}{\mathfrak{N}(t)(1+t^2)} = C_{0,0} + \frac{C_{1,0}}{(t-\tau_1)^{\lambda_1}} + \frac{C_{1,1}}{(t-\tau_1)^{\lambda_1-1}} + \cdots + \frac{C_{2,0}}{(t-\tau_2)^{\lambda_2}} + \cdots$$

ist $C_{1,0} \neq 0$; also ist

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\mathfrak{Z}(t)\,dt}{\mathfrak{N}(t)(t^2+1)} \begin{cases} \text{entweder } +\infty \\ \text{oder } -\infty. \end{cases}$$

Somit ist

$$\lim_{\varphi \to \varphi_1} r(\varphi) \begin{cases} \text{entweder } = 0 \\ \text{oder } = \infty. \end{cases}$$

2. Entsprechende Überlegungen gelten für $\varphi \to \varphi_2$.

III. *Der Verlauf der Integralkurven wird zum Teil durch die Zahl der Wurzeln von*

(12) $$Z(\varphi) = 0,$$

die im betrachteten Winkelraum liegen, bestimmt, wobei jede Wurzel ihrer Vielfachheit entsprechend oft zu zählen ist.

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) (12) *hat im Winkelraum* $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ *keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.* Da $N(\varphi)$ dort sein Vorzeichen nicht wechselt, hat dann, wenn ε klein genug ist, $\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}$ in den Intervallen $\varphi_1 < \varphi \leqq \varphi_1 + \varepsilon$ und $\varphi_2 - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_2$ gleiches Vorzeichen. $r(\varphi)$ nimmt also bei wachsendem φ entweder in beiden Intervallen zu oder in beiden Intervallen ab. D. h.

α) *Wenn* $r(\varphi_1 + 0) = 0$ *ist, so ist* $r(\varphi_2 - 0) = \infty$.

β) *Wenn* $r(\varphi_1 + 0) = \infty$ *ist, so ist* $r(\varphi_2 - 0) = 0$. (Fig. 1. Winkelraum $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$.)

b) (12) *hat in dem Winkelraum* $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ *eine ungerade Anzahl von Wurzeln.* Dann hat $\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}$ in den Bereichen $\varphi_1 < \varphi \leqq \varphi_1 + \varepsilon$ und $\varphi_2 - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_2$ verschiedenes Vorzeichen. Wenn also $r(\varphi)$ bei wachsendem φ im einen Bereich zunimmt, so nimmt es im anderen ab und umgekehrt. D. h.

α) *Wenn* $r(\varphi_1 + 0) = 0$ *ist, so ist* $r(\varphi_2 - 0) = 0$. (Fig. 1. Winkelraum $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$.)

β) *Wenn* $r(\varphi_1 + 0) = \infty$ *ist, so ist* $r(\varphi_2 - 0) = \infty$. (Fig. 1. Winkelraum $-\frac{\pi}{4} < \varphi < 0$.)

§ 7.

Das Verhalten der Integralkurven zu beiden Seiten eines Integralstrahls.

φ_λ *sei eine* ν_λ*-fache Wurzel der Gleichung* (8). Da $N(\varphi)$ eine homogene Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ist, kann man dann

$$N(\varphi) = \sin^{\nu_\lambda}(\varphi - \varphi_\lambda) \cdot Q_\lambda(\varphi)$$

setzen, wobei

$$Q_\lambda(\varphi_\lambda) \neq 0.$$

Es ist dann

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \cdot \frac{1}{\sin^{\lambda\nu}(\varphi - \varphi_\lambda)} \frac{Z(\varphi)}{Q_\lambda(\varphi)} \tag{13}$$

und

$$\frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)} \neq 0.$$

Wenn ε klein genug ist, hat also $\frac{Z(\varphi)}{Q_\lambda(\varphi)}$ im Intervall $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$ ein festes Vorzeichen.

Das Verhalten der Integralkurven bei Annäherung an den Integralstrahl $\varphi = \varphi_\lambda$ *hängt von* ν_λ *und von dem Vorzeichen von* $\frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)}$ *ab.*

Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

(14) $$1.\quad \nu_\lambda = 2n+1; \qquad \frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)} > 0.$$

Dann hat $\frac{dr}{d\varphi}$ nach (13) in den Intervallen $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ und $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$ verschiedenes Vorzeichen. Die Integralkurven verhalten sich also für $\varphi \to \varphi_\lambda$ auf beiden Seiten des Integralstrahls gleich. Für $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ ist $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ und für $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$ ist $\frac{dr}{d\varphi} < 0$. *Also entfernen sich die Integralkurven für* $\varphi \to \varphi_\lambda$ *vom Ursprung.* $\varphi \equiv \varphi_\lambda$ (*und* $\varphi \equiv \varphi_\lambda + \pi$) *ist die einzige Integralkurve, die mit der Richtung* $\lim_{r\to 0} \frac{y}{x} = \tan\varphi_\lambda$ *in den Ursprung einmündet.* $\varphi = \varphi_\lambda$ soll deshalb als „*isolierter Integralstrahl*" bezeichnet werden (Fig. 1; Strahl $\varphi = 0$).

(15) $$2.\quad \nu_\lambda = 2n+1; \qquad \frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)} < 0.$$

Auch hier haben die Integralkurven für $\varphi \to \varphi_\lambda$ auf beiden Seiten von $\varphi = \varphi_\lambda$ gleiches Verhalten. Da $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ ist für $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ und $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ für $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$, *so ist für alle Integralkurven, die durch einen Punkt*

der Intervalle $\omega_{\lambda-1} < \varphi < \varphi_\lambda$ *und* $\varphi_\lambda < \varphi < \varphi_{\lambda+1}$ *gehen,* $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_\lambda} r(\varphi) = 0.$

$\varphi = \varphi_\lambda$ soll in diesem Fall „*Knotenstrahl*" heißen $\left(\text{Fig. 1; Strahl } \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

Im 1. und 2. Fall soll $\varphi = \varphi_\lambda$ gemeinsam als „Strahl gleichen Verhaltens" bezeichnet werden. *Ein „Strahl gleichen Verhaltens" ist also charakterisiert durch*

(16) $$\nu_\lambda = 2n + 1.$$

(17) 3. $$\nu_\lambda = 2n.$$

Dann hat nach (13) $\frac{dr}{d\varphi}$ in den Winkelräumen $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ und $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$ gleiches Vorzeichen. Die Integralkurven verhalten sich also auf beiden Seiten des Integralstrahls bei Annäherung an diesen verschieden. $\varphi = \varphi_\lambda$ soll in diesem Fall als „*Integralstrahl wechselnden Verhaltens*" bezeichnet werden.

a) $$\frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)} < 0.$$

Dann ist sowohl im Intervall $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ als auch im Intervall $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$ nach (13) $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. Also ist

$$\lim_{\varphi \to \varphi_\lambda + 0} r(\varphi) = 0, \qquad \lim_{\varphi \to \varphi_\lambda - 0} r(\varphi) = \infty.$$

$\varphi = \varphi_\lambda$ soll in diesem Fall ein „*Integralstrahl wechselnden Verhaltens 1. Art*" heißen.

b) $$\frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)} > 0.$$

Dann ist $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ sowohl für $\varphi_\lambda - \varepsilon \leqq \varphi < \varphi_\lambda$, als auch für $\varphi_\lambda < \varphi \leqq \varphi_\lambda + \varepsilon$. Also ist

$$\lim_{\varphi \to \varphi_\lambda + 0} r(\varphi) = \infty; \qquad \lim_{\varphi \to \varphi_\lambda - 0} r(\varphi) = 0.$$

In diesem Fall soll $\varphi = \varphi_\lambda$ ein „*Strahl wechselnden Verhaltens 2. Art*" heißen. $\left(\text{Fig. 1, Strahl } \varphi = -\frac{\pi}{4}\right)$.

Wendet man auf die Differentialgleichung (*d*) die Transformation $\bar{\varphi} = 2\varphi_\lambda - \varphi$, $\bar{r} = r$ an, so geht der Fall 3b in 3a über und umgekehrt.

§ 8.

Die Charakterisierung des Ursprungs.

a) Aus dem Vorstehenden folgt, daß es genügt die reellen Wurzeln der Gleichung $N(\varphi) = 0$ und ihre Vielfachheit ν_λ zu kennen. Dann bestimmt man leicht die Vorzeichen der Ausdrücke $\frac{Z(\varphi_\lambda)}{Q_\lambda(\varphi_\lambda)}$ und diese charakterisieren

ja zusammen mit den ν_λ das Verhalten der Integralkurven bezüglich des Ursprungs vollständig.

b) Da bei der Transformation $\bar{y} = -y$, $\bar{x} = -x$ die Differentialgleichung (a) in sich selbst übergeht, kommt das Feld der Integralkurven bei einer Drehung von 180^0 um den Ursprung mit sich selbst zur Deckung. Es genügt also das Verhalten der Integralkurven für eine Hälfte der x-y-Ebene, z. B. für $x > 0$ festzustellen.

c) Beispiel: *Als Beispiel soll die Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 6y^2x + 2yx^2}{-2y^3 - y^2x + 8yx^2 + 4x^3}$$

behandelt werden.

Es ist hier:

$$A(\varphi) = \sin^3\varphi + 6\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos^2\varphi,$$

$$B(\varphi) = -2\sin^3\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi + 8\sin\varphi\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi,$$

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= B(\varphi)\cdot\sin\varphi - A(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ &= -2\sin^4\varphi - 2\sin^3\varphi\cos\varphi + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos^3\varphi \\ &= -2\cdot\sin\varphi(\sin\varphi + \cos\varphi)^2\cdot(\sin\varphi - \cos\varphi) \\ &= -4\cdot\sqrt{2}\sin(\varphi - 0)\cdot\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(\varphi) &= A(\varphi)\cdot\sin\varphi + B(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ &= \sin^4\varphi + 4\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi + \sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + 8\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi \\ &\quad + 4\cos^4\varphi. \end{aligned}$$

Nach § 4 *ergeben sich in der Halbebene* $x > 0$ *die Integralstrahlen*:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}; \qquad \varphi_2 = 0; \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{4}.$$

1. Für $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ ist:

$$Q_1(\varphi) = -4\sqrt{2}\cdot\sin\varphi\cdot\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$Q_1(\varphi_1) = -4\cdot\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(-1) = -4.$$

$$Z\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 2 + 1 = -\frac{3}{2}.$$

Somit ist:

$$\frac{Z(\varphi_1)}{Q_1(\varphi_1)} = \frac{3}{8} > 0.$$

Da außerdem $\nu_1 = 2$ ist, liegt der Fall 3b des § 7 vor. $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ *ist ein „Strahl wechselnden Verhaltens 2. Art."*

2. Für $\varphi_2 = 0$ ist:

$$Q_2(\varphi) = -4\cdot\sqrt{2}\cdot\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Q_2(\varphi_2) = -4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

$$Z(0) = 4.$$

Somit ist

$$\frac{Z(\varphi_2)}{Q_2(\varphi_2)} = 2 > 0.$$

Da außerdem $\nu_2 = 1$ ist, liegt Fall 1 von § 7 vor. $\varphi_2 = 0$ *ist ein „isolierter Integralstrahl“.*

3. Für $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$ ist:

$$Q_3(\varphi) = -4 \cdot \sqrt{2} \sin\varphi \cdot \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$Q_3(\varphi_3) = -4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = -4.$$

$$Z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 2 + 1 = \frac{9}{2}.$$

Somit ist

$$\frac{Z(\varphi_3)}{Q_3(\varphi_3)} = -\frac{9}{8} < 0.$$

Da noch $\nu_3 = 1$ ist, liegt Fall 2 von § 7 vor. $\varphi_3 = \frac{\pi}{4}$ *ist also ein „Knotenstrahl.“*

Beachtet man noch, daß bei einer Drehung um 180° um den Ursprung das Integrallinienfeld mit sich zur Deckung kommen muß, so erhält man einen Integralkurvenverlauf, der der Fig. 1 entspricht.

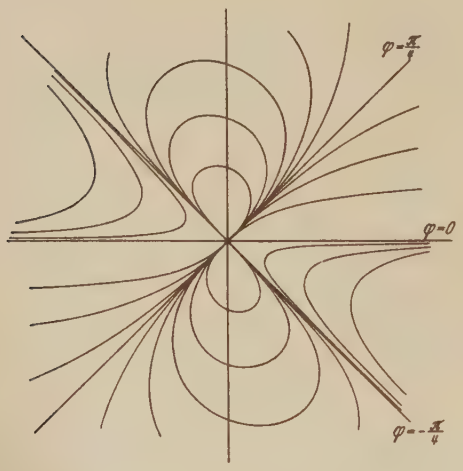


Fig. 1.

§ 9.

Welche Bilder können sich für die Integralkurven der Differentialgleichung (a) bei gegebenem m ergeben?

I. Fall: Im 1. Teil dieses Paragraphen soll folgende Frage behandelt werden:

1. Für beliebig bestimmte Stellen $\varphi = \varphi_\lambda$ — wobei wir uns gemäß § 8b auf

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

beschränken — sei vorgeschrieben, daß dort die Differentialgleichung (a) je einen Integralstrahl haben soll.

2. Für jeden dieser Integralstrahlen sei vorgeschrieben, welcher Art, ob Knotenstrahl, isolierter Strahl oder Strahl wechselnden Verhaltens 1. oder 2. Art, er sein soll.

3. Der Grad m von Zähler und Nenner der Differentialgleichung (a) sei ebenfalls vorgeschrieben.

Welchen Einschränkungen müssen solche Vorschriften unterworfen sein, damit es möglich ist die Koeffizienten a_μ, b_μ von (a) *so zu wählen, daß die Integralkurven von* (a) *diese Vorschriften erfüllen?*

I. Zwei Einschränkungen.

a) Wir ordnen jedem der vorgeschriebenen Integralstrahlen $\varphi = \psi_\lambda$ eine Zahl g_λ in folgender Weise zu:

Ist $\varphi = \psi_\lambda$ ein Integralstrahl gleichen Verhaltens, so ist $g_\lambda = 1$.

Ist $\varphi = \psi_\lambda$ ein Integralstrahl wechselnden Verhaltens, so ist $g_\lambda = 2$.

Die Zahl der Integralstrahlen wechselnden Verhaltens, die Zahl der Integralstrahlen gleichen Verhaltens und der Grad m müssen dann so gewählt sein, daß

$$\boxed{\sum_\lambda g_\lambda = m + 1 - 2p,} \tag{18}$$

wobei p eine ganze positive Zahl oder 0 sein kann.

Beweis: Nach § 7 muß $\varphi = \psi_\lambda$ um den Vorschriften zu entsprechen eine $(g_\lambda + 2n_\lambda)$-fache Wurzel von $N(\varphi) = 0$ sein. n_λ kann dabei eine beliebige natürliche Zahl oder 0 sein. Bezeichnen wir die Zahl der in $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ vorgeschriebenen Integralstrahlen mit n, so muß $N(\varphi)$ die Form haben:

$$N(\varphi) = H_{2k}(\sin\varphi;\ \cos\varphi) \cdot \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sin^{g_\lambda + 2n_\lambda}(\varphi - \psi_\lambda). \tag{19}$$

$H_{2k}(\sin\varphi; \cos\varphi)$ bedeutet eine homogene reelle Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ vom Grad $2k$ der Art, daß die Gleichung

$$H_{2k}(\sin\varphi;\ \cos\varphi) = 0$$

keine reelle Wurzel hat. Da $N(\varphi)$ vom Grad $m + 1$ ist, kann man $N(\varphi)$ einem solchen Ausdruck nur gleichsetzen, wenn

$$m + 1 = 2k + \sum_{\lambda=1}^{n} (g_\lambda + 2n_\lambda). \tag{20}$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) *Man kann a_μ, b_μ nie so wählen, daß die Differentialgleichung* (a) $m + 1$ *Knotenstrahlen im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ hat.*

Den Beweis übergehen wir. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich beim Beweis des folgendes Satzes von selbst (S. 286).

II. *Weiteren Einschränkungen sind die zu Beginn dieses Paragraphen genannten Forderungen nicht unterworfen.*

Beweis: *Zum Beweis geben wir eine Methode an, nach der sich die Koeffizienten a_μ, b_μ bestimmen lassen aus den gegebenen Forderungen für die Integralstrahlen, wenn die Einschränkungen* Ia *und* Ib *erfüllt sind.*

A. Ist die Bedingung (18) erfüllt, so ist durch die Gleichung (19) die Funktion $N(\varphi)$ nur zum Teil festgelegt, da die Zahlen n_λ und die Funktion $H_{2k}(\sin\varphi, \cos\varphi)$ in gewissen Grenzen frei gewählt werden können[1]). Es muß nur (20) erfüllt sein. Wir wollen folgende Wahl treffen:

$$\begin{aligned} &H_{2k}(\sin\varphi, \cos\varphi) = H > 0 \text{ (konstant)},\\ (21)\qquad &2n_1 = m + 1 - \Sigma g_\lambda = 2p,\\ &n_2 = n_3 = \ldots = 0. \end{aligned}$$

Dann wird:

$$(22)\qquad N(\varphi) = H \cdot \sin^{g_1+2p}(\varphi - \psi_1) \cdot \sin^{g_2}(\varphi - \psi_2) \ldots \sin^{g_n}(\varphi - \psi_n).$$

und enthält nur mehr die willkürliche Konstante H. Wir setzen

$$(23)\qquad H = \cos^{-2p}\psi_1 \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} \cos^{-g_\lambda}\psi_\lambda.$$

Dann erhält $N(\varphi)$ die Form:

$$(24)\qquad N(\varphi) = \sin^{m+1}\varphi + \alpha_1 \sin^m\varphi \cdot \cos\varphi + \ldots + \alpha_{m+1}\cos^{m+1}\varphi.$$

Die Koeffizienten α_ν ergeben sich dann eindeutig aus der Beziehung:

$$(25)\qquad \sin^{m+1}\varphi + \alpha_1 \sin^m\varphi \cdot \cos\varphi + \ldots + \alpha_{m+1}\cos^{m+1}\varphi = \left(\frac{\sin(\varphi-\psi_1)}{\cos\psi_1}\right)^{m+1-\sum_1^n g_\lambda} \cdot \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\sin(\varphi-\psi_\nu)}{\cos\psi_\nu}\right)^{g_\nu}.$$

B. Wir benutzen die Differentialgleichung in der Form (d_1) und setzen $\tan\psi_\lambda = \tau_\lambda$. Dann ist:

$$(26)\qquad \mathfrak{N}(t) = (t-\tau_1)^{g_1+2p}(t-\tau_2)^{g_2} \ldots (t-\tau_n)^{g_n}.$$

Zerlegen wir $\frac{\mathfrak{Z}(t)}{\mathfrak{N}(t)}$ in Partialbrüche, so ist:

$$(27)\qquad \frac{dr}{d\varphi} = -r\cdot\left[C_{0,0} + \frac{C_{1,0}}{(t-\tau_1)^{g_1+2p}} + \frac{C_{1,1}}{(t-\tau_1)^{g_1+2p-1}} + \ldots \frac{C_{1,g_1+2p-1}}{t-\tau_1} + \sum_{\lambda=2}^{n}\sum_{\nu=0}^{g_\lambda-1}\frac{C_{\lambda,\nu}}{(t-\tau_\lambda)^{g_\lambda-\nu}}\right].$$

Dabei hat keine der Summen $\sum_{\nu=0}^{g_\lambda-1}\frac{C_{\lambda,\nu}}{(t-\tau_\lambda)^{g_\lambda-\nu}}$ mehr als zwei Summanden.

[1]) Außer in den Fällen $\Sigma g_\lambda = m+1$; in diesen ist $N(\varphi)$ durch (19) bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Nun hängt nach § 7 die Art des Integralstrahles $t = \tau_\lambda$ vom Vorzeichen von $\frac{dr}{d\varphi}$ in seiner Nähe ab. Dieses Vorzeichen ist aber durch $C_{\lambda,0}$ bestimmt. Die gestellten Forderungen über die Art der Integralstrahlen schreiben also die Vorzeichen der $C_{\lambda,0}$ vor. Man entnimmt aus § 7:

(28)
$$\begin{cases} \text{Wenn } t = \tau_\lambda \text{ Knotenstrahl sein soll, muß } C_{\lambda,0} < 0 \text{ sein.} \\ \text{Wenn } t = \tau_\lambda \text{ isolierter Strahl sein soll, muß } C_{\lambda,0} > 0 \text{ sein.} \\ \text{Wenn } t = \tau_\lambda \text{ Strahl wechselnden Verhaltens 1. Art sein soll, muß } C_{\lambda,0} < 0 \text{ sein.} \\ \text{Wenn } t = \tau_\lambda \text{ Strahl wechselnden Verhaltens 2. Art sein soll, muß } C_{\lambda,0} > 0 \text{ sein.} \end{cases}$$

Der *Betrag* der $C_{\lambda,0}$ ist *nicht* vorgeschrieben.

$C_{0,0}$ und die $C_{\lambda,\nu}$ mit $\nu \geqq 1$ können ganz beliebig gewählt werden.

Nun ist nach (6) S. 273:

$$\mathfrak{Z}(t) + \mathfrak{N}(t) \cdot t = \mathfrak{B}(t) \cdot (1 + t^2). \tag{29}$$

Benützt man die Partialbruchzerlegung (27), so ist:

$$\mathfrak{N}(t) \cdot \Big[C_{0,0} + \Big(\frac{C_{1,0}}{(t-\tau_1)^{g_1+2p}} + \ldots + \frac{C_{1,g_1+2p-1}}{t-\tau_1} \Big) + \sum_{\lambda=2}^{n} \sum_{\nu=0}^{g_\lambda - 1} \frac{C_{\lambda,\nu}}{(t-\tau_\lambda)^{g_\lambda - \nu}} + t \Big] = \mathfrak{B}(t) \cdot (t^2+1). \tag{30}$$

Wenn wir die $C_{\lambda,\nu}$ den Forderungen (28) gemäß gewählt haben, so *lassen sich aus* (30) *die Koeffizienten* b_u *der Funktion* $\mathfrak{B}(t)$ *nur dann bestimmen, wenn die linke Seite von* (30) *den Faktor* (t^2+1) *enthält*; d. h. sie muß für $t = \pm i$ verschwinden. Nun ist nach (26) $\mathfrak{N}(\pm i) \neq 0$; also muß

$$\boxed{C_{0,0} + \Big(\frac{C_{1,0}}{(i-\tau_1)^{g_1+2p}} + \ldots \Big) + \sum_{\lambda=2}^{n} \sum_{\nu=0}^{g_\lambda - 1} \frac{C_{\lambda,\nu}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda - \nu}} + i = 0} \tag{31}$$

sein.

Die Frage ist nun: *Wie können die* $C_{\lambda,\nu}$ *gewählt werden, damit die Bedingungen* (28) *und gleichzeitig die Gleichung* (31) *erfüllt sind?*

Wir unterscheiden folgende Fälle:

$$\mathfrak{A}. \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda = m+1; \quad n = m+1.$$

Dann ist:

$$p = 0; \quad g_1 = g_2 = \ldots = g_{m+1} = 1.$$

Die Gleichung (31) lautet dann:

$$C_{0,0} + \sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{C_{\lambda,0}}{i - \tau_\lambda} + i = 0.$$

Oder:

$$C_{0,0} - \sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{C_{\lambda,0}(i+\tau_\lambda)}{1+\tau_\lambda^2} + i = 0.$$

Dies ergibt zwei Gleichungen:

(32)
$$\alpha) \text{ imaginärer Teil:} \quad 1 - \sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{C_{\lambda,0}}{1+\tau_\lambda^2} = 0.$$
$$\beta) \text{ reeller Teil:} \quad C_{0,0} - \sum_{\lambda=1}^{m+1} \frac{C_{\lambda,0}\cdot\tau_\lambda}{1+\tau_\lambda^2} = 0.$$

1. *Sind $m+1$ Knotenstrahlen vorgeschrieben*, so müssen nach (28) alle $C_{\lambda,0} < 0$ sein. *Dann läßt sich die Gleichung* (32α) *nicht erfüllen* und somit auch (30) nicht. *Dies ergibt die Einschränkung* Ib (S. 283).

2. *Sind auch isolierte Integralstrahlen gefordert*, so wollen wir diese mit $t = \overline{\tau}_\lambda$ bezeichnen, die eventuell geforderten Knotenstrahlen mit $t = \overline{\overline{\tau}}_\nu$. Die Zahl der isolierten Integralstrahlen sei G. Wir erfüllen die Bedingungen (28), (32α) und (32β) durch folgende Wahl der $C_{\lambda,0}$.

$C_{\nu,0} = -1$, *für alle ν, denen Knotenstrahlen entsprechen*

$C_{\lambda,0} = \left(1 + \sum_\nu \frac{1}{1+\overline{\overline{\tau}}_\nu^2}\right) \cdot \frac{1+\tau_\lambda^2}{G}$, *für alle λ, denen isolierte Integralstrahlen entsprechen.*

$C_{0,0} = \sum_\lambda \frac{C_{\lambda,0}\tau_\lambda}{1+\tau_\lambda^2}$; die Summe ist hier über alle Integralstrahlen zu nehmen.

$\mathfrak{B}$. $$\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda = m+1; \quad n < m+1.$$

Dann gibt es mindestens ein g_λ, das gleich 2 ist. Wir greifen eines von den g_λ, die gleich 2 sind, heraus und bezeichnen es mit g_w und den dazu gehörenden Integralstrahl mit $t = \tau_w$.

Wir setzen dann alle etwa vorkommenden

$$C_{\lambda,1} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq w.$$

Die Gleichung (31) lautet jetzt:

(33)
$$C_{0,0} + \frac{C_{w,1}}{i-\tau_w} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_{\lambda,0}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda}} + i = 0.$$

Wir setzen nun die $C_{\lambda,0}$, die nach (28) *positiv sein müssen, gleich $+1$ und die $C_{\lambda,0}$, die negativ sein müssen, gleich -1. Die Gleichung* (33) *wird erfüllt, indem man $C_{w,1}$ aus der Gleichung*

$$\textit{Imaginärer Teil von} \left(\frac{C_{w,1}}{i-\tau_w} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_{\lambda,0}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda}} + i\right) = 0$$

berechnet und dann

$$C_{0,0} = -\text{ Reeller Teil von } \left(\frac{C_{w,1}}{i - \tau_w} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_{\lambda,0}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda}} \right) \text{ setzt.}$$

$\mathfrak{C}$.
$$\sum_{\lambda=1}^{n} g_\lambda < m + 1.$$

Dann ist $p > 0$.

Entweder ist dann $(i - \tau_1)^{g_1 + 2p-1}$ nicht reell; oder es ist $(i - \tau_1)^{g_1+2p-1}$ reell, dann ist aber $(i - \tau_1)^{g_1+2p-2}$ nicht reell. Im ersten Fall soll l die Zahl 1 bedeuten, im 2. Fall die Zahl 2, so daß also $(i - \tau_1)^{g_1+2p-l}$ nicht reell ist. Dann setzen wir:

$$C_{1,\nu} = 0, \quad \text{für} \quad \nu \neq \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$$
$$C_{\lambda,\nu} = 0, \quad \text{für} \quad \lambda > 1, \quad \nu > 0.$$

Die $C_{\lambda,0}$, die positiv sein müssen, wählen wir gleich 1, *die $C_{\lambda,0}$, die negativ sein müssen, setzen wir gleich* -1.

Die Gleichung (31) *wird dann erfüllt, indem man $C_{1,l}$ aus der Gleichung*

Imaginärer Teil von

$$\left(\frac{C_{1,l}}{(i-\tau_1)^{g_1+2p-l}} + \sum_{\lambda=2}^{n} \frac{C_{\lambda,0}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda}} + \frac{C_{1,0}}{(i-\tau_1)^{g_1+2p}} + i \right) = 0$$

berechnet und dann

$C_{0,0} = -$ *Reeller Teil von*

$$\left(\frac{C_{1,l}}{(i-\tau_1)^{g_1+2p-l}} + \frac{C_{1,0}}{(i-\tau_1)^{g_1+2p}} + \sum_{\lambda=2}^{n} \frac{C_{\lambda,0}}{(i-\tau_\lambda)^{g_\lambda}} \right)$$

setzt.

C. *Sind die $C_{\lambda,\nu}$ in der von* $\mathfrak{A}$. *bis* $\mathfrak{C}$. *beschriebenen Form gewählt, so erhält man aus* (30) *die Funktion* $\mathfrak{B}(t)$ *und somit die Koeffizienten b_ν. Es bekommt* $\mathfrak{B}(t)$ *den Grad m. Nach* (26) *und* (30) *wird* $b_0 = 1$.

Die Koeffizienten a_μ erhält man dann aus der Beziehung (5).

(34) $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}(t) \cdot t - \mathfrak{N}(t)$,
$$\mathfrak{A}(t) = t^{m+1} + b_1 t^m + \ldots + b_m \cdot t - t^{m+1} - \alpha_1 t^m - \ldots - \alpha_{m+1}.$$

Es wird $\mathfrak{A}(t)$ höchstens vom Grad m und es ist

$$a_0 = b_1 - \alpha_1;$$
$$a_1 = b_2 - \alpha_2;$$
$$\vdots$$
$$a_{m-1} = b_m - \alpha_m;$$
$$a_m = -\alpha_{m+1}.$$

D. Die so gewonnenen Funktionen $\mathfrak{A}(t)$ und $\mathfrak{B}(t)$ sind relativ prim. D. h. *Zähler und Nenner der Differentialgleichung* (a) *sind wirklich vom Grad m.*

Zum Beweis nehmen wir an, daß die Gleichungen $\mathfrak{A}(t) = 0$ und $\mathfrak{B}(t) = 0$ eine (reelle oder komplexe) Wurzel gemeinsam haben. Es muß dann nach (34) auch $\mathfrak{N}(t) = 0$ diese Wurzel haben. Somit haben $\mathfrak{N}(t) = 0$ und $\mathfrak{B}(t) = 0$ eine Wurzel gemeinsam. Ist nun τ_μ irgendeine Wurzel von $\mathfrak{N}(t) = 0$, so folgt aus (30)

$$\text{für } \mu = 1 \qquad \mathfrak{B}(\tau_1)(\tau_1^2 + 1) = C_{1,0} \prod_{\nu}^{\nu \neq 1} (\tau_1 - \tau_\nu)^{g_\nu} \neq 0,$$

$$\text{für } \mu > 1 \qquad \mathfrak{B}(\tau_\mu)(\tau_\mu^2 + 1) = C_{\mu,0}(\tau_\mu - \tau_1)^{2p} \cdot \prod_{\nu}^{\nu \neq \mu} (\tau_\mu - \tau_\nu)^{g_\nu} \neq 0.$$

Also hat $\mathfrak{B}(t) = 0$ mit $\mathfrak{N}(t) = 0$ keine Wurzel gemeinsam im Widerspruch zu oben.

E. Es müßte nun noch gezeigt werden, daß eine Differentialgleichung der Form (a) mit den so gewonnenen Koeffizienten wirklich Integralkurven liefert, die den gestellten Forderungen entsprechen. Da der Beweis dafür aber nur eine Wiederholung der vorstehenden Überlegungen in anderer Reihenfolge wäre, darf er übergangen werden.

II. Fall. Wenn für die Differentialgleichung (a) der Ursprung ein *Strudelpunkt oder Wirbelpunkt* sein soll, so darf $N(\varphi) = 0$ keine reelle Wurzel haben. Es muß somit

$$\underline{m = 2l + 1}$$

sein.

a) *Es kann für jedes derartige m bei geeigneter Wahl von a_μ, b_μ ein Wirbelpunkt auftreten.* Man braucht nur beispielsweise zu setzen:

1. *Für* $m = 1$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}.$$

2. *Für* $m \geqq 3$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2l} \cdot x - (x^2 + y^2)^l \cdot x}{y^{2l-1} \cdot x^2 + (x^2 + y^2)^l \cdot y}}.$$

Beweis: 1. Für $m = 1$ ergeben sich die Integralkurven aus

$$x^2 + y^2 = c$$

als Kreise um den Ursprung.

2. *Für* $m \geqq 3$ *muß zuerst gezeigt werden, daß Zähler und Nenner wirklich vom Grad m sind, d. h. daß sie relativ prim sind.*

Nehmen wir an, sie hätten einen Faktor gemeinsam, dann müßten diesen Faktor die folgenden Ausdrücke enthalten:

$$y^{2l} - (x^2 + y^2)^l,$$
$$y^{2l-2} \cdot x^2 + (x^2 + y^2)^l.$$

Ihre Summe lautet

$$y^{2l} + y^{2l-2} \cdot x^2 = (y^2 + x^2) \cdot y^{2l-2}$$

und müßte den gleichen Faktor enthalten. Sie ist aber zu $y^{2l} - (x^2 + y^2)^l$ relativ prim.

Aus

$$A(\varphi) = \sin^{2l}\varphi \cdot \cos\varphi - \cos\varphi,$$
$$B(\varphi) = \sin^{2l-1}\varphi \cdot \cos^2\varphi + \sin\varphi$$

folgt mit Hilfe der Gleichungen (5)

$$Z(\varphi) = \sin^{2l-1}\varphi \cdot \cos\varphi,$$
$$N(\varphi) = 1.$$

Somit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\, d\varphi = \frac{1}{2l} \cdot [\sin^{2l}\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

Also ist der Ursprung nach § 5 a *ein Wirbelpunkt.*

b) *Man kann für jedes* $m = 2l + 1$ *die Koeffizienten* a_μ, b_μ *so wählen, daß der Ursprung ein Strudelpunkt wird.*

Man braucht nur beispielsweise zu setzen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2l+1} - (x^2 + y^2)^l \cdot x}{y^{2l} \cdot x + (x^2 + y^2)^l \cdot y}.$$

Beweis: 1. *Zähler und Nenner sind relativ prim.* Hätten sie nämlich einen Faktor gemeinsam, so müßte diesen Faktor auch der Ausdruck enthalten, den man erhält, wenn man den Zähler mit x den Nenner mit y multipliziert und die erhaltenen Produkte voneinander subtrahiert. Man bekommt

$$-(x^2 + y^2)^{l+1}.$$

Zähler und Nenner haben aber mit diesem Ausdruck keinen Faktor gemeinsam, also auch unter sich nicht.

2. Man erhält nach (2) und (5):

$$Z(\varphi) = \sin^{2l}\varphi; \qquad N(\varphi) = 1.$$

Somit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\, d\varphi = J > 0$$

und nach § 5 b ist $\lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = 0$.

c) *Soll aber* $\lim_{\varphi \to -\infty} r(\varphi) = 0$ *sein, so wird man dieser Forderung gerecht durch*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2l+1} + (x^2 + y^2)^l \cdot x}{y^{2l} \cdot x - (x^2 + y^2)^l \cdot y}.$$

Der Beweis verläuft entsprechend dem vorausgegangenen.

II. Teil.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + \ldots + a_m x^m + d(x; y)}{b_0 y^m + \ldots + b_m x^m + e(x; y)}.$$

§ 10.

Die Voraussetzungen und die Behauptung.

Wir behalten im folgenden die im § 2 und im ersten Teil eingeführten Bezeichnungen bei.

Die Voraussetzungen:

I. Die Funktionen $A(x; y)$ und $B(x; y)$ sollen keinen reellen linearen Faktor gemeinsam haben und es soll *nicht*

$$\frac{A(x; y)}{B(x; y)} = \frac{y}{x}$$

sein.

II. Die Funktionen $\Delta(r; \varphi)$ und $E(r; \varphi)$ der Gleichung (e) sollen stetige Funktionen von r und φ und periodische Funktionen von φ mit der Periode 2π sein und es soll

$$\lim_{r \to 0} \Delta(r; \varphi) = 0, \quad \lim_{r \to 0} E(r; \varphi) = 0$$

sein und zwar gleichmäßig für alle φ.

III. Wenn die Gleichung $N(\varphi) = 0$ keine reelle Wurzel hat, soll es ein ϱ_1 geben, so daß sich um jeden Punkt $(r_0; \varphi_0)$ des Bereichs $0 < r \leqq \varrho_1$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ ein Rechteck abgrenzen läßt, in dem

$$|\Delta(r_1; \varphi) - \Delta(r_2; \varphi)| + |E(r_1; \varphi) - E(r_2; \varphi)| \leqq H(r_0; \varphi_0)\,|r_1 - r_2|.$$

IV. Wenn die Gleichung $N(\varphi) = 0$ reelle Wurzeln hat, so bezeichnen wir die im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ liegenden Wurzeln nach wachsender Größe geordnet mit

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \cdot \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi.$$

Es soll dann ein ϱ_1 und zu jedem φ_ν ein $\overline{\varphi}_\nu < \varphi_\nu$ und ein $\overline{\overline{\varphi}}_\nu > \varphi_\nu$ geben mit folgenden Eigenschaften:

a) In den Intervallen $\overline{\varphi}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\overline{\varphi}}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ soll keine Wurzel der Gleichung $Z(\varphi) = 0$ liegen.

b) In den Bereichen

$$0 < r \leqq \varrho_1; \quad \overline{\varphi}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\overline{\varphi}}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

soll sich um jeden Punkt $(r_0; \varphi_0)$ ein Rechteck abgrenzen lassen, in dem

$$|\Delta(r; \varphi_1) - \Delta(r; \varphi_2)| + |E(r; \varphi_1) - E(r; \varphi_2)| \leqq H(r_0; \varphi_0) \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|$$

ist.

c) In den Restbereichen

$$0 < r \leqq \varrho_1; \quad \bar{\bar{\varphi}}_\nu \leqq \varphi \leqq \bar{\varphi}_{\nu+1} \ (\nu = 1, \ldots n),$$

soweit sie existieren, soll sich um jeden Punkt $(r_0; \varphi_0)$ ein Rechteck abgrenzen lassen, in dem

$$|\Delta(r_1; \varphi) - \Delta(r_2; \varphi)| + |E(r_1; \varphi) - E(r_2; \varphi)| \leqq H(r_0; \varphi_0) \cdot |r_1 - r_2|.$$

V. Wenn die Differentialgleichung (a) isolierte Integralstrahlen hat, so bezeichnen wir diese mit $\varphi = \psi_\nu$. Die Zahlen λ_ν sollen angeben, eine wievielfache Wurzel von $N(\varphi) = 0$ die Zahl ψ_ν jeweils ist.

Dann soll es ein $\omega > 0$, $\varrho_2 > 0$ und ein positives $\mu < 1$ geben mit folgenden Eigenschaften:

a) In den Bereichen

$$\psi_\nu - \omega \leqq \varphi \leqq \psi_\nu + \omega; \quad 0 \leqq r \leqq \varrho_2$$

sollen $\dfrac{\partial \Delta(r; \varphi)}{\partial \varphi}$ und $\dfrac{\partial E(r; \varphi)}{\partial \varphi}$ existieren, beschränkt und stetig sein.

b) Für die Funktionen

$$g_\nu(r) = \operatorname*{Max}_{\psi_\nu - \omega \leqq \varphi \leqq \psi_\nu + \omega} |E(r; \varphi)| \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

sollen die Integrale

$$\int_0^{\varrho_2} \frac{g_\nu(r)}{r}\, dr = E_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

endlich sein.

c) Für die Funktionen[2])

$$h_\nu(r) = \operatorname*{Min}_{\psi_\nu - \omega \leqq \varphi \leqq \psi_\nu + \omega} \left(Z(\psi_\nu) \cdot \left(\mu \cdot \lambda_\nu \cdot Q_\nu(\psi_\nu) (\varphi - \psi_\nu)^{\lambda_\nu - 1} + \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right); 0 \right)$$

sollen die Integrale

$$\int_0^{\varrho_2} \frac{h_\nu(r)}{r}\, dr \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[2]) An Stelle des Ausdrucks

$$\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta} [\operatorname{Min}(F(\varphi), 0)]$$

oder, was dasselbe ist,

$$\operatorname{Min}\left(\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta} F(\varphi), 0 \right)$$

schreiben wir der Kürze halber:

$$\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta} (F(\varphi); 0).$$

endlich sein. Man kann dann, da $h_\nu(r)$ nirgends positive Werte hat,

$$0 \geqq \int_0^{\varrho_2} \frac{h_\nu(r)}{r}\, dr > -G$$

annehmen.

VI. Wenn die Differentialgleichung (a) Integralstrahlen wechselnden Verhaltens hat, so bezeichnen wir diese mit $\varphi = \chi_\nu$.

Es soll dann ein $\gamma_1 > 0$ und $R' > 0$ geben, so daß für die Funktionen

$$G_\nu(r) = \operatorname*{Max}_{\chi_\nu - \gamma_1 \leqq \varphi \leqq \chi_\nu + \gamma_1} |E(r; \varphi)|$$

die Integrale

$$\int_0^{R'} \frac{G_\nu(r) \cdot |lg\, r|}{r}\, dr$$

endlich sind.

Die Behauptung.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich beweisen, daß sich die Integralkurven der Differentialgleichung (b) in der Nähe des Ursprungs ebenso verhalten wie die der Differentialgleichung (a). Das heißt:

1. Ist der Ursprung für die Differentialgleichung (a) ein Strudelpunkt, so ist er es auch für die Differentialgleichung (b).

2. Ist der Ursprung für die Differentialgleichung (a) ein Wirbelpunkt, so läßt sich für die Differentialgleichung (b) zeigen, daß die Integralkurven, die durch Punkte in der Nähe des Ursprungs gehen, entweder geschlossene Kurven oder Spiralen sind.

3. Wenn für eine Integralkurve $x = x(s)$, $y = y(s)$ der Differentialgleichung (b) $\lim (x(s)^2 + y(s)^2) = 0$ ist, so ist sie entweder eine Spirale oder sie mündet in den Ursprung mit einer Tangentenrichtung, die der Gleichung $N(\varphi) = 0$ genügt.

4. Ist $\varphi = \varphi_\nu$ eine Knotenstelle der Differentialgleichung (a), so ist es auch eine Knotenstelle der Differentialgleichung (b).

5. Ist $\varphi = \psi_\nu$ ein isolierter Integralstrahl der Differentialgleichung (a), so gibt es auch bei der Differentialgleichung (b) nur eine einzige Integralkurve $\varphi = \varphi(s)$, $r = r(s)$, für die

$$\lim_{s \to S} r(s) = 0, \quad \lim_{s \to S} \varphi(s) = \psi_\nu$$

ist.

6. Ist $\varphi = \chi_\nu$ ein Integralstrahl wechselnden Verhaltens der Differentialgleichung (a), so gibt es auch für die Differentialgleichung (b) eine Integralkurve $r = r(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ derart, daß

a) $\lim_{s \to S} r(s) = 0, \quad \lim_{s \to S} \varphi(s) = \chi_\nu,$

b) die Integralkurven, die durch benachbarte, nahe genug am Ursprung liegende Punkte auf der einen Seite von ihr gehen, ebenfalls mit der Tangentenrichtung $y' = \tan \chi_\nu$ in den Ursprung münden, während die Integralkurven, die durch Punkte auf der anderen Seite von ihr gehen, nicht mit der Tangentenrichtung $y' = \tan \chi_\nu$ in den Ursprung münden.

§ 11.

A. Voraussetzungen über $\Delta(r; \varphi)$ und $E(r; \varphi)$, die von der Differentialgleichung (a) unabhängig sind.

In den §§ 12ff. soll der Beweis für die in § 10 ausgesprochenen Behauptungen unter den *dort* gegebenen Voraussetzungen geliefert werden.

Für die Anwendung in konkreten Fällen jedoch sind die in § 10 genannten Voraussetzungen über $\Delta(r; \varphi)$ und $E(r; \varphi)$ unhandlich, da zu ihrer Anwendung erst der Verlauf der Integralkurven der Differentialgleichung (a) festgestellt werden muß. Will man dies vermeiden, so kann man statt der Voraussetzungen II bis VI des § 10 folgende Voraussetzungen benutzen, die allerdings mehr verlangen.

1. $\Delta(r; \varphi)$ und $E(r; \varphi)$ sollen stetige Funktionen von r und φ und periodische Funktionen von φ mit der Periode 2π sein, und es soll

$$\lim_{r \to 0} \Delta(r; \varphi) = 0, \quad \lim_{r \to 0} E(r; \varphi) = 0$$

sein, und zwar gleichmäßig für alle φ.

2. Es soll ein ϱ $(0 < \varrho < 1)$ geben, so daß sich um jeden Punkt $(r_0; \varphi_0)$ des Bereichs $0 < r \leqq \varrho$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ ein Rechteck abgrenzen läßt, in dem

$$|\Delta(r_1; \varphi) - \Delta(r_2; \varphi)| + |E(r_1; \varphi) - E(r_2; \varphi)| \leqq G(r_0; \varphi_0) \cdot |r_1 - r_2|$$

ist, und daß für $0 \leqq r \leqq \varrho$

$$\frac{\partial \Delta(r; \varphi)}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E(r; \varphi)}{\partial \varphi}$$

existieren, beschränkt und stetig sind.

3. Setzt man

$$g(r) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |E(r; \varphi)|,$$

so soll

$$\int_0^\varrho \frac{g(r)\,|lg\,r|}{r}\,dr$$

endlich sein.

4. Setzt man

$$h(r) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \frac{\partial E(r; \varphi)}{\partial \varphi} \right|,$$

so soll auch

$$\int_0^\varrho \frac{h(r)}{r} dr$$

endlich sein.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Voraussetzungen II bis VI des § 10 erfüllt sind, wenn die eben genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

Man sieht leicht, daß die Beziehungen der Voraussetzungen III, IV und Va des § 10 aus Voraussetzung 2 des § 11 folgen, ebenso, daß aus Voraussetzung 3 des § 11 die Beziehungen der Voraussetzungen Vb und VI des § 10 folgen.

Bezüglich der Voraussetzungen Vc des § 10 und 4 des § 11 gilt:

Nach § 7, 1 ist

$$\lambda_\nu = 2n + 1; \quad Z(\psi_\nu) \cdot Q_\nu(\psi_\nu) > 0;$$

also

$$Z(\psi_\nu) \cdot \mu \cdot \lambda_\nu \cdot Q_\nu(\psi_\nu) \cdot (\varphi - \psi_\nu)^{\lambda_\nu - 1} \geqq 0.$$

Es ist daher

$$-|Z(\psi_\nu)| \cdot h(r) = -\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right| \cdot |Z(\psi_\nu)| \leqq \operatorname*{Min}_{\psi_\nu - \omega \leqq \varphi \leqq \psi_\nu + \omega} \left(Z(\psi_\nu) \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi}; 0 \right)$$

$$\leqq \operatorname*{Min}_{\psi_\nu - \omega \leqq \varphi \leqq \psi_\nu + \omega} \left(Z(\psi_\nu) \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi} + Z(\psi_\nu) \cdot \mu \cdot \lambda_\nu \cdot Q_\nu(\psi_\nu) \cdot (\varphi - \psi_\nu)^{\lambda_\nu - 1}; 0 \right)$$

$$= h_\nu(r) \leqq 0.$$

Wenn $\varepsilon < \varrho$ ist, ist somit

$$-|Z(\psi_\nu)| \cdot \int_\varepsilon^\varrho \frac{h(r)}{r} dr = -\int_\varepsilon^\varrho \frac{h(r) \cdot |Z(\psi_\nu)|}{r} dr \leqq \int_\varepsilon^\varrho \frac{h_\nu(r)}{r} dr \leqq 0.$$

Infolgedessen gilt, wenn Voraussetzung 4 des § 11 erfüllt ist:

$$-|Z(\psi_\nu)| \cdot \int_0^\varrho \frac{h(r)}{r} dr \leqq \int_\varepsilon^\varrho \frac{h_\nu(r)}{r} dr \leqq 0.$$

Da $\int_\varepsilon^\varrho \frac{h_\nu(r)}{r} dr$ eine monotone Funktion von ε ist, ist also

$$\int_0^\varrho \frac{h_\nu(r)}{r} dr$$

endlich. Es ist dann von selbst Voraussetzung Vc des § 10 erfüllt.

B. Hinreichende Voraussetzungen über $d(x;y)$ und $e(x;y)$.

Man rechnet leicht nach, daß die Voraussetzungen § 11 A, 1 bis 4 sicher dann erfüllt sind, wenn die Funktionen $d(x;y)$ und $e(x;y)$ folgenden Voraussetzungen genügen:

Die Funktionen

$$d(x;y);\ e(x;y);\ \frac{\partial d(x;y)}{\partial x};\ \frac{\partial d(x;y)}{\partial y};\ \frac{\partial e(x;y)}{\partial x};\ \frac{\partial e(x;y)}{\partial y}$$

sollen in einem gewissen Bereich

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} \leqq \varrho < 1$$

stetig sein und es soll ein $\lambda > 0$ geben, so daß in diesem Bereich

a) $$\boxed{|d(x;y)|+|e(x;y)| < \frac{r^m}{|lg\, r|^{2+\lambda}},}$$

b) $$\boxed{\left|\frac{\partial d(x;y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial d(x;y)}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial e(x;y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial e(x;y)}{\partial y}\right| < \frac{r^{m-1}}{|lg\, r|^{1+\lambda}}}$$

ist $(r = \sqrt{x^2+y^2})$.

Es kann hier ebenso wie in den bekannten Konvergenzkriterien $|\lg r|^{\lambda}$ durch die weniger verlangenden Ausdrücke $|\lg|\lg r||^{1+\mu}$ oder $|\lg|\lg r|| \cdot |\lg|\lg|\lg r|||^{1+K}$ usw. ersetzt werden.

Wir gehen zum Beweis der Behauptungen des § 10 *über und nehmen in allen folgenden* §§ *an, daß die in* § 10 *genannten Voraussetzungen I bis VI erfüllt seien.*

§ 12.

Die Eindeutigkeit der Integralkurven.

Wenn P klein genug ist, geht durch jeden Punkt des Bereichs $0 < r \leqq P$ nur eine Integralkurve.

Beweis. a) Wenn $N(\varphi) = 0$ reelle Wurzeln hat, kann man nach Voraussetzung IVa eine Zahl $k > 0$ so wählen, daß

$$\begin{aligned} &|Z(\varphi)| > k, \quad \text{für} \quad \overline{\varphi}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\overline{\varphi}}_\nu, \\ &|N(\varphi)| > k, \quad \text{für} \quad \overline{\overline{\varphi}}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\varphi}_{\nu+1}. \end{aligned} \qquad \nu = 1, 2 \ldots n.$$

Wählt man nun P so, daß

(35)
$$\left.\begin{aligned} &1.\quad P \leqq \varrho_1 \\ &2.\quad |\Delta(r;\varphi)| < \tfrac{k}{2} \\ &\qquad |E(r;\varphi)| < \tfrac{k}{2} \end{aligned}\right\} \text{für } 0 \leqq r \leqq P$$

ist, dann ist in den Bereichen

$$\overline{\varphi}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\overline{\varphi}}_\nu, \quad 0 < r \leqq P$$

gemäß der Voraussetzung IVb für die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{N(\varphi) + E(r;\varphi)}{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)},$$

in den Bereichen

$$\overline{\overline{\varphi}}_\nu \leqq \varphi \leqq \overline{\varphi}_{\nu+1}; \quad 0 < r \leqq P$$

nach § 10, IVc für die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)}$$

in genügend kleinen Umgebungen der einzelnen Punkte die Lipschitzsche Bedingung erfüllt.

b) Hat $N(\varphi) = 0$ keine reelle Wurzel, so ist dauernd $|N(\varphi)| > k$ und somit wegen § 10, III überall für $0 < r \leqq P$ die Lipschitzsche Bedingung für die Differentialgleichung (e) erfüllt.

§ 13.

$N(\varphi) = 0$ habe keine reelle Wurzel.

$N(\varphi) = 0$ *soll keine reelle Wurzel haben.*

I. Wählt man $k > 0$ klein genug, so ist dauernd $|N(\varphi)| > k$. Wenn $\varrho > 0$ klein und M groß genug ist, dann ist für $0 \leqq r \leqq \varrho$

$$|Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)| < M$$

$$|E(r;\varphi)| < \frac{k}{2};$$

also

$$|N(\varphi) + E(r;\varphi)| > \frac{k}{2}.$$

Jede Integralkurve läßt sich in der Form $r = r(s)$; $\varphi = \varphi(s)$ darstellen; dabei fassen wir r *und* φ *als rechtwinklige Koordinaten* auf und s *im Gegensatz zu früher als die Bogenlänge in der Ebene dieser rechtwinkligen Koordinaten* r *und* φ.

a) Solange $r(s) \leqq \varrho$ ist, hat

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{N(\varphi) + E(r;\varphi)}{\sqrt{r^2 (Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi))^2 + (N(\varphi) + E(r;\varphi))^2}}$$

festes Vorzeichen. $\varphi(s)$ ist also eine monotone Funktion von s.

b) Es sei

$$r_0 < \varrho \cdot e^{-\frac{2M}{k} \cdot 2\pi}. \tag{36}$$

Dann liegt das durch die Bedingungen

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$$

$$r_0 \cdot e^{-\frac{2M}{k}(\varphi - \varphi_0)} \leqq r \leqq r_0 \cdot e^{\frac{2M}{k}(\varphi - \varphi_0)}$$

gekennzeichnete „Dreieck" ganz in dem Gebiet $0 < r < \varrho$. Also ist in ihm

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)}$$

stetig und beschränkt; und zwar ist

$$\left|\frac{dr}{d\varphi}\right| < \varrho \cdot \frac{2M}{k}.$$

Die untere bzw. obere Begrenzungskurve des „Dreiecks" genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = -r_1 \frac{2M}{k}; \quad \text{bzw.} \quad \frac{dr_2}{d\varphi} = +r_2 \frac{2M}{k}.$$

Außerdem ist für $0 < r \leqq \varrho$

$$-r\frac{2M}{k} < -r\frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)} < r \cdot \frac{2M}{k}.$$

Daraus folgt nach einem Kriterium von O. Perron, Math. Annalen 76, daß die durch $(r_0; \varphi_0)$ gehende Integralkurve $r = r(\varphi)$ sich bis $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ erstreckt und daß für $\varphi_0 < \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$

$$r_1(\varphi) < r(\varphi) < r_2(\varphi)$$

ist. Also ist nach (36)

$$0 < r(\varphi_0 + 2\pi) < \varrho.$$

1. *Wenn dann* $r(\varphi_0 + 2\pi) = r(\varphi_0)$ *ist, liegt in der* xy*-Ebene eine geschlossene Kurve vor.*

2. *Wenn* $r(\varphi_0 + 2\pi) \neq r(\varphi_0)$ *ist, liegt in der* xy*-Ebene eine Spirale vor.*

Beweis. Wir behandeln den Fall, daß

(37) $$r(\varphi_0 + 2\pi) < r(\varphi_0).$$

Es liegt dann auch das „Dreieck"

$$\varphi_0 + 2\pi \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 4\pi$$

$$r(\varphi_0 + 2\pi) \cdot e^{-\frac{2M}{k}(\varphi - \varphi_0 - 2\pi)} \leqq r \leqq r(\varphi_0 + 2\pi) \cdot e^{+\frac{2M}{k}(\varphi - \varphi_0 - 2\pi)}$$

ganz im Gebiet $0 < r < \varrho$ und somit erstreckt sich die Integralkurve mindestens bis $\varphi_0 + 4\pi$. Aus (37) folgt wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven in der xy-Ebene, daß für $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$

$$r(\varphi + 2\pi) < r(\varphi)$$

sein muß. Also ist

$$0 < r(\varphi_0 + 4\pi) < r(\varphi_0 + 2\pi) < r_0.$$

Man kann dann weiter schließen, daß sich die Integralkurve bis $\varphi_0 + 6\pi$ erstreckt und

$$r(\varphi + 4\pi) < r(\varphi + 2\pi) < r(\varphi) \quad \text{für} \quad \varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$$

ist usw.

Damit ist Behauptung 2 *des* § 10 *bewiesen* und ein Teil von Behauptung 1.

Nach Bendixson nähert sich eine solche Spirale entweder dem Ursprung selbst oder einer den Ursprung einschließenden geschlossenen Kurve asymptotisch (a. a. O. Satz II, S. 11).

II. *Ist für die Differentialgleichung* (a) *der Ursprung ein Strudelpunkt, so ist er auch für die Differentialgleichung* (b) *ein Strudelpunkt.*

Beweis. Nach § 5, b ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\, d\varphi \neq 0.$$

Es sei beispielsweise

$$\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\, d\varphi = J > 0.$$

Wählt man $k > 0$ klein und K groß genug, so ist:

$$|N(\varphi)| > k; \quad |Z(\varphi)| < K.$$

Es werde nun ϱ so klein gewählt, daß für $0 \leqq r \leqq \varrho$

1. $|E(r;\varphi)| < \frac{k}{2}$;

2. $|E(r;\varphi)| < \frac{J \cdot k^2}{12 K \cdot \pi}$;

3. $|\Delta(r;\varphi)| < \frac{J \cdot k}{12\pi}$

ist. Nun werde M noch so gewählt, daß für $0 \leqq r \leqq \varrho$

$$|Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)| < M$$

ist.

Nach Abschnitt I dieses Paragraphen erstreckt sich, wenn (36) erfüllt ist, eine Integralkurve $r = r(\varphi)$ durch einen Punkt $(r_0; \varphi_0)$ bis $\varphi_0 + 2\pi$ und es ist dabei $r(\varphi) < \varrho$ für $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$. Somit gilt in diesem Intervall für eine solche Funktion $r(\varphi)$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r(\varphi);\varphi)}{N(\varphi) + E(r(\varphi);\varphi)} = -r \cdot f(\varphi).$$

$$r(\varphi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\, d\varphi},$$

$$r(\varphi_0 + 2\pi) = r_0 \cdot e^{-\int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} f(\varphi)\, d\varphi}.$$

Dabei ist:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\,d(\varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \left(\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)+E(r(\varphi);\,\varphi)} - \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\right) d\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{\Delta(r(\varphi);\,\varphi)\,d\varphi}{N(\varphi)+E(r(\varphi);\,\varphi)}$$

$$\geqq J - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \left|\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)+E(r;\,\varphi)} - \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\right| d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{|\Delta(r(\varphi);\,\varphi)|}{\frac{k}{2}}\,d\varphi$$

$$> J - K\frac{1}{k\cdot k/2}\cdot\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} |E(r(\varphi);\,\varphi)|\,d\varphi - \frac{2}{k}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} |\Delta(r(\varphi);\,\varphi)|\,d\varphi$$

$$> J - \frac{2K}{k^2}\cdot\frac{J\cdot k^2}{12K\cdot\pi}\cdot 2\pi - \frac{2}{k}\cdot\frac{J\cdot k}{12\pi}\cdot 2\pi$$

$$= J - \frac{J}{3} - \frac{J}{3} = \frac{J}{3}.$$

Somit ist

$$r(\varphi_0+2\pi) < r_0\cdot e^{-\frac{J}{3}} < r_0.$$

Man zeigt nun in der gleichen Weise, daß

$$r(\varphi_0+4\pi) < r(\varphi_0+2\pi)\cdot e^{-\frac{J}{3}} < r_0\cdot e^{-\frac{2J}{3}}$$

und allgemein

$$r(\varphi_0+2\nu\pi) < r_0\cdot e^{-\frac{\nu J}{3}}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\varphi\to\infty} r(\varphi) = 0.$$

Ist $J<0$, so beweist man auf ähnliche Weise, daß $\lim\limits_{\varphi\to-\infty} r(\varphi) = 0$ ist.

Damit ist Behauptung 1 *des* § 10 *bewiesen.*

§ 14.

Gebietsdefinitionen.

Wir setzen voraus, daß die Gleichung $N(\varphi)=0$ mindestens eine reelle Wurzel hat. Die im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ liegenden Wurzeln bezeichnen wir mit

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n;\qquad \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi.$$

Es ist dann

$$2 \leqq n \leqq 2m + 2.$$

Setzt man

$$g(r) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |E(r; \varphi)|,$$

$$f(r) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho \leqq r} g(\varrho),$$

Dann ist $f(r)$ eine stetige monoton[3]) wachsende Funktion von r. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $E(r; \varphi) \to 0$ ist

$$\lim_{r \to 0} f(r) = 0.$$

Ferner ist

$$f(r) \geqq |E(r; \varphi)|.$$

Deshalb ist auch

$$\lim_{r \to 0} \left(f(r) + \frac{1}{|lg\, r|} \right) = 0,$$

$$f(r) + \frac{1}{|lg\, r|} \geqq |E(r; \varphi)|. \tag{38}$$

Die Funktion $|N(\varphi)|$ hat für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ endlich viele Maxima M_ν und Minima m_λ. Die kleinste der Zahlen M_ν, m_λ, *wobei jedoch solche* m_λ, *die gleich* 0 *sind, nicht in Betracht gezogen werden sollen*, sei l. Es ist dann $l > 0$.

Es werde $\varkappa > 0$ und $\gamma > 0$ so klein gewählt, daß

$$\text{(39)} \quad \begin{cases} \text{1. in allen Intervallen } \varphi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu + \gamma \quad (\nu = 1, \ldots, n) \\ |Z(\varphi)| > 2\varkappa, \\ |N(\varphi)| < l, \\ \text{2. } 3\gamma < \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu, \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \\ \text{3. falls Integralstrahlen wechselnden Verhaltens vorkommen,} \\ \quad \gamma \leqq \gamma_1 \end{cases}$$

ist (§ 10, Voraussetzung VI).

Den kleinsten der Werte

$$|N(\varphi_\nu + \gamma)|, \quad |N(\varphi_\nu - \gamma)|, \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

bezeichnen wir mit η. Es ist dann

$$0 < \eta < l. \tag{40}$$

---

[3]) Wenn für eine Funktion $f(x)$ gilt

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{bzw.} \quad f(x_2) < f(x_1) \quad \text{für} \quad x_2 > x_1,$$

so soll sie wachsend bzw. abnehmend heißen, wenn aber nur gilt

$$f(x_2) \geqq f(x_1) \quad \text{bzw.} \quad f(x_2) \leqq f(x_1) \quad \text{für} \quad x_2 > x_1,$$

so soll sie monoton wachsend bzw. abnehmend heißen.

R werde nun so gewählt, daß

(41)
1. $R < P$ [vgl. § 12 (35)]
2. $R < 1$
   und für $0 \leqq r \leqq R$
3. $|\Delta(r; \varphi)| < \varkappa$
4. $f(r) + \frac{1}{|\lg r|} < \eta$ ist.

(42) *Von jetzt an wird nur mehr der Bereich $0 \leqq r \leqq R$ betrachtet. Ein Punkt einer Integralkurve, für den $r = 0$ oder $r = R$ ist, soll als ein Endpunkt der Kurve bezeichnet werden, so daß die verschiedenen im Bereich verlaufenden Stücke einer Integralkurve, die unseren Bereich verläßt, aber später wieder in ihn zurückkehrt, als verschiedene Integralkurven bezeichnet werden.*

Wir betrachten die durch die Gleichung

$$|N(\varphi)| = f(r) + \frac{1}{|\lg r|} \tag{43}$$

definierten Kurven.

Setzt man

$$f(r) + \frac{1}{|\lg r|} = v(r); \quad f(R) + \frac{1}{|\lg R|} = V, \tag{44}$$

so ist $v(r)$ eine wachsende, stetige Funktion von r und es ist $v(0) = 0$. Somit läßt sich für $v = v(r)$ die Umkehrfunktion bilden:

$$r = \bar{r}(v).$$

$\bar{r}(v)$ ist für $0 \leqq v \leqq V$ definiert, eindeutig, stetig und wachsend. Es ist

$$\bar{r}(0) = 0; \quad \bar{r}(V) = R.$$

Wegen (39), 1 liegen in den Intervallen $\varphi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu$ und $\varphi_\nu \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu + \gamma$ ($\nu = 1, \ldots, n$) außer den Stellen $\varphi = \varphi_\nu$ keine Extremalstellen von $|N(\varphi)|$; $|N(\varphi)|$ ist also in ihnen monoton und zwar in den Intervallen $\varphi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu$ abnehmend und in den Intervallen $\varphi_\nu \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu + \gamma$ wachsend. Gemäß der Definition von η nimmt $|N(\varphi)|$ in jedem der genannten Intervalle jeden zwischen 0 und η liegenden Wert und, da $V < \eta$ [nach (41), 4], erst recht jeden zwischen 0 und V liegenden Wert ein einziges Mal an. $v = |N(\varphi)|$ hat also in jedem der genannten Intervalle eine eindeutige Umkehrfunktion. Die im Intervall $\varphi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu$ liegende Umkehrfunktion sei

$$\varphi = \bar{\Phi}_\nu(v)$$

und die im Intervall $\varphi_\nu \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu + \gamma$ liegende sei

$$\varphi = \bar{\bar{\Phi}}_\nu(v).$$

$\bar{\Phi}_\nu(v)$ sind abnehmende, $\bar{\bar{\Phi}}_\nu(v)$ sind wachsende, stetige Funktionen. Sie sind für $0 \leqq v \leqq V$ definiert.

$$\bar{\Phi}_\nu(0) = \bar{\bar{\Phi}}_\nu(0) = \varphi_\nu.$$

$$\varphi_\nu - \gamma < \bar{\Phi}_\nu(V) < \varphi_\nu < \bar{\bar{\Phi}}_\nu(V) < \varphi_\nu + \gamma \quad [\text{nach (41), 4}].$$

In den Gebieten $0 \leqq r \leqq R$, $\varphi_\nu + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_{\nu+1} - \gamma$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gibt es keine Punkte, die der Gleichung (43) entsprechen; denn es ist $f(r) + \frac{1}{|\lg r|} < \eta$ und $|N(\varphi)|$ ist an den Grenzen $\geqq \eta$ und die übrigen Minimalwerte von $|N(\varphi)|$ in diesen Gebieten sind sogar größer als l.

Durch (43) sind also $2n$ Kurven gegeben. Sie haben die Parameterdarstellung:

$$(45) \quad \begin{cases} r = \bar{r}(v) \\ \varphi = \bar{\Phi}_\nu(v) \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots n; \qquad 0 \leqq v \leqq V.$$

und

$$\begin{cases} r = \bar{r}(v) \\ \varphi = \bar{\bar{\Phi}}_\nu(v) \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots n; \qquad 0 \leqq v \leqq V.$$

Die ersteren bezeichnen wir mit C'_ν, die letzteren mit C''_ν. Aus dem Vorstehenden folgt, daß sich C'_ν sowohl durch eine Gleichung der Form

$$r = r_{1,\nu}(\varphi)$$

als auch in der Form

$$\varphi = \varphi_{1,\nu}(r)$$

darstellen läßt, ebenso die Kurven C''_ν in der Form

$$r = r_{2,\nu}(\varphi) \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_{2,\nu}(r).$$

Dabei sind $r_{1,\nu}(\varphi)$, $r_{2,\nu}(\varphi)$, $\varphi_{1,\nu}(r)$ und $\varphi_{2,\nu}(r)$ monotone Funktionen ihrer Argumente.

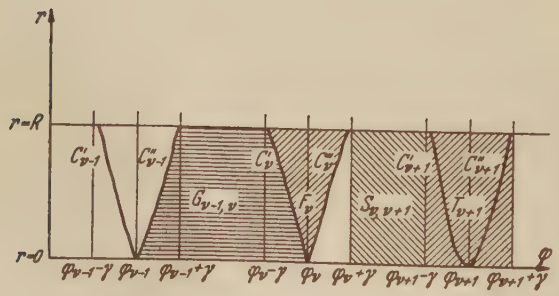


Fig. 2.

Es ist nämlich

$$r_{1,\nu}(\varphi) = \bar{r}(|N(\varphi)|)$$

für $\bar{\Phi}_\nu(V) \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu$;

$$\varphi_{1,\nu}(r) = \bar{\Phi}_\nu(v(r)) \text{ usw.}$$

Das durch die Kurven $r = 0$, $r = R$, C''_ν *und* $C'_{\nu+1}$ *begrenzte Gebiet soll mit* $G_{\nu,\nu+1}$, *das durch* C'_ν, C''_ν *und* $r = R$ *begrenzte mit* F_ν *bezeichnet werden. Die Gebiete* $0 \leqq r \leqq R$, $\varphi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\nu + \gamma$ *sollen* T_ν *und die Gebiete* $\varphi_\nu + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_{\nu+1} - \gamma$, $0 \leqq r \leqq R$ *sollen* $S_{\nu,\nu+1}$ *heißen (Fig. 2).*

§ 15.

Hilfssatz I. *Eine Integralkurve, die in einem Gebiet $G_{\nu,\nu+1}$ nahe genug an $r = 0$ herankommt, erstreckt sich nach einer beliebigen Seite verfolgt bis zu einer der Kurven C''_ν oder $C'_{\nu+1}$.*

Beweis. Wir wählen M so groß, daß

$$M > |Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)| \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq r \leqq R.$$

Nun sei $P_0 = (r_0; \varphi_0)$ ein beliebiger Punkt von $G_{\nu,\nu+1}$, für den

$$r_0 < R e^{M\pi} \tag{47}$$

ist. [NB! Nach (41) ist $R < 1$.] Dann setzen wir

$$r_0 e^{M(\varphi-\varphi_0)} = r_3(\varphi); \quad r_0 e^{-M(\varphi-\varphi_0)} = r_4(\varphi).$$

Da $\varphi_{\nu+1} - \varphi_0 < \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu \leqq \pi$ ist, ist

$$\underline{r_4(\varphi) < r_0 e^{-M\pi}} \underline{\leq R e^{M\pi} \cdot e^{-M\pi} = R} \quad \text{für} \quad \varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_{\nu+1}.$$

Somit schneidet die Kurve $r = r_4(\varphi)$ die Kurve $C'_{\nu+1}$, und zwar, da $r_4(\varphi)$ monoton wächst, während $r_{1,\nu+1}(\varphi)$ monoton abnimmt, nur in *einem* Punkt $P_4 = (R_4; \Phi_4)$. Ebenso schneidet $r = r_3(\varphi)$ die Kurve $C'_{\nu+1}$; denn es ist dauernd $0 < r_3(\varphi) < r_0$ für $\varphi > \varphi_0$. Der Punkt, in dem sie sich für wachsendes φ zum erstenmal schneiden, sei $P_3 = (R_3; \Phi_3)$. Dann verläuft $r = r_3(\varphi)$ für $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi_3$ ganz in $G_{\nu,\nu+1}$. Außerdem sieht man leicht, daß $\Phi_4 < \Phi_3$ ist. Durch den Punkt P_4 legen wir eine Gerade mit der Gleichung

$$r = R_4 + (\varphi - \Phi_4) \cdot (R_4 \cdot |G(R_4; \Phi_4)| + 1)$$

[bezüglich $G(r;\varphi)$ vgl. (e), S. 274].

Nach S. 302 o. ist in $G_{\nu,\nu+1}$

$$|N(\varphi)| \geqq f(r) + \frac{1}{|lgr|}.$$

Also ist in $G_{\nu,\nu+1}$ für $r > 0$

$$|N(\varphi) + E(r;\varphi)| \geqq |N(\varphi)| - |E(r;\varphi)| \geqq |N(\varphi)| - f(r) \geqq \frac{1}{|lgr|} > 0; \tag{48}$$

$$r \cdot |G(r;\varphi)| = r \left|\frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)}\right| < r \cdot M \cdot |lgr|. \tag{49}$$

$|G(R_4; \Phi_4)|$ ist daher endlich.

Wir umgrenzen nun ein Gebiet G in folgender Weise:

Es sei (vgl. Fig. 3)

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi_3;$$

für $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \Phi_4$ sei $r_3(\varphi) \leqq r \leqq r_4(\varphi)$,

für $\Phi_4 \leqq \varphi \leqq \Phi_3$ sei $r_3(\varphi) \leqq r \leqq R_4 + (\varphi - \Phi_4) \cdot (R_4 \cdot |G(R_4; \Phi_4)| + 1)$.

Im Gebiet G sei eine Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = F(r;\varphi) \tag{50}$$

in folgender Weise definiert:

$$F(r;\varphi) = \begin{cases} 1. & -r\cdot G(r;\varphi) \text{ für } G_{\nu,\nu+1} \\ 2. & -r\cdot G(r;\varphi_{2,\nu}(r)) \text{ für } \varphi < \varphi_{2,\nu}(r), \text{ falls solche Punkte in } G \text{ vorkommen} \\ 3. & -r\cdot G(r;\varphi_{1,\nu+1}(r)) \text{ für } \varphi \geqq \varphi_{1,\nu+1}(r);\ r \leqq R_4 \\ 4. & -R_4\cdot G(R_4;\varphi_{1,\nu+1}(R_4)) = -R_4\cdot G(R_4;\Phi_4) \text{ für } r \geqq R_4 \text{ (konstant!).} \end{cases} \tag{51}$$

(vgl. Fig. 3).

$F(r;\varphi)$ ist dann in G stetig. Für jeden Punkt des Gebietes G ist der Wert von $F(r;\varphi)$ gleich einem Wert von $-\varrho\cdot G(\varrho;\psi)$, wobei $(\varrho;\psi)$ ein Punkt

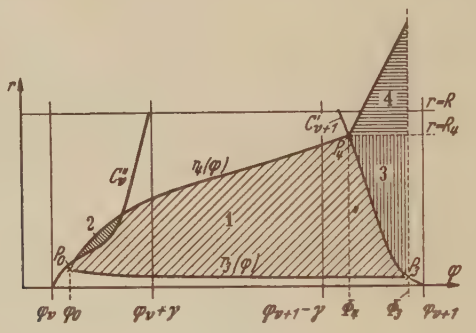


Fig. 3.

von $G_{\nu,\nu+1}$ ist, für den $R_3 \leqq \varrho \leqq R_4$ ist. Also ist $F(r;\varphi)$ auch beschränkt; nämlich nach (49)

$$|F(r;\varphi)| < M\cdot R_4\cdot |\lg R_3|.$$

Für die Grenzen von G gilt nach (49):

1. Die *untere* Grenzkurve $r = r_3(\varphi)$ gehört ganz $G_{\nu,\nu+1}$ an; daher ist an jedem ihrer Punkte

$$\frac{dr_3(\varphi)}{d\varphi} = -M r_3(\varphi)\cdot|lg\, r_3(\varphi)| \leq -r_3(\varphi)\cdot G(r_3(\varphi);\varphi) = F(r_3(\varphi);\varphi).$$

2. Für die Punkte der *oberen* Grenzkurve, die der Gleichung $r = r_4(\varphi)$ entsprechen und in $G_{\nu,\nu+1}$ liegen, ist:

$$\frac{dr_4(\varphi)}{d\varphi} = M\cdot r_4(\varphi)\cdot|lg\, r_4(\varphi)| \geq -r_4\cdot G(r_4(\varphi);\varphi) = F(r_4(\varphi);\varphi).$$

3. Für die Punkte der *oberen* Grenzkurve, die der Gleichung $r = r_4(\varphi)$ entsprechen und für die $\varphi_4(r) < \varphi_{2,\nu}(r)$ ist [$\varphi = \varphi_4(r)$ sei die Umkehrfunktion von $r = r_4(\varphi)$], falls solche vorkommen, ist

$$\frac{d\,r_4(\varphi)}{d\,\varphi} = M r_4(\varphi) \cdot |lg r_4(\varphi)| \geq -r_4(\varphi) \cdot G(r_4(\varphi); \varphi_{2,\nu}(r_4(\varphi))) = F(r_4(\varphi); \varphi).$$

4. Für den geraden Teil der *oberen* Grenze ist:

$$\text{Differentialquotient} = R_4 \cdot |G(R_4; \Phi_4)| + 1 \geq -R_4 \cdot G(R_4; \Phi_4) = F(r; \varphi).$$

Somit sind für die Differentialgleichung (50) in G die Voraussetzungen des S. 297 erwähnten Kriteriums von Perron erfüllt. Also erstreckt sich jede durch $(r_0; \varphi_0)$ gehende Integralkurve $r = R(\varphi)$ dieser Differentialgleichung bis $\varphi = \Phi_3$ und verläuft dabei zwischen der oberen und unteren Grenze von G. Sie schneidet also $C'_{\nu+1}$ in einem Punkt zwischen P_3 und P_4. Außerdem besteht die Möglichkeit, daß sie vorher C''_ν trifft. Von dem Punkt P_0 bis zu dem Punkt, in dem sie zum erstenmal eine der Kurven C''_ν oder $C'_{\nu+1}$ trifft, verläuft sie ganz in $G_{\nu,\nu+1}$. Dort ist

$$F(r; \varphi) = -r \cdot G(r; \varphi).$$

Sie fällt bis zu diesem Punkt also mit der durch P_0 gehenden Integralkurve von (e) zusammen. Daraus folgt, daß die letztere für wachsendes φ verfolgt, entweder C''_ν oder $C'_{\nu+1}$ trifft.

In entsprechender Weise wird der Beweis für abnehmendes φ geführt. Die Bedingung unseres Satzes, daß $r(\varphi)$ nahe genug an 0 herankommen soll, ist durch (47) genauer beschrieben.

Ergänzung. Liegt P_0 in $S_{\nu,\nu+1}$, so liegen keine Punkte von C''_ν (oder $C'_{\nu+1}$) über P_0. Es fallen dann keine Punkte von C''_ν in unser Gebiet G. $r = R(\varphi)$ verläuft also, bis es für wachsendes φ verfolgt $C'_{\nu+1}$ zum erstenmal trifft, ganz in $G_{\nu,\nu+1}$. Somit fällt es bis zu diesem Punkt mit $r = r(\varphi)$ zusammen. Daraus folgt der Satz:

Geht eine Integralkurve durch einen Punkt $P_0 = (r_0; \varphi_0)$ eines Gebietes $S_{\nu,\nu+1}$, für den

$$r_0 < R e^{M\pi}$$

ist, so erstreckt sie sich nach der einen Seite bis $C'_{\nu+1}$, nach der anderen bis C''_ν.

Dieser Satz stellt die Übertragung von § 6, I (S. 277) auf die Differentialgleichung (b) dar.

§ 16.

Hilfssatz II. *Sind $(r_1; \varphi_0)$ und $(r_2; \varphi_0)$ irgend zwei verschiedene Punkte von $G_{\nu,\nu+1}$ mit dem gleichen Wert von φ, so gibt es keine Integralkurve, die durch beide Punkte geht. Dabei ist Festsetzung* (42) S. 301 *zu beachten.*

Beweis: Wir nehmen an, es gebe eine Integralkurve, die durch die beiden Punkte $(r_1;\ \varphi_0)$ und $(r_2;\ \varphi_0)$ von $G_{\nu,\nu+1}$ geht. Sie läßt sich dann in der Form

$$r = r(s); \qquad \varphi = \varphi(s)$$

schreiben; dabei fassen wir r und φ als rechtwinklige Koordinaten auf und s als die Bogenlänge in der Ebene dieser rechtwinkligen Koordinaten r und φ. Dann ist

$$\frac{dr}{ds} = -r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{\pm\sqrt{r^2(Z(\varphi)+\Delta(r;\varphi))^2 + (N(\varphi)+E(r;\varphi))^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{N(\varphi) + E(r;\varphi)}{\pm\sqrt{r^2(Z(\varphi)+\Delta(r;\varphi))^2 + (N(\varphi)+E(r;\varphi))^2}}.$$

Es gibt nun s_1 und s_2, so daß

$$\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = \varphi_0,$$

$$r(s_1) = r_1; \qquad r(s_2) = r_2.$$

Dabei können wir $s_1 < s_2$ und $r_1 > r_2$ annehmen. In den Bereichen $G_{\nu,\nu+1}$ gilt (48); also ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=s_1} \neq 0. \tag{52}$$

1. *Die Punkte* $(r(s_1);\ \varphi(s_1))$ und $(r(s_2);\ \varphi(s_2))$ *sollen in* $S_{\nu,\nu+1}$ *liegen.* Wir können annehmen, daß $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=s_1} > 0$ ist; denn den Fall $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=s_1} < 0$ kann man durch die Transformation $\bar{\varphi} = -\varphi$; $\bar{r} = r$ auf diesen zurückführen. Bezeichnet man die Stelle, an der $\varphi(s)$ den größten Wert für $s_1 \leqq s \leqq s_2$ erreicht, mit σ, so ist

$$\varphi(\sigma) > \varphi(s_1); \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=\sigma} = 0.$$

Also

$$N(\varphi(\sigma)) + E(r(\sigma);\ \varphi(\sigma)) = 0.$$

Nach (48) muß daher der Punkt $P_\sigma = (r(\sigma);\ \varphi(\sigma))$ in einem Gebiet F_λ liegen und es ist $\lambda \geqq \nu + 1$.

Die Integralkurve trifft sowohl für $s_1 \leqq s < \sigma$ als auch für $\sigma < s \leqq s_2$ mindestens je einmal die Gerade $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$. Es gibt dann $\Sigma_1 < \sigma$ und $\Sigma_2 > \sigma$, so daß

$$\varphi(s) > \varphi_\lambda - \gamma \quad \text{für} \quad \Sigma_1 < s < \Sigma_2,$$

$$\varphi(\Sigma_1) = \varphi(\Sigma_2) = \varphi_\lambda - \gamma.$$

Da auf der Geraden $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ die Ungleichung (48) gilt, ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=\Sigma_1} > 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=\Sigma_2} < 0.$$

Da der Punkt P_σ in F_λ liegt und $\varphi(s) \leqq \varphi(\sigma)$ ist, so ist

$$\varphi_\lambda - \gamma < \varphi(s) < \varphi_\lambda + \gamma \quad \text{für} \quad \Sigma_1 < s < \Sigma_2.$$

D. h. die Integralkurve verläuft für $\Sigma_1 \leqq s \leqq \Sigma_2$ in T_λ. Dort ist nach (39) und (41)

$$|Z(\varphi) + \Delta(r;\ \varphi)| \geqq |Z(\varphi)| - |\Delta(r;\ \varphi)| > \varkappa > 0. \tag{53}$$

Da r nicht 0 wird, kann $\frac{dr}{ds}$ auf diesem Kurvenstück sein Vorzeichen nicht wechseln. Somit müßten

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\substack{r=r(\Sigma_1)\\ \varphi=\varphi(\Sigma_1)}} = \left(\frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}}\right)_{s=\Sigma_1}$$

und

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\substack{r=r(\Sigma_2)\\ \varphi=\varphi(\Sigma_2)}} = \left(\frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}}\right)_{s=\Sigma_2}$$

verschiedenes Vorzeichen haben.

Nun ist aber nach (48)

$$\operatorname{sign}\left(N(\varphi) + E(r;\ \varphi)\right)_{\substack{r=r(\Sigma_1)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}} = \operatorname{sign} N(\varphi_\lambda - \gamma),$$

$$\operatorname{sign}\left(N(\varphi) + E(r;\ \varphi)\right)_{\substack{r=r(\Sigma_2)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}} = \operatorname{sign} N(\varphi_\lambda - \gamma).$$

Nach (53) ist:

$$\operatorname{sign}\left(Z(\varphi) + \Delta(r;\ \varphi)\right)_{\substack{r=r(\Sigma_1)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}} = \operatorname{sign} Z(\varphi_\lambda - \gamma),$$

$$\operatorname{sign}\left(Z(\varphi) + \Delta(r;\ \varphi)\right)_{\substack{r=r(\Sigma_2)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}} = \operatorname{sign} Z(\varphi_\lambda - \gamma).$$

Also haben im Widerspruch zu oben

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\substack{r=r(\Sigma_1)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\substack{r=r(\Sigma_2)\\ \varphi=\varphi_\lambda-\gamma}}$$

gleiches Vorzeichen.

2. *Wenn die beiden Punkte* $(r_1;\ \varphi_0)$ *und* $(r_2;\ \varphi_0)$ *zwar in* $G_{\nu,\nu+1}$ *aber nicht in* $S_{\nu,\nu+1}$ *liegen*, kann man (gegebenenfalls durch die Transformation $\bar{\varphi} = -\varphi$, $\bar{r} = r$) erreichen, daß $\varphi(s_1) = \varphi_0 > \varphi_{\nu+1} - \gamma$ ist. Wir haben dann folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Die Funktion nimmt für $s_1 \leqq s \leqq s_2$ auch größere Werte an als $\varphi_{\nu+1} + \gamma$. Die Integralkurve müßte dann die Gerade $\varphi = \varphi_{\nu+1} + \gamma$ zweimal treffen, was nach Abschnitt 1 unmöglich ist.

b) Die Funktion $\varphi(s)$ nimmt für $s_1 \leqq s \leqq s_2$ auch kleinere Werte als $\varphi_{\nu+1} - \gamma$ an. Dann müßte die Integralkurve die Gerade $\varphi = \varphi_{\nu+1} - \gamma$ zweimal treffen, was nach 1. nicht möglich ist.

c) Die Integralkurve bleibt für $s_1 \leqq s \leqq s_2$ im Intervall $\varphi_{\nu+1} - \gamma \leqq \varphi(s) \leqq \varphi_{\nu+1} + \gamma$. Dann ist nach (53) das Vorzeichen von $\frac{dr}{ds}$ unveränderlich, und zwar ist, da $s_2 > s_1$ und $r_2 < r_1$ angenommen wurde,

$$\frac{dr}{ds} < 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es zwischen s_1 und s_2 ein σ, so daß $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{s=\sigma} = 0$. Der Punkt $(r(\sigma); \varphi(\sigma))$ muß in $F_{\nu+1}$ liegen. Da die gerade Verbindungsstrecke der Punkte $(r(s_1); \varphi(s_1))$ und $(r(s_2); \varphi(s_2))$ links von $C'_{\nu+1}$ läuft, muß $\varphi(\sigma) > \varphi(s_1)$ sein, und zwar sei $\varphi(\sigma)$ gerade der größte Wert, den $\varphi(s)$ zwischen s_1 und s_2 erreicht. Es gibt dann ein Σ_1 und Σ_2, so daß

$$s_1 \leqq \Sigma_1 < \sigma < \Sigma_2 \leqq s_2; \quad \varphi(\Sigma_1) = \varphi(\Sigma_2) = \varphi(s_1)$$

und

$$\varphi(s) > \varphi(s_1) \quad \text{für} \quad \Sigma_1 < s < \Sigma_2.$$

Die Punkte $(r(\Sigma_1); \varphi(\Sigma_1))$ und $(r(\Sigma_2); \varphi(\Sigma_2))$ liegen in $G_{\nu,\nu+1}$; denn es ist $r(\Sigma_2) < r(\Sigma_1) \leqq r(s_1)$ [der Punkt $(r(\Sigma_1); \varphi(\Sigma_1))$ kann eventuell auf der Grenze $C'_{\nu+1}$ liegen]; außerdem liegen sie in $T_{\nu+1}$. Es gelten also für sie die Ungleichungen (48) und (53). Somit lassen sich die Überlegungen von 1. (S. 306f.) wörtlich übertragen; man hat nur statt $\varphi_\lambda - \gamma$ jeweils $\varphi(s_1)$ einzusetzen.

§ 17.

Hilfssatz III: *Das Bild einer Integralkurve, für die* $\lim r = 0$ *ist, in der x-y-Ebene ist entweder eine Spirale oder mündet in den Ursprung mit einer Tangentenrichtung, die der Gleichung* (8) *genügt.* (Vgl. Bendixson, a. a. O. Satz X, S. 34.)

Beweis: Ist wieder s die Bogenlänge in der r-φ-Ebene, so kann man annehmen, daß $r(s)$ für wachsendes s nach 0 geht. Aus

$$\lim_{s \to S} r(s) = 0$$

— es kann auch $S = \infty$ sein — folgt:

$$r(s) < R^{e^{M\pi}} \quad \text{für} \quad s \geqq \Sigma,$$

wenn man Σ groß genug wählt [S. 303, (47)].

Nach Hilfssatz I (§ 15) finden wir für $s \to S$ immer wieder s-Werte, für die die zugehörigen Kurvenpunkte in einem der Gebiete F_λ liegen. Zur be-

sonderen Kennzeichnung werden wir für solche s-Werte den Buchstaben σ, eventuell mit Index, verwenden. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Es gibt ein Σ_1, so daß alle Punkte $(r(\sigma); \varphi(\sigma))$ für $\sigma \geqq \Sigma_1$ in dem *gleichen* Gebiet F_λ liegen.

2. Es gibt keinen solchen Wert Σ_1.

Wir behandeln zuerst den 2. *Fall.* Der Punkt $(r(\sigma_0); \varphi(\sigma_0))$ liege in $F_\varkappa$. Dann gibt es ein $\sigma_\nu > \sigma_0$, so daß die Punkte $(r(\sigma_\nu); \varphi(\sigma_\nu))$ in Gebieten F_λ liegen, für die $\lambda \neq \varkappa$ ist. Aus Stetigkeitsgründen muß es ein $\sigma_1 > \sigma_0$ geben, so daß der Punkt $(r(\sigma_1); \varphi(\sigma_1))$ entweder in $F_{\varkappa-1}$ oder in $F_{\varkappa+1}$ liegt. Ich nehme beispielsweise an, er liege in $F_{\varkappa+1}$. Ebenso gibt es ein $\sigma_2 > \sigma_1$, so daß der Punkt $(r(\sigma_2); \varphi(\sigma_2))$ entweder in $F_\varkappa$ oder in $F_{\varkappa+2}$ liegt. In $F_\varkappa$ kann er nicht liegen, da sonst im Widerspruch zu Hilfssatz II die Integralkurve zweimal das Gebiet $G_{\varkappa,\varkappa+1}$ durchqueren müßte. Er liegt also in $F_{\varkappa+2}$ und es ist

$$\varphi(s) > \varphi_\varkappa \quad \text{für} \quad s \geqq \sigma_1.$$

Ebenso schließt man weiter: Es gibt $\sigma_3 > \sigma_2$, so daß $(r(\sigma_3); \varphi(\sigma_3))$ in $F_{\varkappa+3}$ liegt; und es ist

$$\varphi(s) > \varphi_{\varkappa+1} \quad \text{für} \quad s \geqq \sigma_2$$

usw. Daraus folgt

$$\lim_{s \to S} \varphi(s) = \infty.$$

Die Integralkurve stellt in der x-y-Ebene eine Spirale dar.

1. *Fall:* Es kann für $s \geqq \Sigma_1$ die Integralkurve das Gebiet T_λ nicht verlassen. Würde sie nämlich einen Punkt auf $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ oder $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$

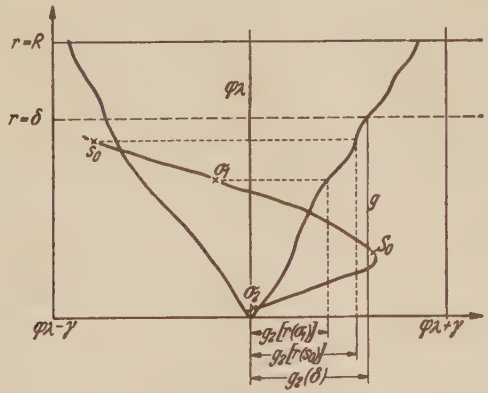


Fig. 4.

erreichen, so müßte sie sich nach der Ergänzung zu Hilfssatz I (S. 305) bis $F_{\lambda-1}$ bzw. $F_{\lambda+1}$ erstrecken. Dies widerspricht der Wahl von Σ_1. In T_λ

gilt die Ungleichung (53). Also kann $\frac{dr}{ds}$ für $s \geqq \Sigma_1$ sein Vorzeichen nicht wechseln, und zwar ist

$$\frac{dr}{ds} < 0 \text{ für } s \geqq \Sigma_1.$$

Die Gleichung der Kurven C'_λ und C''_λ sei

$$\varphi = \varphi_\lambda - g_1(r) \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \varphi_\lambda + g_2(r).$$

Die beiden Funktionen $g_\nu(r)$ sind positiv und monoton. Es ist nach S. 301 f.

$$\lim_{r \to 0} g_1(r) = 0, \quad \lim_{r \to 0} g_2(r) = 0.$$

$g_\nu(r(s))$ sind monoton abnehmende Funktionen von s. Man vergleiche für die folgenden Überlegungen Fig. 4.

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß

(54) $$g_1(r) < \varepsilon, \quad g_2(r) < \varepsilon \quad \text{für} \quad r \leqq \delta.$$

Außerdem gibt es ein $s_0 \geqq \Sigma_1$, so daß

(55) $$r(s) < \delta \quad \text{für} \quad s \geqq s_0.$$

Es gibt ferner ein $\sigma_1 > s_0$, so daß der Punkt $(r(\sigma_1);\ \varphi(\sigma_1))$ in F_λ liegt.

Dann ist

(56) $$\varphi_\lambda - g_1(\delta) \leqq \varphi(s) \leqq \varphi_\lambda + g_2(\delta) \quad \textit{für} \quad s > \sigma_1.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung nehmen wir beispielsweise an, es gebe ein $S_0 > \sigma_1$, so daß

$$\varphi(S_0) > \varphi_\lambda + g_2(\delta).$$

Zeichnet man die Strecke (g)

$$\varphi = \varphi_\lambda + g_2(\delta); \quad 0 \leqq r \leqq \delta,$$

so liegt diese Strecke in $G_{\lambda,\lambda+1}$. Die Integralkurve muß nun diese Strecke zwischen $s = \sigma_1$ und $s = S_0$ mindestens einmal schneiden; denn es ist

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma_1) &\leqq \varphi_\lambda + g_2(r(\sigma_1)) < \varphi_\lambda + g_2(r(s_0)) \leqq \varphi_\lambda + g_2(\delta) \\ \varphi(S_0) &> \varphi_\lambda + g_2(\delta) \end{aligned}$$

und

$$0 < r(s) < \delta \quad \text{für} \quad \sigma_1 \leqq s \leqq S_0.$$

$(r(S_0);\ \varphi(S_0))$ liegt außerhalb F_λ. Nun gibt es $\sigma_2 > S_0$, so daß der Punkt $(r(\sigma_2);\ \varphi(\sigma_2))$ wieder in F_λ liegt. Zwischen $s = S_0$ und $s = \sigma_2$ müßte die Integralkurve die Strecke (g) noch einmal schneiden. Dies widerspricht dem Hilfssatz II.

Auf ähnliche Art ist die Annahme $\varphi(S_0) < \varphi_\lambda - g_1(\delta)$ zu widerlegen.

Aus (54) und (56) folgt:

$$|\varphi_\lambda - \varphi(s)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad s > \sigma_1.$$

D. h.

$$\lim_{s \to S} \varphi(s) = \varphi_\lambda$$

Hiermit ist Behauptung 3 *des* § 10 *bewiesen.*

§ 18.

Hilfssatz IV: *Integralkurven, die ganz in* T_λ *verlaufen, endigen auf der einen Seite auf* $r = R$, *auf der anderen Seite im Punkt* $r = 0$; $\varphi = \varphi_\lambda$.

Beweis: Die Wahl von R war nur an die Ungleichungen (41) geknüpft. Diese gelten auch für $R + \delta$, wenn man $\delta > 0$ klein genug wählt.

$P_0 = (r_0; \varphi_0)$ sei ein Punkt auf der Integralkurve. Wählt man $\varepsilon < r_0$, aber positiv, so ist

$$\frac{N(\varphi) + E(r; \varphi)}{-r \cdot (Z(\varphi) + \Delta(r; \varphi))}$$

im Gebiet $\varepsilon \leqq r \leqq R + \delta$; $\varphi_\lambda - \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_\lambda + \gamma$ stetig und beschränkt nach (53); deshalb muß sich die Integralkurve $\varphi = \varphi(r)$ von P_0 aus nach beiden Seiten bis an den Rand des Gebietes erstrecken. Auf der Integralkurve wechselt $\frac{dr}{ds}$ sein Vorzeichen nicht. Man kann $\frac{dr}{ds} > 0$ annehmen.

1. Die Integralkurve kann nun für $\varepsilon \leqq r < R$ weder die Grenze $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$ noch $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ treffen; denn dort ist nach (48) $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$. Sie müßte die Grenze dann überschreiten und würde nicht ganz in T_λ verlaufen.

2. Für wachsendes s wächst r. Die Integralkurve kann also auf diesem Ast $r = \varepsilon$ nicht erreichen; sondern entweder erstreckt sie sich bis $r = R + \delta$ oder bis zu einer der Strecken $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$; $R \leqq r \leqq R + \delta$ oder $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$; $R \leqq r \leqq R + \delta$. In jedem Fall muß sie $r = R$ in einem bestimmten Punkt schneiden.

3. Für abnehmendes s nimmt $r(s)$ ab und kann somit $r = R$ nicht erreichen; sondern muß sich bis $r = \varepsilon$ erstrecken. Da ε beliebig klein, $r = 0$ die untere Grenze und $r(s)$ monoton ist, ist

$$\lim r(s) = 0$$

und nach Hilfssatz III (§ 17) ist dann

$$\lim \varphi(s) = \varphi_\lambda.$$

§ 19.

Hilfssatz V: *Ist* $\varphi = \varphi_\lambda$ *ein Integralstrahl gleichen Verhaltens für die Differentialgleichung* (a), *so mündet jede Integralkurve der Differentialgleichung* (b), *die in das Gebiet* T_λ *durch eine der Grenzen* $\varphi = \varphi_\lambda \pm \gamma$ *eintritt,*

entweder in den Punkt $r = 0$; $\varphi = \varphi_\lambda$ oder sie endigt auf $r = R$, ohne T_λ vorher wieder zu verlassen.

Beweis: Wir nehmen beispielsweise an, daß die Integralkurve $r = r(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ durch die Gerade $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ im Punkt P_1 nach T_λ eintritt, und zwar für wachsendes s. Dann gilt:

1. Die Integralkurve kann wegen Hilfssatz II § 16 T_λ nicht wieder durch die Begrenzungsstrecke $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ verlassen.

2. Die Integralkurve kann T_λ auch nicht durch die Begrenzungsstrecke $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$ verlassen.

Zum Beweis nehmen wir an, daß sie $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$ in einem Punkt P_2 trifft. Es ist dann sowohl an P_1 als auch an P_2 $\frac{d\varphi}{ds} \geqq 0$. Wegen (48) ist dort sogar $\frac{d\varphi}{ds} > 0$. Nach (53) verschwindet $\frac{dr}{ds}$ in T_λ nicht. Somit müßte

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{ds} : \frac{d\varphi}{ds}$$

an den Punkten P_1 und P_2 das gleiche Vorzeichen haben.

Nach (48) und (53) ist aber

$$(57) \qquad \operatorname{sign} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{sign}\left(-r \cdot \frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{N(\varphi) + E(r;\varphi)}\right) = \operatorname{sign}\left(-r\,\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}\right)$$
$$\text{für } \varphi = \varphi_\lambda \pm \gamma;\ r \leqq R.$$

Nach (39) hat nun $Z(\varphi)$ an P_1 und P_2 gleiches, nach (13) und (16) hat dort $N(\varphi)$ verschiedenes Vorzeichen; somit hat auch $-r\frac{N(\varphi)}{Z(\varphi)}$ an P_1 und P_2 verschiedenes Vorzeichen im Widerspruch zu oben.

3. Die Integralkurve verläuft also von P_1 ab in T_λ. Man schließt nun ähnlich wie in § 18 S. 311, daß sie entweder auf $r = R$ oder im Punkt $r = 0$; $\varphi = \varphi_\lambda$ endigt.

§ 20.

$\varphi = \varphi_\lambda$ sei ein Knotenstrahl der Differentialgleichung (a).

Es ist dann nach § 7, 2, S. 279:

$$-r \cdot \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} < 0 \text{ für } \varphi = \varphi_\lambda - \gamma,$$

$$-r \cdot \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} > 0 \text{ für } \varphi = \varphi_\lambda + \gamma.$$

Nach (57) ist daher für eine Integralkurve von (b) bzw. (e), die durch $\varphi = \varphi_\lambda - \gamma$ nach T_λ eintritt — wir nehmen an: für wachsendes s — am Eintrittspunkt $\frac{dr}{d\varphi} < 0$. Da $\frac{d\varphi}{ds} > 0$ ist, ist $\frac{dr}{ds} < 0$. Für eine Integralkurve von (e), die durch $\varphi = \varphi_\lambda + \gamma$ für wachsendes s nach T_λ eintritt, ist am Eintrittspunkt $\frac{dr}{d\varphi} > 0$, $\frac{d\varphi}{ds} < 0$ und also $\frac{dr}{ds} < 0$. Da $\frac{dr}{ds}$ in T_λ sein Vorzeichen

nicht ändert, nimmt für jede Integralkurve, die nach T_λ eintritt, dort $r(s)$ dauernd ab. Nach Hilfssatz V ist also

$$\lim r(s) = 0; \quad \lim \varphi(s) = \varphi_\lambda.$$

Zusammen mit Hilfssatz I, Ergänzung und Hilfssatz IV erhalten wir für die x-y-Ebene:

Wenn $\varphi = \varphi_\lambda$ ein Knotenstrahl der Differentialgleichung (a) *ist, mündet jede Integralkurve der Differentialgleichung* (b), *die im Winkelraum $\varphi_{\lambda-1} + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_{\lambda+1} - \gamma$ so nahe an den Ursprung herankommt, daß für einen ihrer Punkte $(r_0; \varphi_0)$ $r_0 < R^{e^{M\pi}}$ ist, mit dem Richtungskoeffizienten* tg φ_λ *in den Nullpunkt.*

Damit ist die Behauptung 4 *des* § 10 *bewiesen.*

§ 21.

$\varphi = \psi_\lambda$ sei ein isolierter Integralstrahl der Differentialgleichung (a).

Die Gebietsdefinitionen des § 14 sollen auch hier gelten.

I. *Wenn eine Integralkurve $r = r(s)$, $\varphi = \varphi(s)$ von* (e) *durch eine der Strecken $\varphi = \psi_\nu + \gamma$, $0 < r < R$ oder $\varphi = \psi_\nu - \gamma$, $0 < r < R$ in das Gebiet T_ν eintritt — beispielsweise für wachsendes s —, so ist vom Eintrittspunkt an $r(s)$ eine wachsende Funktion von s und die Integralkurve endigt auf $r = R$ ohne T_λ vorher zu verlassen.*

Beweis: Nach § 7, 1, S. 279 ist

$$-r \cdot \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} > 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \psi_\nu - \gamma,$$

$$-r \cdot \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} < 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \psi_\nu + \gamma.$$

Nach (57) ist auch für eine Integralkurve von (e), die für wachsendes s durch die Grenze $\varphi = \psi_\nu - \gamma$ (bzw. $\varphi = \psi_\nu + \gamma$) nach T_ν eintritt, am Eintrittspunkt $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ $\left(\text{bzw. } \frac{dr}{d\varphi} < 0\right)$. Da dort $\frac{d\varphi}{ds} > 0$ $\left(\text{bzw. } \frac{d\varphi}{ds} < 0\right)$, so ist für beide Fälle $\frac{dr}{ds} > 0$. Aus Satz V, § 19 folgt dann die Behauptung.

II. *Es gibt mindestens eine Integralkurve in der x-y-Ebene, die mit der Tangentenrichtung ψ_ν in den Nullpunkt einmündet.*

Beweis: Wir bezeichnen die in der r-φ-Ebene durch den Punkt $(r_0; \psi_\nu - \gamma)$ gehende Integralkurve von (e) mit $\varphi = \chi_1(r; r_0)$ und die durch $(r_0; \psi_\nu + \gamma)$ gehende mit $\varphi = \chi_2(r; r_0)$.

Es ist dann

$$\chi_2(r; r_0) > \chi_1(r; r_1) \quad \text{für} \quad 0 < \frac{r_0}{r_1} \leqq r \leqq R. \tag{58}$$

Wir beweisen (58) zunächst für den Fall $r_0 \leqq r_1$. Es existiert dann nach Abschnitt I dieses Paragraphen der Funktionswert $\chi_2(r_1; r_0)$ und es ist

$$\chi_2(r_1; r_0) > \psi_1 - \gamma = \chi_1(r_1; r_1).$$

$\chi_2(r; r_0) - \chi_1(r_1; r_0)$ ist für $r_1 \leqq r \leqq R$ eine eindeutige stetige Funktion von r. Wenn sie an einer Stelle $\leqq 0$ werden soll, so müßte sie, da sie an r_1 positiv ist, auch irgendwo verschwinden. Dies widerspricht der Eindeutigkeit der Integralkurven bzw. dem Hilfssatz V, der besagt, daß keine Integralkurve sich von $\psi_\nu - \gamma$ bis $\psi_\nu + \gamma$ erstrecken kann, und somit die Möglichkeit ausschließt, daß $\chi_2(r; r_0)$ und $\chi_1(r; r_1)$ dieselbe Integralkurve darstellen.

Entsprechend läßt sich der Beweis für $r_0 > r_1$ führen.

In ähnlicher Weise zeigt man, daß für $r_0 < r_1$ und $r_1 \leqq r \leqq R$

(59)
$$\begin{aligned} &1.\ \chi_1(r; r_0) > \chi_1(r; r_1), \\ &2.\ \chi_2(r; r_0) < \chi_2(r; r_1) \end{aligned}$$

ist.

Nach bekannten Sätzen sind $\chi_1(R; r_0)$ und $\chi_2(R; r_0)$ stetige Funktionen von r_0, und zwar sind sie nach (59) monoton; für $r_0 \to 0$ nimmt $\chi_1(R; r_0)$ zu und $\chi_2(R; r_0)$ ab. Da beide nach (58) beschränkt sind, existiert

$$\lim_{r_0 \to 0} \chi_1(R; r_0) = \Psi_1; \quad \lim_{r_0 \to 0} \chi_2(R; r_0) = \Psi_2$$

und es ist

(60)
$$\Psi_1 \leqq \Psi_2.$$

Die durch den Punkt $(R; \Psi_1)$ gehende Integralkurve bezeichnen wir mit $\varphi = \Phi(r)$. Für sie gilt:

a) Sie tritt nach T_ν ein; denn im Punkt $(R; \Psi_1)$ ist

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{N(\varphi) + E(r; \varphi)}{Z(\varphi) + \Delta(r; \varphi)}$$

endlich.

b) Sie kann $\varphi = \psi_\nu - \gamma$ nicht treffen.

Zum Beweis nehmen wir an, sie gehe durch den Punkt $(\varrho_0; \psi_\nu - \gamma)$. Dann ist $\varrho_0 > 0$; denn durch $(0; \psi_1 - \gamma)$ geht nach Hilfssatz III nur die Integralkurve $r \equiv 0$. Da dann

$$\chi_1(R; r_0) \geqq \chi_1\left(R; \tfrac{\varrho_0}{2}\right) > \chi_1(R; \varrho_0) = \Psi_1 \text{ für } r_0 \leqq \tfrac{\varrho_0}{2}$$

wäre, müßte $\lim_{r_0 \to 0} \chi_1(R; r_0) > \Psi_1$ sein im Widerspruch zur Festsetzung von Ψ_1.

c) $\varphi = \Phi(r)$ kann die Strecke $\varphi = \psi_\nu + \gamma$ nicht treffen.

Zum Beweis nehmen wir an, sie gehe durch den Punkt $(\varrho_0; \psi_\nu + \gamma)$. Dann ist $\varrho_0 > 0$. Da für $r_0 \leqq \frac{\varrho_0}{2}$

$$\chi_2(R; r_0) \leqq \chi_2\left(R; \tfrac{\varrho_0}{2}\right) < \chi_2(R; \varrho_0) = \Psi_1$$

wäre, müßte im Widerspruch zu (60)

$$\Psi_2 = \lim_{r_0 \to 0} \chi_2 (R; r_0) \leqq \chi_2 \left(R; \frac{\varrho_0}{2}\right) < \Psi_1$$

sein.

Es läßt sich somit auf die Integralkurve $\varphi = \Phi (r)$ der Hilfssatz IV anwenden. D. h. die Integralkurve mündet in den Punkt $r = 0$; $\varphi = \psi_\nu$.

III. *Es gibt nur eine Integralkurve in der x-y-Ebene, die mit der Tangentenrichtung $y' = \operatorname{tg} \psi_\nu$ in den Ursprung mündet.*

Beweis: Wir nehmen an, es gebe zwei Integralkurven $\varphi = \Phi_1 (r)$ und $\varphi = \Phi_2 (r)$, für die

$$\lim_{r \to 0} \Phi_1 (r) = \lim_{r \to 0} \Phi_2 (r) = \psi_\nu. \tag{61}$$

Nach I dieses Paragraphen können diese die Strecken $\varphi = \psi_\nu \pm \gamma$ nicht treffen. Sie verlaufen ganz in T_ν (bis $r = R$) und sind, da in T_ν $\frac{dr}{ds} \neq 0$ ist, eindeutige Funktionen von r. Also ist auch

$$\Psi (r) = \Phi_1 (r) - \Phi_2 (r)$$

eine eindeutige Funktion von r. Nach (61) ist

$$\Psi (0) = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven (§ 12) verschwindet $\Psi (r)$ nur für $r = 0$. Wir können beispielsweise annehmen, daß

$$\Psi (r) > 0 \quad \text{für} \quad r > 0. \tag{62}$$

Wegen (61) gibt es ein $\mathfrak{r} \leqq \varrho_2$, so daß

$$\psi_\nu - \omega < \Phi_2 (r) < \Phi_1 (r) < \psi_\nu + \omega \quad \text{für } 0 < r \leqq \mathfrak{r}.$$

ω und ϱ_2 sind in § 10, Voraussetzung V definiert. Wir können dann für $0 < r \leqq \mathfrak{r}$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d\,\Phi_1 (r)}{dr} - \frac{d\,\Phi_2 (r)}{dr} &= -\frac{1}{r} \cdot \left[\left(\frac{N+E}{Z+\Delta}\right)_{\varphi = \Phi_1 (r)} - \left(\frac{N+E}{Z+\Delta}\right)_{\varphi = \Phi_2 (r)} \right] \\ &= -\frac{1}{r} (\Phi_1 (r) - \Phi_2 (r)) \\ &\cdot \left[\frac{1}{(Z+\Delta)^2} \cdot \left\{ \left(\frac{d\,N}{d\,\varphi} + \frac{\partial\,E}{\partial\,\varphi}\right) \cdot (Z+\Delta) - \left(\frac{d\,Z}{d\,\varphi} + \frac{\partial\,\Delta}{\partial\,\varphi}\right) \cdot (N+E) \right\} \right]_{\varphi = \overline{\varphi}\,(r)}. \end{aligned} \tag{63}$$

Für die an Stelle von φ einzusetzende Funktion $\overline{\varphi}\,(r)$ gilt:

$$\psi_\nu - \omega < \Phi_2 (r) < \overline{\varphi}\,(r) < \Phi_1 (r) < \psi_\nu + \omega \quad \text{für } 0 < r \leqq \mathfrak{r}.$$

Nach (61) ist

$$\lim_{r \to 0} \overline{\varphi}\,(r) = \psi_\nu. \tag{64}$$

Nach (63) genügt die Funktion $\Psi (r)$ für $0 < r \leqq \mathfrak{r}$ einer Differentialgleichung

$$\frac{d\,\Psi (r)}{dr} = -\Psi \cdot \frac{F (r)}{r}.$$

Dabei kann zwar die in $F(r)$ enthaltene Funktion $\bar{\varphi}(r)$ unstetig oder mehrdeutig sein. $F(r)$ selbst ist aber stetig und eindeutig, wie man aus folgender Darstellung von $F(r)$ bei Beachtung von (62) erkennt:

$$F(r) = \frac{1}{\Psi(r)} \cdot \left[\left(\frac{N+E}{Z+\Delta}\right)_{\varphi=\Phi_1(r)} - \left(\frac{N+E}{Z+\Delta}\right)_{\varphi=\Phi_2(r)}\right].$$

Wir stellen die Eigenschaften der in (63) vorkommenden Funktionen zusammen:

$$N(\varphi) = \sin^{\lambda_\nu}(\varphi - \psi_\nu) \cdot Q_\nu(\varphi)$$

$$\frac{dN(\varphi)}{d\varphi} = \lambda_\nu \sin^{\lambda_\nu - 1}(\varphi - \psi_\nu) \cdot Q_\nu(\varphi) \cdot \cos(\varphi - \psi_\nu) + \frac{dQ_\nu(\varphi)}{d\varphi} \cdot \sin^{\lambda_\nu}(\varphi - \psi_\nu),$$

$$Q_\nu(\psi_\nu) \cdot Z(\psi_\nu) > 0; \quad \lambda_\nu - 1 \text{ ist gerade } (\S\,7,\,1).$$

In $|\varphi - \psi_\nu| < \begin{cases} \omega \\ \gamma \end{cases}$ sind

$$1.\quad \frac{dQ_\nu(\varphi)}{d\varphi};\ \frac{\partial \Delta(r;\varphi)}{\partial \varphi};\ \frac{dZ(\varphi)}{d\varphi}$$

beschränkt,

$$2.\quad |\Delta(r;\varphi)| < |Z(\varphi)|$$

und somit

$$3.\quad \text{sign}\,(Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)) = \text{sign}\,Z(\varphi)$$

und

$$\frac{Z(\varphi) + \Delta(r;\varphi)}{Z(\psi_\nu)} > 0.$$

Wählt man δ klein genug, so wird für $r \leqq \delta$ wegen (64) $|\bar{\varphi}(r) - \psi_\nu|$ so klein, daß

$$N(\bar{\varphi}(r)) \text{ gegenüber } \left(\frac{dN(\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=\bar{\varphi}(r)},$$

$$\frac{dQ_\nu(\varphi)}{d\varphi} \cdot \sin^{\lambda_\nu}(\bar{\varphi} - \psi_\nu) \text{ gegenüber } Q_\nu(\bar{\varphi}) \cdot \sin^{\lambda_\nu - 1}(\bar{\varphi} - \psi_\nu)$$

sehr klein wird und man setzen kann (wegen der Bezeichnungen vgl. § 10, Vorauss. V):

$$\left[\frac{dN(\varphi)}{d\varphi}(Z+\Delta) - N\left(\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)\right]_{\varphi=\bar{\varphi}(r)}$$

$$\geqq \mu\,\lambda_\nu (\bar{\varphi}(r) - \psi_\nu)^{\lambda_\nu - 1} \cdot Q_\nu(\psi_\nu) \cdot (Z(\bar{\varphi}) + \Delta(r;\bar{\varphi})).$$

Für $r \leqq \delta$ ist dann

$$F(r) \geqq \left\{\frac{1}{(Z+\Delta)^2}\left[\mu\,\lambda_\nu(\varphi - \psi_\nu)^{\lambda_\nu - 1} Q_\nu(\varphi_\nu)(Z+\Delta) + \frac{\partial E}{\partial \varphi} \cdot (Z+\Delta) - E\left(\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)\right]\right\}_{\varphi=\bar{\varphi}(r)}$$

$$\geqq \left\{\frac{1}{(Z+\Delta)^2} \cdot \left[\frac{Z+\Delta}{Z(\psi_\nu)} \cdot h_\nu(r) - g_\nu(r) \cdot \left|\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right|\right]\right\}_{\varphi=\bar{\varphi}(r)}$$

$$= \left(\frac{h_\nu(r)}{|Z+\Delta| \cdot |Z(\psi_\nu)|} - \frac{\left| \frac{dZ}{d\varphi} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \right|}{|Z+\Delta|^2} \cdot g_\nu(r) \right)_{\varphi = \bar{\varphi}(r)}$$

$$\geqq \frac{h_\nu(r)}{\varkappa \cdot |Z(\psi_\nu)|} - \frac{K}{\varkappa^2} \cdot g_\nu(r)$$

$$= c_1^2 \cdot h_\nu(r) - c_2^2 \cdot g_\nu(r).$$

Dabei wurde

$$K = \max_{\substack{|\varphi - \psi_\nu| < \omega \\ r \leqq \varrho_2}} \left| \frac{dZ(\varphi)}{d\varphi} + \frac{\partial \Delta(r;\varphi)}{\partial \varphi} \right|;$$

$$\frac{1}{\varkappa \cdot |Z(\psi_\nu)|} = c_1^2; \quad \frac{K}{\varkappa^2} = c_2^2$$

gesetzt und es ist zu beachten, daß $h_\nu(r) \leqq 0$ ist.

Wählt man r_1 und r_2 so, daß $0 < r_1 < r_2 < \delta$ ist, so kann man nach (62) für $r_1 \leqq r \leqq r_2$ setzen

$$\frac{1}{\Psi(r)} \cdot \frac{d\Psi(r)}{dr} \leqq -c_1^2 \frac{h_\nu(r)}{r} + c_2^2 \frac{g_\nu(r)}{r};$$

$$\frac{\Psi(r_2)}{\Psi(r_1)} \leqq e^{-c_1^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{h_\nu(r)}{r} dr + c_2^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{g_\nu(r)}{r} dr}.$$

Also

$$\Psi(r_1) \geqq \Psi(r_2) \cdot e^{c_1^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{h_\nu(r)}{r} dr - c_2^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{g_\nu(r)}{r} dr}$$

$$> \Psi(r_2)\, e^{-c_1^2 G - c_2^2 E_\nu}.$$

Demnach müßte $\lim_{r_1 \to 0} \Psi(r_1) > 0$ sein im Widerspruch zu (61).

Damit ist Behauptung 5 *des* § 10 *bewiesen.*

§ 22.

$\varphi = \chi_\nu$ sei ein Integralstrahl wechselnden Verhaltens der Differentialgleichung (a).

I. Ergänzung zu den Gebietsdefinitionen des § 14:

Nach § 7, 3 kann man

$$N(\varphi) = \sin^{2n}(\varphi - \chi_\nu) \cdot Q_\nu(\varphi) \tag{66}$$

setzen und annehmen, daß für $|\chi_\nu - \varphi| \leqq \gamma$

$$Q_\nu(\varphi) > l > 0.$$

Man kann daher ein c so wählen, daß

$$c \cdot (\varphi - \chi_\nu)^2 \geqq \sin^{2n}(\varphi - \chi_\nu) \cdot Q_\nu(\varphi) \quad \text{für} \quad |\varphi - \chi_\nu| \leqq \gamma. \tag{67}$$

Da die in Voraussetzung VI des § 10 definierte Funktion $G_\nu(r)$ nirgends negativ ist, ist

$$F_\nu(r) = \chi_\nu + \frac{1}{\varkappa \cdot |lg\, r|} \cdot \int_0^r \frac{G_\nu(\varrho)\,|lg\,\varrho|}{\varrho}\, d\varrho$$

eine monotone Funktion von r ($\varkappa$ ist in § 14 unter (39) definiert) und es ist:

$$\lim_{r \to 0} F_\nu(r) = \chi_\nu. \tag{68}$$

Für R sollen nun neben den in § 14 unter (41) festgesetzten Bedingungen noch folgende gelten:

1. für $0 \leqq r \leqq R$ soll $|F_\nu(r) - \chi_\nu| < \gamma$ sein,
2. es soll

$$\frac{c}{\varkappa^2} \cdot \int_0^R \frac{G_\nu(\varrho)\,|lg\,\varrho|}{\varrho}\, d\varrho < 1 \tag{69}$$

sein.

Im übrigen bleiben die Bestimmungen und Bezeichnungen des § 14 bestehen.

II. Das Verhalten der Integralkurven der Differentialgleichung (b).

Nach § 7, 3 kann man immer auf den Fall § 7, 3a zurückführen. Dann wird

$$-r \cdot \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} > 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \chi_\nu \pm \gamma;\ r > 0.$$

Wegen (67) ist in T_ν

$$\frac{c \cdot (\varphi - \chi_\nu)^2 + G_\nu(r)}{r \cdot \varkappa} \geqq \frac{N(\varphi) + E(r;\ \varphi)}{-r \cdot (Z(\varphi) + \Delta(r;\ \varphi))}.$$

Deshalb und wegen (69) ist für $0 < r \leqq R$

$$\frac{dF_\nu(r)}{dr} = \frac{1}{\varkappa\,|lg\,r|^2\, r} \cdot \int_0^r \frac{G_\nu(\varrho) \cdot |lg\,\varrho|}{\varrho}\, d\varrho + \frac{G_\nu(r)}{\varkappa \cdot r} \tag{70}$$

$$> \frac{1}{\varkappa \cdot r} \cdot \frac{1}{|lg\,r|^2} \cdot \int_0^r \frac{G_\nu(\varrho) \cdot |lg\,\varrho|}{\varrho}\, d\varrho \cdot \frac{c}{\varkappa^2} \cdot \int_0^r \frac{G_\nu(\varrho)\,|lg\,\varrho|}{\varrho}\, d\varrho + \frac{G_\nu(r)}{\varkappa \cdot r}$$

$$= \frac{c \cdot (F_\nu(r) - \chi_\nu)^2}{\varkappa \cdot r} + \frac{G_\nu(r)}{\varkappa \cdot r} > \left\{ \frac{N(\varphi) + E(r;\varphi)}{-r\,(Z(\varphi) + \Delta(r;\ \varphi))} \right\}_{\varphi = F_\nu(r)}.$$

Daraus folgt: Eine Integralkurve $\varphi = \varphi(r)$ von (e) kann die Kurve $\varphi = F_\nu(r)$ für wachsendes r nicht von unten her und für abnehmendes r nicht von oben her treffen. Man vergleiche für das Folgende Fig. 5.

1. Wenn eine Integralkurve $\varphi = \varphi(s)$; $r = r(s)$ durch die Grenze $\varphi = \chi_\nu - \gamma$ nach T_ν eintritt, und zwar für wachsendes s, so ist am Eintrittspunkt $\frac{d\varphi}{ds} > 0$ und nach (57) § 19 $\frac{d\varphi}{ds} > 0$, also $\frac{dr}{ds} > 0$. Die Integralkurve kann T_ν wegen Satz II nicht wieder durch $\varphi = \chi_\nu - \gamma$ verlassen. Da r immer wächst, kann sie nach (70) die Kurve $\varphi = F_\nu(r)$ nicht von unten her überschreiten. Es ist daher immer:

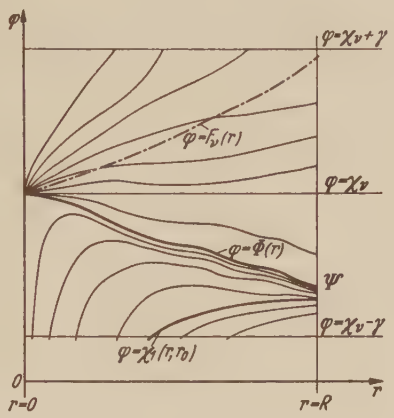


Fig. 5.

$$\varphi(s) < F_\nu(r(s)) < \chi_\nu + \gamma.$$

Wie in § 18, 2 kann man nun schließen, daß die Integralkurve T_ν nicht mehr verläßt und auf $r = R$ endigt.

2. Wenn eine Integralkurve für wachsendes s durch die Grenze $\varphi = \chi_\nu + \gamma$ nach T_ν eintritt, so ist am Eintrittspunkt $\frac{d\varphi}{ds} < 0$, $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ und also $\frac{dr}{ds} < 0$. Da r abnimmt, kann diese Integralkurve nach (70) die Kurve $\varphi = F_\nu(r)$ nicht von oben her treffen und erst recht $\varphi = \chi_\nu - \gamma$ nicht. $\varphi = \chi_\nu + \gamma$ kann sie wegen Hilfssatz II (§ 16) nicht mehr treffen. Wir schließen also wie in § 18, 3, daß

$$\lim \varphi(s) = \chi_\nu; \quad \lim r(s) = 0.$$

3. Wenn eine Integralkurve weder $\varphi = \chi_\nu + \gamma$ noch $\varphi = \chi_\nu - \gamma$ trifft, aber Punkte in T_ν hat, so gilt für sie Hilfssatz IV, § 18.

4. Bezeichnen wir wie in § 21, II. (S. 313) die durch den Punkt $(r_0; \chi_\nu - \gamma)$ gehende Integralkurve mit $\varphi = \chi_1(r; r_0)$, so ist wieder $\chi_1(R; r_0)$ eine stetige Funktion von r_0, die für abnehmendes r_0 monoton wächst, aber beschränkt ist; es ist nämlich

$$\chi_1(R; r_0) \leqq F_\nu(R).$$

Somit existiert

$$\lim_{r_0 \to 0} \chi_1(R; r_0) = \Psi.$$

Daß die durch $(R; \Psi)$ gehende Integralkurve $\varphi = \Phi(r)$ die Strecke $\varphi = \chi_\nu - \gamma$ nicht treffen kann, zeigt man genau wie in § 21, IIb. Sie kann auch $\varphi = \chi_\nu + \gamma$ nicht treffen; denn die durch $\varphi = \chi_\nu + \gamma$ gehenden Integral-

kurven erreichen nach Abschnitt II, 2 dieses Paragraphen die Strecke $r = R$, $\chi_\nu - \gamma \leqq \varphi \leqq \chi_\nu + \gamma$ nicht. Also mündet $\varphi = \Phi(r)$ nach Hilfssatz IV in den Punkt $(0; \chi_\nu)$.

Die Integralkurve $\varphi = \Phi(r)$ spielt hier die gleiche Rolle wie der Integralstrahl $\varphi = \chi_\nu$ bei der Differentialgleichung (a). Benützen wir für χ_ν die allgemeine Bezeichnung für Integralstrahlen von Gleichung (a)

$$\chi_\nu = \varphi_\mu,$$

so können wir diese Eigenschaft so beschreiben:

Jede Integralkurve von (b), die durch einen Punkt $(r_0; \varphi_0)$ des Bereiches

$$0 < r_0 < R^{e^{M\pi}}$$

$$\Phi(r_0) \leqq \varphi_0 \leqq \varphi_{\mu+1} - \gamma$$

geht, mündet in den Punkt $(0; \varphi_\mu) = (0; \chi_\nu)$.

Jede Integralkurve von (b), die durch einen Punkt $(r_0; \varphi_0)$ des Bereiches

$$0 < r_0 < R^{e^{M\pi}}$$

$$\varphi_{\mu-1} + \gamma \leqq \varphi_0 < \Phi(r_0)$$

geht, entfernt sich bei Annäherung an $\varphi = \Phi(r)$ von $r = 0$ und endigt auf $r = R$. Sie mündet nicht in den Punkt $(0; \varphi_\mu)$.

Damit ist Behauptung 6 des § 10 bewiesen.

(Eingegangen am 21. Juni 1937.)

Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen. II.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Zweiter Teil:

Die ternären quadratischen Formen.

Der zweite Teil der Untersuchung behandelt die Folgerungen, die sich aus den Resultaten über konjugiert-quadratische Bilinearformen für die ternären quadratischen Formen ergeben. Die Untersuchung beschränkt sich auf indefinite ternäre Formen, deren reproduzierende Gruppe in der Ebene diskontinuierlich ist. Folgende Aufgaben werden behandelt: Die Bestimmung der Klassenzahl ternärer Formen, die Auflösung des Grundproblems der Kongruenzgruppen, die Beziehung ternärer Formen zu den transformierbaren automorphen Funktionen einer Veränderlichen, die Bestimmung des Geschlechtes und der Verzweigung dieser Funktionen.

1. Reduktion ternärer Formen auf Grundformen.

Sei K_λ ein Zahlkörper, der nur Hauptideale besitzt, und

$$f = n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + b_1 x_1 x_3 + b_2 x_2 x_3 + a x_3^2 \tag{1}$$

eine ternäre quadratische Form, deren Koeffizienten ganze Zahlen aus K_λ ohne gemeinsamen Teiler sind. Wie in I, (2) wird

$$D = aA + n_0 b_2^2 - n_1 b_1 b_2 + n_2 b_1^2 \tag{2}$$

als Diskriminante von f bezeichnet, wobei $A = n_1^2 - 4 n_0 n_2$ gesetzt ist. Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz: Zu jeder Form f gibt es eine äquivalente Form, bei der b_1 und b_2 durch 2 teilbar sind.

Vermittels einer Substitution

$$x_3 = x_3' + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1, \tag{3}$$

in der β_1, β_2 ganze Zahlen aus K_λ sind, werde f in f' transformiert. Alsdann ist

$$n_1' \equiv n_1 + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \pmod 2, \tag{4}$$

und es lassen sich β_1 und β_2 immer so auswählen, daß n_1' nur denjenigen Teiler von 2 enthält, der in n_1, b_1, b_2 zugleich aufgeht. Nunmehr werde die Substitution

$$x_1 = x_1' + \alpha_2 x_3, \qquad x_2 = x_2' + \alpha_1 x_3 \tag{5}$$

ausgeführt, in der α_1 und α_2 als ganze Zahlen aus K_λ so gewählt werden, daß

$$b_1' \equiv b_1 + \alpha_1 n_1, \qquad b_2' \equiv b_2 + \alpha_2 n_1 \pmod 2 \tag{6}$$

durch 2 teilbar werden. Sodann beweisen wir folgenden

Satz 13. *Aus jeder Form f von der Diskriminante D läßt sich durch rationale Transformation in K_λ und Absonderung eines Zahlenfaktors aus K_λ eine Form f' ableiten, deren Diskriminante jeden Primfaktor nur einfach besitzt und ein Teiler von D ist.*

Zunächst beschäftigen wir uns mit den Primfaktoren von 2. Sei q ein solcher, der in D mehrfach aufgeht.

Fall I. q ist nicht gemeinsamer Teiler von n_1, b_1, b_2.

Nach dem Hilfssatz darf angenommen werden, daß b_1 und b_2 in f durch 2 teilbar sind und n_1 nicht durch q teilbar ist. In D kann q nur dann mehrfach aufgehen, wenn q in a mehrfach aufgeht, und es läßt sich durch Ausübung der Substitution $x_3 = x_3' : q$ aus D der Faktor q^2 entfernen. Die einmalige oder mehrfache Anwendung dieser Substitution führt notwendig dazu, daß entweder eine der Größen b_1 und b_2 durch q nicht teilbar wird, oder a nur einmal oder nicht durch q teilbar wird. Im letzteren Falle gilt dies auch für D. Verliert b_1 oder b_2 die Eigenschaft, durch q teilbar zu sein, so gibt es nach dem Hilfssatz eine äquivalente Form, bei der b_1 und b_2 durch 2 teilbar sind und n_1 nicht durch q teilbar ist. Ist a mehrfach durch q teilbar, so kann abermals reduziert werden. Die wiederholte Anwendung des Verfahrens führt notwendig zu einem D, das nur einmal oder nicht durch q teilbar ist.

Fall II. q ist gemeinsamer Teiler von n_1, b_1, b_2.

Sodann ist D mehrfach durch q teilbar, aber es läßt sich stets eine Reduktion ausfindig machen. Seien n_0 und n_2 nicht durch q teilbar, so substituieren wir $x_1 = x_1' + \alpha x_2$ und finden

$$n_2' \equiv n_2 + \alpha^2 n_0 \pmod q. \tag{7}$$

Durchläuft α ein vollständiges Wertesystem modulo q, so gilt dies auch für α^2, und es gibt ein α, für das n_2' durch q teilbar wird. Durch dieses Verfahren läßt sich erreichen, daß zwei der Koeffizienten n_0, n_2, a durch q teilbar werden. Geht q in einem oder beiden Koeffizienten mehrfach auf, so kann wie zuvor reduziert werden. Geht aber q in beiden, etwa n_0 und n_2, nur einmal auf, so verwendet man die Transformation $x_3 = q x_3'$ und gelangt nach Absonderung von q zu der Form

$$\frac{1}{q} f(x_1, x_2, q x_3) \tag{8}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und der Diskriminante $D : q$. Es ist also stets eine Reduktion möglich. Bleibt nach Ausführung derselben q gemeinsamer Teiler von n_1, b_1, b_2, so ist das Verfahren zu wiederholen, andernfalls kommt man auf den ersten Fall zurück.

Im folgenden darf daher angenommen werden, daß die Primfaktoren von 2, die in D enthalten sind, nur einmal in D aufgehen. Sei

$$F = N_0 z_1^2 + N_1 z_1 z_2 + N_2 z_2^2 + B_1 z_1 z_3 + B_2 z_2 z_3 + A z_3^2 \tag{9}$$

die Adjungierte von f und Ω der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von F. Zufolge der gemachten Annahme ist Ω prim zu 2. Enthält E alle Teiler von 2, die in D aufgehen, und setzt man

$$D = E \Delta \Omega^2, \tag{10}$$

so ist auch Δ eine zu 2 prime ganze Zahl. Die Zahl A hat als Koeffizient von F den Teiler Ω. Unter äquivalenten Formen läßt sich f so auswählen, daß $A : \Omega$ prim zu D ist. Die Substitution

$$x_1 = x_1' + \gamma_1 x_3, \qquad x_2 = x_2' + \gamma_2 x_3 \tag{11}$$

transformiere f in f' und es ist

$$\begin{aligned} b_1' &= 2\gamma_1 n_0 + \gamma_2 n_1 + b_1, \\ b_2' &= \gamma_1 n_1 + 2\gamma_2 n_2 + b_2, \\ 2a' &= \gamma_1 b_1' + \gamma_2 b_2' + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + 2a. \end{aligned} \tag{12}$$

Die ganzen Zahlen γ_1 und γ_2 sind so zu bestimmen, daß sie den Kongruenzen

$$2\gamma_1 (A : \Omega) \equiv (B_1 : \Omega), \qquad 2\gamma_2 (A : \Omega) \equiv (B_2 : \Omega) \pmod{\Omega \Delta} \tag{13}$$

genügen, was immer möglich ist, da $2A : \Omega$ prim zu $\Omega \Delta$ ist. Alsdann werden b_1', b_2' und a' durch $\Omega \Delta$ teilbar [1]), und da f primitiv ist, erweist sich auch $f(x_1, x_2, 0)$ als primitiv. Daraus ergeben sich die erforderlichen Reduktionen unmittelbar. Der größte quadratische Teiler von Δ sei r^2. Dieser läßt sich vermöge $x_3 = x_3' : r$ aus D entfernen. Der größte quadratische Faktor von Ω sei s^2. Dieser geht auch in A auf, und es läßt sich n_1 durch s und n_2 durch s^2 teilbar machen. Vermöge $x_2 = x_2' : s$ und $x_3 = x_3' : s$ wird s^4 aus D entfernt. Sei q eine Primzahl, die sowohl in Δ als auch in Ω einmal, also in D dreifach aufgeht. Vermöge $x_3 = x_3' : q$ wird q^2 aus D entfernt. Sodann sind noch die Primfaktoren q zu behandeln, die in Ω einfach, aber nicht in Δ aufgehen. Diese gehen auch in A einfach auf, und es lassen sich n_1 und n_2 durch q teilbar machen. Durch $x_1 = x_1' q$ und Absonderung des Faktors q aus den Koeffizienten der Form wird aus D der Faktor q einmal entfernt. Hiermit ist der Satz 13 bewiesen.

Sei nunmehr eine ternäre Form f gegeben, deren Diskriminante D jeden Primfaktor nur einmal enthält. Die Adjungierte F ist primitiv, und man kann stets zu einer äquivalenten Form F' übergehen, bei der A' prim zu $2D$ ist und keinen quadratischen Faktor enthält. Die zugehörige Form f' ist alsdann nach I, (2) eine Grundform. Die Stellung der Grundformen innerhalb

[1]) L. E. Dickson, Studies in the Theorie of numbers, Univ. of Chicago (1930), S. 15.

der Theorie der transformierbaren automorphen Funktionen ist hiernach klar. Zu den reproduzierenden Gruppen dieser Formen gehören die einfachsten Funktionen, aus denen sich alle anderen vermittels der Theorie der Kongruenzuntergruppen ableiten lassen. Daher wird im folgenden die Untersuchung auf diese Formen eingeschränkt. Auch werden nur Formen betrachtet, deren reproduzierende Gruppe in der Ebene diskontinuierlich ist. Die Bedingung ist die, daß K_λ ein total reeller Zahlkörper ist, die Form f indefinit und sämtliche zu f konjugierte Formen definit sind (I, 6). Die Vorzeichen der $\lambda - 1$ definiten Formen sind durch die Vorzeichen der zu $-D$ konjugierten Zahlen gegeben, da sämtliche zu $-n_0 D$ konjugierten Zahlen positiv sind. Die Charaktere der ternären Grundform f erfüllen nach I, 2, Satz 1 die Gleichung

$$\prod_{i=1}^{\mu}\left(\frac{A}{q_i}\right) = (-1)^{\lambda-1} \qquad \left(D = \prod_{i=1}^{\mu} q_i\right), \tag{14}$$

und zu jedem System von Charakteren, das (14) erfüllt, existiert auch ein Geschlecht ternärer Formen. Daß auch die Primteiler von 2 einen Charakter der ternären Form liefern, ist aus Gleichung (24) im nächsten Abschnitt unmittelbar einzusehen. Zufolge (14) gibt es Grundformen von der Determinante $D = 1$ nur bei ungeradem λ. Bei geradem λ ist im einfachsten Falle D eine einzelne Primzahl aus K_λ.

2. Die Transformationen von F in sich in reduzierter Gestalt.

Die Aufgabe, alle Transformationen zu finden, die eine ternäre Form in sich überführen, wurde in I, 5 implizite gelöst. In einer reduzierten Gestalt lassen sich diese ternären Substitutionen auch explizit aufstellen. Es ist

$$A\Phi_1 = (\sqrt{A}\,t - \bar{b}\,u)(\sqrt{A}\,\bar{t} + b\,\bar{u}) + D n_0 u\bar{u}. \tag{15}$$

Setzt man

$$\sqrt{A}\,t - \bar{b}\,u = t_* \tag{16}$$

und transformiert die ζ-Substitutionen von I, (105) auf

$$\zeta' = a\sqrt{A}\,\zeta - \bar{b}, \tag{17}$$

so erhält man die reduzierten Transformationen

$$T = \begin{pmatrix} t_* & -D n_0 \bar{u} \\ u & -\bar{t}_* \end{pmatrix} \tag{18}$$

mit der Determinante $A\Phi_1$. Hierbei ist t_* eine ganze Zahl aus $K_\lambda(\sqrt{A})$, die zufolge (16) der Kongruenz

$$t_* \equiv -\bar{b}\,u \pmod{\sqrt{A}} \tag{19}$$

genügt, während $n_0 u$ unverändert eine Zahl aus j_0 bedeutet. Wird nunmehr die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} w_* - D n_0 \bar{z} \\ z \quad -\bar{w}_* \end{pmatrix} \tag{20}$$

durch T transformiert, so ergeben sich die Gleichungen

$$w'_* = -t_* \bar{t}_* w_* - D n_0 u \bar{u} \bar{w}_* + D n_0 (t_* \bar{u} z + \bar{t}_* u \bar{z}), \tag{21}$$

$$z' = -t_* u (w_* + \bar{w}_*) + t_*^2 z + D n_0 u^2 \bar{z}. \tag{22}$$

Zufolge (22) sind z' und $\bar{z}'$ linear in $w_* + \bar{w}_*$, z, $\bar{z}$, ebenso $w'_* + \bar{w}'_*$, denn es ist zufolge (21)

$$w'_* + \bar{w}'_* = -(w_* + \bar{w}_*)\ (t_* \bar{t}_* + D n_0 u \bar{u}) + 2 D n_0 (t_* \bar{u} z + \bar{t}_* u \bar{z}). \tag{23}$$

Die so erhaltene lineare ternäre Substitution führt die Form

$$(w_* + \bar{w}_*)^2 - 4 D n_0 z \bar{z} = A F \tag{24}$$

in sich über. Die Determinante der Substitution berechnet sich zu

$$(-t_* \bar{t}_* + D n_0 u \bar{u})^3 = A^3 \Phi_1^3. \tag{25}$$

Um zu den Variablen w_2, z_1, z_2 in I, 5 zurückzugelangen, setzt man entsprechend (16)

$$w_* = \sqrt{A}\, w - \bar{b} z \tag{26}$$

und erhält

$$w_* + \bar{w}_* = A w_2 - \bar{b} z - b \bar{z}. \tag{27}$$

In den Variablen $w_* + \bar{w}_*$, z_1, z_2 stellen (22), (23) zunächst eine Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten aus K_λ und der Determinante (25) dar. Bei Ausübung der Transformation (27) werden alle Koeffizienten durch A teilbar. Nach Entfernung des Teilers A ergibt sich die in I, 5 gefundene ternäre Substitution in w_2, z_1, z_2 mit ganzen Koeffizienten aus K_λ und der Determinante Φ_1^3.

Aus den Formeln (22) und (23) lassen sich leicht die Bedingungen ableiten, unter denen die Koeffizienten der ternären Substitution einen gemeinsamen Teiler haben. Eine notwendige Bedingung ist zufolge (22), daß t_*^2 und $D (n_0 u)^2 : j_0^2$ einen gemeinsamen Teiler aus K_λ haben. Die Fälle, in denen eine Zahl aus K_λ oder ein Idealteiler von $\sqrt{A}$ gemeinsamer Teiler von t_* und $(n_0 u) : j_0$ ist, bieten nichts Wesentliches. Daß die Idealteiler von $\sqrt{A}$ für die Substitutionen in w_2, z_1, z_2 keine bevorzugte Stellung besitzen, erkennt man, wenn F in ein äquivalentes F' mit einem zu A primem A' transformiert wird. Da D prim zu A ist, bleibt nur der Fall, daß t_* und D einen gemeinsamen Teiler aus K_λ haben. Sei d ein solcher Teiler. Da d prim zu A ist, sind auch die

Koeffizienten der Substitution in w_2, z_1, z_2 sämtlich durch d teilbar. Aus $t_* \equiv 0 \pmod{d}$ folgt nach (16)

$$\sqrt{A}\, t \equiv \bar{b}\, u \pmod{d}. \tag{28}$$

Da A prim zu d ist, läßt sich eine Zahl β aus $\bar{j}_0$ so bestimmen, daß $b + \bar{\beta}\sqrt{A} = b'$ durch dj_0 teilbar wird, und die Kongruenz (28) geht durch die Substitution $t = t' + \beta u$ in $t' \equiv 0 \pmod{d}$ über. Wird $t' = dt''$ gesetzt, so ist

$$\Phi_1(t', u) = d \cdot \Phi_d(t'', u), \tag{29}$$

wobei Φ_d eine bereits in I, 5 eingeführte Form von der Determinante D ist, deren erster Koeffizient d in $(b') : j_0$ aufgeht. Die Beseitigung des Teilers d aus den Koeffizienten der Substitution in w_2, z_1, z_2 ergibt eine solche mit der Determinante Φ_d^3.

3. Die Transformationen von F in sich mit vorgegebener Determinante m^3. — Erweiterung von Γ. — Die Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$.

Im folgenden werden nur Transformationen von F in sich, deren Koeffizienten keinen gemeinsamen Teiler haben, in Betracht gezogen. Sei m eine zu D prime ganze Zahl. Nach (29) im vorigen Abschnitt ergibt jede eigentliche Darstellung von m durch eine Form Φ_d eine Transformation von F in sich mit der Determinante m^3. Diese sei nunmehr mit T bezeichnet, und die Koeffizienten α, β, γ, δ der zugehörigen ζ-Substitution von der Determinante dm sind so beschaffen, daß α, $(\beta) : \bar{j}_0$, δ durch d teilbar sind und $(n_0 \gamma) : j_0$ prim zu d ist Die Eigenschaft hat auch die inverse ζ-Substitution. Daher ist auch T^{-1} eine Transformation von der Determinante m^3, und der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten in der Determinante von T beträgt m, eine Folgerung, die sich auch aus den Formeln (22) und (23) herleiten läßt. Weiter folgt daraus, daß die zu T kontragrediente Substitution und ihre inverse eine Transformation von f in sich mit der Determinante m^3 abgeben.

Die Auflösung der Gleichung

$$\Phi_d = m \tag{30}$$

ist nur möglich, wenn die $\lambda - 1$ zu dm konjugierten Zahlen positiv sind. Diese Bedingung ist aber nach Satz 10b auch hinreichend (I, 10). In der ζ-Ebene sind zweierlei Arten von Substitutionen zu unterscheiden, je nachdem dm positiv oder negativ ist. Ein total positives dm führt auf eine ζ-Substitution „erster Art", welche das Innere des Grenzkreises wiederum auf das Innere abbildet. Bei negativem dm wird eine ζ-Substitution erhalten, die das Innere mit dem Äußeren des Grenzkreises vertauscht. Durch Spiegelung

von ζ oder ζ' an dem Grenzkreise wird diese in eine Substitution „zweiter Art" verwandelt, welche das Innere unter Umlegung der Winkel wiederum auf das Innere abbildet.

Für d sind nur eine endliche Anzahl von Werten zuzulassen. Denn die Multiplikation der Koeffizienten der ζ-Substitution mit einer Einheit ε aus K_λ verändert diese nicht, führt aber die Determinante dm in $\varepsilon^2 dm$ über. In dieser Gestalt ist die ζ-Substitution einer Darstellung der Zahl m durch die Form $\Phi_{\varepsilon^2 d}$ zugeordnet. Unter den Werten $\varepsilon^2 d$ ist daher nur einer auszuwählen.

Der Fall $m = 1$ liefert die reproduzierende Gruppe der Form F bzw. f. Die in I, 6 eingeführte Gruppe Γ ist durch $m = 1$, $d = 1$ gegeben und daher erweiterungsfähig durch ζ-Substitutionen mit einer Determinante $d \neq 1$. Nach dem bereits in (30) genannten Satz 10b existieren auch diese Erweiterungen von Γ, wenn die zu d konjugierten Werte sämtlich positiv sind. Seien U und U' zwei unimodulare Transformationen von F in sich, denen ζ-Substitutionen von der Determinante d bzw. d' zugeordnet sind. Die reduzierte Gestalt der ζ-Substitutionen sei durch die Werte t_*, u bzw. t'_*, u' gegeben. Ferner sei τ der größte gemeinsame Teiler von d und d'. Alsdann ist $U'' = UU'$ eine ζ-Substitution von der Determinante $dd' : \tau^2$ zugeordnet, deren Werte t''_*, u'' durch

$$\begin{aligned} \tau\sqrt{A}\, t''_* &= t_* t'_* - D n_0 \bar{u} u', \\ \tau\sqrt{A}\, u'' &= u t'_* - \bar{t}_* u' \end{aligned} \tag{31}$$

bestimmt sind. Daraus ergibt sich, daß die Gruppe Γ in der vollständigen reproduzierenden Gruppe von F bzw. f ausgezeichnet enthalten ist und die Indexgruppe von Γ eine Abelsche Gruppe ist, die außer dem Einselement nur aus Elementen von der Periode 2 besteht.

Die Beschränkung der Teiler d auf total positive Zahlen ergibt eine Gruppe, die nur Substitutionen erster Art enthält. Diese sei mit Γ_0 bezeichnet. Die automorphe Funktion, welche durch die ζ-Substitutionen von Γ_0 unverändert bleibt, sei als die zur Grundform f gehörige Grundfunktion bezeichnet.

Die Gesamtheit aller Transformationen mit der Determinante m^3 läßt sich durch Zusammensetzung

$$T U = T' \tag{32}$$

auf $\psi(m)$ Klassen zurückführen entsprechend den $\psi(m)$ Darstellungsklassen der Zahl m (I, 3). Bei Aufstellung von Repräsentanten dieser $\psi(m)$ Klassen ist nur eine der Formen Φ_d, welche die Zahl m darstellen, heranzuziehen. Der Tatbestand, daß bei Zusammensetzung von

$$U' T U = T' \tag{33}$$

alle Transformationen aus einer hervorgehen, läßt sich indessen erst nach der vollständigen Lösung des Grundproblems der Kongruenzgruppen erschließen.

Jedoch läßt sich folgende Bemerkung über die Transformationsgruppe für die Zahl m anfügen. Die Gruppe Γ ist nach I, 6 vermittels F transformierbar. Nach I, 4, (92) werde F so transformiert, daß A prim zu m und quadratischer Rest von $4m$ ist. Alsdann läßt sich n_0 so wählen, daß es durch m teilbar ist, und die Form

$$\frac{1}{m} f(x_1, m x_2, m x_3) \tag{34}$$

hat ganzzahlige Koeffizienten. Der Koeffizient von x_1^2 hat den Wert $n_0 : m$ und die Diskriminante den Wert $D \cdot m$, so daß $D n_0$ invariant bleibt. Aus der reduzierten Gestalt der ζ-Substitutionen nach Formel (18) ergibt sich eine reproduzierende Gruppe von (34), die sich als Untergruppe von Γ darstellt, indem an die Stelle des Ideals j_0 das Ideal $j_0 : j_m$ tritt, wobei

$$j_m = (m, \omega) \tag{35}$$

bedeutet. Die Zahl u ist in dieser Gruppe so beschaffen, daß $n_0 u : m$ dem Ideal $j_0 : j_m$ angehört, oder $n_0 u$ dem Ideal $j_0 \bar{j}_m$. Um die Untergruppe als Kongruenzgruppe zu deuten, wird nach I, 2, (45) an Stelle von j_0 ein äquivalentes zu $j_0 \bar{j}_m$ primes Ideal j_0' mit der Norm n_0' eingeführt. Alsdann ist die Untergruppe dadurch gegeben, daß $(n_0' u) : j_0'$ durch j_m teilbar ist, und bedeutet eine Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$, da das Ersetzungsverfahren in I, 8, (153) auf die Untergruppe $\gamma \equiv 0 \pmod m$ innerhalb der $G \pmod m$ führt. Die Eigenschaft der Transformation ist bereits daran erkennbar, daß $\Gamma_{(m)}$ in höherem Grade erweiterungsfähig ist als Γ, wenn es einen Teiler d von D derart gibt, daß die $\lambda - 1$ zu dm konjugierten Zahlen positiv sind. Ist m eine Zahl, in der jeder Primteiler nur einfach enthalten ist, so ist (34) eine Grundform und es gilt der

Satz 14. *Sei $f(x_1, x_2, x_3)$ eine Grundform mit der Diskriminante D und m eine zu D und A prime in n_0 aufgehende Zahl, in der jeder Primteiler nur einfach aufgeht, so ist die reproduzierende Gruppe Γ' der Grundform $f' = m^{-1} f(x_1, m x_2, m x_3)$ eine Transformationsgruppe $\Gamma_{(m)}$.*

4. Einführung der transformierenden Substitutionen.

Die lineare ternäre Substitution

$$z_i' = \alpha_i z_1 + \beta_i z_2 + \gamma_i z_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{36}$$

habe folgende Eigenschaften. Die Koeffizienten sind ganze Zahlen aus K_λ, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Die Determinante der Substitution beträgt m^3 und der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten ist m. Eine solche Substitution werde als transformierende Substitution bezeichnet.

Die im vorigen Abschnitt untersuchten Transformationen von F in sich gehören zu diesen. Die Beziehung der Substitutionen zu den ternären quadratischen Formen ist dadurch gegeben, daß im allgemeinen eine in K_λ rationale Transformation, welche zwei Formen von demselben Geschlecht ineinander überführt, nach Beseitigung der Nenner in eine transformierende Substitution übergeht. Dieser Satz wird sich als unmittelbare Folge aus den Sätzen über die Klassenzahl ternärer Formen ergeben.

Zunächst ist die transformierende Substitution auf ihre Zerlegbarkeit zu untersuchen. Sei m die Potenz einer Primzahl, also $m = q^\mu$. Man kann annehmen, daß nicht alle γ_i durch q teilbar sind, andernfalls sich dies durch Vertauschung von z_1, z_2, z_3 erreichen läßt. Alsdann werde auf der rechten Seite in (36) die Substitution

$$z_3 = z_3' + \beta z_2 + \alpha z_1 \tag{37}$$

in Anwendung gebracht, in der α und β als ganze Zahlen modulo q^μ so bestimmt werden können, daß sämtliche α_i und β_i durch q^μ teilbar werden. Auf (37) folge die Substitution

$$z_3' = q^\mu z_3'', \tag{38}$$

und sämtliche Koeffizienten sind durch q^μ teilbar. Die Entfernung des Teilers ergibt eine Substitution mit der Determinante q^μ und unveränderten γ_i

$$z_i' = \alpha_i' z_1 + \beta_i' z_2 + \gamma_i z_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{39}$$

In dieser haben die Unterdeterminanten in ihrer Gesamtheit keinen gemeinsamen Teiler mehr, weil sonst in (36) q^μ nicht der größte gemeinsame Teiler wäre. Man kann annehmen, daß die aus den β_i' und γ_i zu bildenden Unterdeterminanten nicht durch q teilbar sind, andernfalls sich dies durch Vertauschung von z_1 und z_2 erreichen läßt. Sodann ist eine dritte Substitution

$$z_2 = z_2' + \alpha' z_1, \qquad z_3 = z_3' + \alpha'' z_1 \tag{40}$$

ausführbar, in der α' und α'' modulo q^μ so bestimmt werden, daß alle α_i' durch q^μ teilbar werden. Die vierte und letzte Substitution

$$z_2' = q^\mu z_2'', \qquad z_3' = q^\mu z_3'' \tag{41}$$

führt nach Absonderung des Faktors q^μ auf eine unimodulare Substitution

$$z_i' = \alpha_i'' z_1 + \beta_i' z_2 + \gamma_i z_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{42}$$

Die Zusammensetzung der vier Substitutionen (37), (38), (40), (41) ergibt

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1', \\ z_2 &= \alpha' z_1' + q^\mu z_2', \\ z_3 &= \alpha''' z_1' + \beta q^\mu z_2' + q^{2\mu} z_3', \end{aligned} \tag{43}$$

wobei zur Abkürzung

$$\alpha''' = \alpha + \beta\alpha' + q^\mu \alpha'' \tag{44}$$

gesetzt ist. Die Substitution

$$z_1'' = z_1', \quad z_2'' = q^\mu z_2', \quad z_3'' = q^{2\mu} z_3' \tag{45}$$

führt (43) in eine unimodulare Substitution über. Jede transformierende Substitution läßt sich also für $m = q^\mu$ durch unimodulare Substitutionen auf (45) reduzieren.

Zwei ternäre Formen mit derselben Diskriminante, die durch die Substitution (45) ineinander übergehen, haben die Gestalt

$$\begin{aligned} &q^{2\mu} r_1 z_1^2 + q^\mu s_3 z_1 z_2 + r_2 z_2^2 + s_2 z_1 z_3 + s_1 z_2 z_3 + r_3 z_3^2 \\ &r_1 z_1^2 + s_3 z_1 z_2 + r_2 z_2^2 + s_2 z_1 z_3 + q^\mu s_1 z_2 z_3 + q^{2\mu} r_3 z_3^2 . \end{aligned} \tag{46}$$

Bei Einführung der Form

$$Q(z_1, z_2, z_3) = q^\mu (r_1 z_1^2 + s_3 z_1 z_2 + r_2 z_2^2 + s_1 z_2 z_3 + r_3 z_3^2) + s_2 z_1 z_3 \tag{47}$$

lassen die Formen (46) die Darstellungen

$$q^{-\mu} Q(q^\mu z_1, z_2, z_3), \qquad q^{-\mu} Q(z_1, z_2, q^\mu z_3) \tag{48}$$

zu, aus denen die symmetrische Beziehung von Q zu den Formen (46) ersichtlich wird. Die Diskriminante der Form Q beträgt das q^μ-fache der Diskriminante der Formen (46).

Seien $f(x_1, x_2, x_3)$ und $f'(x_1', x_2', x_3')$ zwei ternäre Formen von derselben Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl, ferner S eine transformierende Substitution mit der Determinante $q^{3\mu}$, die f in f' überführt. Alsdann werden auch die Adjungierten F und F' durch eine transformierende Substitution ineinander übergeführt. Diese sei durch (36) gegeben und lasse sich gemäß (37) bis (42) zerlegen. Die kontragredienten Substitutionen geben sodann eine Zerlegung von S. Die arithmetische Bedeutung der zu (37), (38), (40), (41) kontragredienten Substitutionen

$$x_1 = x_1' - \alpha x_3, \qquad x_2 = x_2' - \beta x_3, \tag{49}$$

$$x_1 = q^\mu x_1', \qquad x_2 = q^\mu x_2', \tag{50}$$

$$x_1 = x_1' - \alpha' x_2 - \alpha'' x_3, \tag{51}$$

$$x_1 = q^\mu x_1' \tag{52}$$

ist folgende: f wird durch (49) bis (51) in eine Form Q mit der Diskriminante $q^\mu D$ transformiert, so daß bei Anwendung von (50) der Faktor q^μ aus der Form heraustritt, also f durch (49) in eine Form

$$n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + x_3 (b_1' x_1 + b_2' x_2 + a_0' q^\mu x_3) \tag{53}$$

transformiert wird, deren letzter Koeffizient durch q^μ teilbar ist. Die Anwendung von (50) ergibt sodann eine Form

$$q^\mu (n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2) + x_3 (b_1' x_1 + b_2' x_2 + a_0' x_3) \tag{54}$$

mit der Diskriminante $q^\mu D$.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Zerlegung in der angegebenen Weise stattfindet. Sind aber sämtliche γ_i durch q teilbar, so ist eine Ver-

tauschung der Variablen vorzunehmen. Wenn nicht sämtliche α_i durch q teilbar sind, kann $z_1 = z_1' + \beta z_2 + q\gamma z_3$ an die Stelle von (37) treten und $x_2 = x_2' - \beta x_1$, $x_3 = x_3' - q\gamma x_1$ an die Stelle von (49). Nach Anwendung dieser Substitution hat n_0 durch q^μ teilbar zu sein, was nur möglich ist, wenn A quadratischer Rest von q ist. Wenn aber A Nichtrest von q ist, können die Fälle, daß n_0 oder n_2 durch q teilbar werden, nicht eintreten. Da q nicht in D aufgeht, läßt sich f so auswählen, daß A Nichtrest von q ist. Diese Beschränkung ist an sich nicht erforderlich, bietet aber den Vorteil, daß Einzeluntersuchungen in Fortfall kommen. Da D durch q nicht teilbar ist, sind b_1' und b_2' in (54) nicht zugleich durch q teilbar. Falls b_1' durch q teilbar ist, läßt sich dies durch Vertauschung von x_1 und x_2 beheben, und es gibt immer eine Substitution (51), welche (54) in eine Form Q nach (47) überführt.

Für die Koeffizienten α, β in (49) gibt es zufolge der Annahme über A nach[2]) I, 4, (90) $\chi(q^\mu) = \psi(q^\mu)$ Lösungen modulo q^μ. Hingegen sind α' und α'' durch die linearen Kongruenzen

$$b_1'\alpha' - b_2' \equiv 0, \qquad b_1'\alpha'' - a_0' \equiv 0 \pmod{q^\mu} \tag{55}$$

eindeutig bestimmt, da b_1' nicht durch q teilbar ist. Jeder transformierenden Substitution, die eine bestimmte Form in eine andere von derselben Diskriminante überführt, ist demnach ein Wertepaar α, β modulo q^μ eindeutig zugeordnet, wodurch eine Einteilung dieser Substitutionen in $\psi(q^\mu)$ Klassen gegeben ist. Andererseits gilt folgender

Satz 15. *Sei f eine ternäre Form mit der Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl aus K_λ, ferner S und S_* zwei die Form f transformierende Substitutionen mit der Determinante $q^{3\mu}$ und den zugeordneten Lösungen α, β bzw. α_*, β_*, die modulo q^ν $(0 \leqq \nu \leqq \mu)$ übereinstimmen, so ist $S^{-1}S_*$ eine transformierende Substitution mit der Determinante $q^{6(\mu-\nu)}$.*

Der Beweis ergibt sich durch entsprechende Zusammensetzung der Zerlegungen (49) bis (52) für S und S_*

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha' & \alpha''' \\ 0 & q^\mu & \beta q^\mu \\ 0 & 0 & q^{2\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q^{2\mu} & -\alpha_*' q^\mu & -\alpha_* - \alpha_*'' q^\mu \\ 0 & q^\mu & -\beta_* \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{56}$$

wobei α''' aus (44) zu entnehmen ist. Das Resultat ist

$$\begin{vmatrix} q^{2\mu} & (\alpha' - \alpha_*')q^\mu & (\alpha - \alpha_*) + \alpha'(\beta - \beta_*) + (\alpha'' - \alpha_*'')q^\mu \\ 0 & q^{2\mu} & (\beta - \beta_*)q^\mu \\ 0 & 0 & q^{2\mu} \end{vmatrix}. \tag{57}$$

---

[2]) Daselbst wurde f als Grundform vorausgesetzt. Da aber q in D und A nicht aufgeht, sind Einschränkungen für diese Zahlen nicht erforderlich.

Vermittels der Substitution

(58) $$x_1 = x_1' + (\alpha - \alpha_*)x_3, \quad x_2 = x_2' + (\beta - \beta_*)x_3$$

wird (53) in die entsprechende Form

(59) $$n_0 x_1^2 + n_1 x_1 x_2 + n_2 x_2^2 + x_3 (b_{1*}' x_1 + b_{2*}' x_2 + a_{0*}' q^\mu x_3)$$

transformiert. Aus der Voraussetzung $\alpha \equiv \alpha_*$, $\beta \equiv \beta_* \pmod{q^\nu}$ folgt

(60) $$b_{1*}' \equiv b_1', \quad b_{2*}' \equiv b_2' \pmod{q^\nu}$$

(61) $$a_{0*}' q^\mu \equiv b_1' (\alpha - \alpha_*) + b_2' (\beta - \beta_*) + a_0' q^\mu \pmod{q^{2\nu}}$$

und daraus vermittels (55)

(62) $\alpha' \equiv \alpha_*' \pmod{q^\nu}$, $(\alpha - \alpha_*) + \alpha' (\beta - \beta_*) + (\alpha'' - \alpha_*'') q^\mu \equiv 0 \pmod{q^{3\nu}}$,

so daß sämtliche Elemente in (57) durch $q^{2\nu}$ teilbar werden. Bei $\nu = \mu$ ergibt die Entfernung des Faktors eine unimodulare Substitution und es ist

(63) $$S_* = SU,$$

wobei U eine unimodulare Substitution bedeutet.

In den Fällen $0 \leqq \nu < \mu$ ist nach Voraussetzung $(\alpha - \alpha_*) : q^\nu$ und $(\beta - \beta_*) : q^\nu$ nicht zugleich durch q teilbar, und es ist zunächst zu beweisen, daß der Koeffizient rechts oben in (57) genau durch $q^{2\nu}$ teilbar ist. Wäre er durch $q^{2\nu+1}$ teilbar, so bestände auch die Kongruenz (61) modulo $q^{2\nu+1}$, und aus der Beziehung zwischen $a_0' q^\mu$ und $a_{0*}' q^\mu$ würde folgen

(64) $$n_0 (\alpha - \alpha_*)^2 + n_1 (\alpha - \alpha_*)(\beta - \beta_*) + n_2 (\beta - \beta_*)^2 \equiv 0 \pmod{q^{2\nu+1}}.$$

Die zweite Kongruenz in (62) ergibt

(65) $$(\alpha - \alpha_*) + \alpha' (\beta - \beta_*) \equiv 0 \pmod{q^{\nu+1}}.$$

Zufolge (55) würde daher

(66) $$n_0 b_2'^2 - n_1 b_1' b_2' + n_2 b_1'^2 \equiv D \equiv 0 \pmod{q}$$

bestehen, entgegen der Voraussetzung, daß q in D nicht aufgeht. In der gleichen Weise folgt, daß die Unterdeterminante rechts oben in (57)

(67) $$-q^{2\mu} [(\alpha - \alpha_*) + \alpha_*' (\beta - \beta_*) + (\alpha'' - \alpha_*'') q^\mu]$$

genau durch $q^{2\mu+2\nu}$ teilbar ist. Die Entfernung des Faktors $q^{2\nu}$ aus den Koeffizienten ergibt eine transformierende Substitution mit der Determinante $q^{6(\mu-\nu)}$, und Satz 15 ist bewiesen.

Zu wesentlichen Folgerungen gelangt man nunmehr, wenn die Ergebnisse des vorigen Abschnittes über die Transformationen von f in sich herangezogen werden.

Satz 16. *Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl aus K_λ, ferner S eine transformierende Substitution mit der Determinante $q^{3\mu}$, die f in eine Form f' mit der Diskriminante D überführt, so sind f und f' äquivalent, wenn es einen Teiler d von D derart gibt, daß sämtliche $\lambda - 1$ zu dq^μ konjugierten Werte positiv sind.*

Nach (32) des vorigen Abschnittes liefern die $\psi(q^\mu)$ Klassen der Darstellungen von q^μ durch Φ_d ebenso viele Klassen von Transformationen T von f in sich mit der Determinante $q^{3\mu}$. Je zwei Transformationen T und T', die verschiedenen Klassen angehören, sind aber auch verschiedene Lösungen α, β modulo q^μ zugeordnet. Denn bei gleichen Lösungen würde nach Satz 15

$$T = T' U \tag{68}$$

bestehen, also T und T' entgegen der Voraussetzung derselben Klasse angehören. Daher enthält jede Klasse der S eine bestimmte Klasse der T und es folgt Satz 16.

Satz 17. *Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl, ferner S und S_* zwei transformierende Substitutionen mit der Determinante $q^{3\mu}$, die f in Formen f' bzw. f'_* mit der Diskriminante D überführen, so sind f' und f'_* äquivalent.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 15 und 16. Denn nach Satz 15 liefert $S^{-1} S_*$ eine transformierende Substitution mit der Determinante $q^{6(\mu-\nu)}$, die f' in f'_* überführt. Da $q^{2(\mu-\nu)}$ eine total positive Zahl ist, folgt aus Satz 16 die Äquivalenz von f' und f'_*.

5. Klassenzahl der Grundformen.

Der Bestimmung der Klassenzahl dient folgender

Satz 18. *Sei f eine Grundform, deren Diskriminante D für jede Zahl m aus K_λ einen Teiler d derart besitzt, daß die $\lambda - 1$ zu dm konjugierten Zahlen positiv sind, so stellt f jede zu D teilerfremde ganze Zahl m_0 aus K_λ dar, wenn die zu $-m_0 D$ konjugierten Zahlen sämtlich positiv sind.*

Wir beweisen zunächst die Auflösbarkeit der diophantischen Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_0 \square. \tag{69}$$

Nach I, 4 gibt es eine Substitution

$$x_1 = x'_1 + \gamma_1 x_3, \quad x_2 = x'_2 + \gamma_2 x_3, \tag{70}$$

durch die f in eine Form f' mit einem durch m_0 teilbaren Koeffizienten a' transformiert wird. Zudem läßt sich erreichen, daß a' dasselbe Vorzeichen wie m_0 hat, so daß $a' : m_0$ eine total positive Zahl ist, ferner $(b') : j_0$ prim zu $2D$ ist. Alsdann wird vermittels der Substitution

$$x_1 = \xi m_0 v_1, \quad x_2 = \xi m_0 v_2, \quad x_3 = \eta \tag{71}$$

die diophantische Gleichung (69) in

$$\varphi(\xi, \eta) = \square \tag{72}$$

transformiert, wobei φ eine binäre Form bedeutet, deren letzter Koeffizient $a' : m_0$ ist und deren Diskriminante durch Wahl von v_1 und v_2 zu einer Prim-

zahl gemacht werden kann [I, 4, (93)]. In diesem Falle ist φ eine Form des Hauptgeschlechtes und (69) lösbar.

Jede binäre Form ψ, deren Duplikatur φ ergibt, stellt eine Lösung von (72) dar. Sei q eine durch ψ dargestellte Primzahl, die in D nicht aufgeht, so stellt f vermöge (71) die Zahl $m_0 q^2$ dar, und es gibt eine zu f äquivalente Form

$$m_0 q^2 x_1^2 + s_3 x_1 x_2 + s_2 x_1 x_3 + \ldots, \tag{73}$$

bei der s_2 und s_3 nicht zugleich durch q teilbar sein können. Sei s_2 nicht durch q teilbar, so kann man durch eine Substitution $x_3 = x_3' + \beta x_2$ mit ganzzahligem β bewirken, daß der Koeffizient von $x_1 x_2$ durch q teilbar wird und (73) in eine Form $q^{-1} Q(q x_1, x_2, x_3)$ nach (48) übergeht. Nach Satz 16 ist $q^{-1} Q(x_1, x_2, q x_3)$ eine zu f äquivalente Form. Diese stellt vermöge $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Zahl m_0 dar, wodurch Satz 18 bewiesen ist.

Zufolge Satz 18 gibt es nur eine Klasse äquivalenter Formen im Geschlechte von f, wenn f sämtliche dem Geschlechte zugeordneten Darstellungen einer Zahl m_0 leistet, und es ist statthaft, die Untersuchung auf gewisse Primzahlen $m_0 = q_0$ einzuschränken. Nach der Gaußschen Darstellungstheorie[3]) entspricht einer eigentlichen Darstellung von q_0 durch die Grundform f eine eigentliche Darstellung einer binären Form φ_0 mit der Diskriminante $16 D q_0$ durch die Adjungierte F. Diese läßt sich in eine Form F' transformieren, so daß

$$\varphi_0 = F'(z_1, z_2, 0) = (b_2' z_1 - b_1' z_2)^2 - 4 q_0 (n_2' z_1^2 - n_1' z_1 z_2 + n_0' z_2^2) \tag{74}$$

wird. Da q_0 nicht in D aufgeht, wird φ_0 nur dann imprimitiv, wenn in b_1' und b_2' ein Teiler von 2 aufgeht. Sei τ der größte gemeinsame Teiler von 2, b_1', b_2', so hat φ_0 den Teiler τ^2, und aus der Formel (2) für D folgt

$$D \equiv q_0 n_1'^2 \pmod{\tau^2}. \tag{75}$$

Man wähle nunmehr q_0 so, daß die Kongruenz (75) für keinen Teiler von 2 als Modul lösbar ist[4]). Alsdann stellt F nur primitive binäre Formen mit der Diskriminante $16 D q_0$ dar. Das Geschlecht derselben ist eindeutig definiert. Der Charakter der Formen modulo 4 ist dadurch gegeben, daß φ_0 Diskriminantenzahlen darstellt. Bezüglich der Primteiler von D hat φ_0 die Charaktere von F, bezüglich q_0 den Charakter $+1$. Die Bestimmung der Koeffizienten von f' wird so vorgenommen, daß (74) als Kongruenz modulo $4 q_0$ betrachtet und nach b_1' und b_2' aufgelöst wird. Da q_0 eine Primzahl ist, erhält man modulo $2 q_0$ nur zwei Wertepaare mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die zugeordneten Formen

$$f' = n_0' x_1^2 + n_1' x_1 x_2 + n_2' x_2^2 \pm x_3 (b_1' x_1 + b_2' x_2) + q_0 x_3^2 \tag{76}$$

sind aber äquivalent.

[3]) Disquisitiones Arithmeticae, art. 278–285.

[4]) Primzahlen dieser Art können der Form f selbst entnommen werden.

Demnach enthält eine Form f sämtliche Darstellungen von q_0, wenn F sämtliche binären Formen vom Geschlechte der Form q_0 darstellt. Allgemein lassen sich zwei Klassen C_1 und C_2 von gleichem Geschlecht durch Formen

$$(r_1, s_2, q^2 r_3), \quad (q^2 r_1, s_2, r_3) \tag{77}$$

repräsentieren, wobei q eine Primzahl bedeutet, die in r_1 und in der Diskriminante der Formen nicht aufgeht. Denn nach dem Satz über das Hauptgeschlecht gibt es Klassen C, für die

$$C_2 = C_1 \cdot C^2 \tag{78}$$

besteht. Ist (r_1, s_2', r_3') eine Form der Klasse C_1 und q eine durch die Formen der Klasse C darstellbare Primzahl, die nicht in r_1 und der Diskriminante aufgeht, so stellen die Formen der Klasse C_2 die Zahl $r_1 q^2$ dar, und zwar gilt $s_2' \equiv s_2 \pmod{2 r_1}$, wenn $(r_1 q^2, s_2, r_3)$ eine Form aus C_2 ist. Alsdann sind aber (r_1, s_2', r_3') und $(r_1, s_2, q^2 r_3)$ äquivalent, und die Behauptung (77) ist bewiesen.

Stellt F die binäre Form $(r_1, s_2, q^2 r_3)$ eigentlich dar, so gibt es eine zu F äquivalente Form

$$r_1 z_1^2 + s_2 z_1 z_3 + q^2 r_3 z_3^2 + z_2 (s_3' z_1 + r_2' z_2 + s_1' z_3). \tag{79}$$

Da s_2 nicht durch q teilbar ist, so läßt sich durch eine Substitution $z_3 = z_3' + \beta' z_2$ mit ganzzahligem β' bewirken, daß der Koeffizient von $z_2 z_3$ durch q teilbar wird, und man erhält eine Form $q^{-1} Q (z_1, z_2, q z_3)$. Alsdann ist $q^{-1} Q (q z_1, z_2, z_3)$ eine zu F äquivalente Form, die $(r_1 q^2, s_2, r_3)$ darstellt. Dies folgt aus Satz 16, wenn man zu den adjungierten Formen übergeht. Daher enthält F alle Formen vom gleichen Geschlecht, und es folgt der

Satz 19. *Die Klassenzahl eines Geschlechtes von Grundformen ist eins, wenn die Diskriminante D für jede Zahl m aus K_λ einen Teiler derart besitzt, daß die $\lambda - 1$ zu dm konjugierten Zahlen positiv sind.*

Aus diesem Satz läßt sich auch der allgemeine Fall einer beliebigen Diskriminante ableiten. Zu diesem Zwecke wird eine Anzahl von Primzahlen $q_1, \ldots, q_\varrho$ ausfindig gemacht, so daß

$$D' = D \prod_{i=1}^{\varrho} q_i \tag{80}$$

die in dem Satz 19 genannte Eigenschaft hat, und es gilt der

Satz 19b. *Die Klassenzahl eines Geschlechtes von Grundformen mit der Diskriminante D beträgt 2^ϱ, wenn ϱ die kleinste Anzahl von Faktoren q_i bedeutet, die zur Bildung einer Zahl D' nach* (80) *notwendig ist.*

Die Definition von ϱ bedingt, daß jedes q_i in D' nur einfach aufgeht. Sei zunächst $\varrho = 1$. Zwei Formen f_1 und f_2 mit der Diskriminante D, die durch eine transformierende Substitution mit der Determinante q_1^3 in einander übergehen, gehören verschiedenen Klassen an. Die Zerlegung der

Substitution nach (49) bis (52) führt auf eine Form Q mit der Diskriminante $q_1 D$, die einem bestimmten Geschlecht angehört, da Q bezüglich der Faktoren von D dieselben Charaktere hat wie f_1 und f_2 und bezüglich q_1 den Charakter $+1$. Die Klassenzahl für dieses Geschlecht ist nach Satz 19 gleich eins, und man gelangt durch Substitutionen mit der Determinante q_1 nicht nur zu f_1 und f_2, sondern auch zu jeder anderen Form f_3 vom gleichen Geschlecht. Diese Substitutionen seien V_1 bzw. V_2, V_3. Alsdann ist $V_1 V_3^{-1}$ entweder eine unimodulare oder transformierende Substitution. Im ersten Falle ist f_3 mit f_1 äquivalent. Im zweiten Falle geht f_1 sowohl in f_2 als auch in f_3 durch eine transformierende Substitution mit der Determinante q_1^3 über, und nach Satz 17 ist f_3 mit f_2 äquivalent. Die Klassenzahl ist daher gleich zwei.

Im allgemeinen Falle gelangt man durch transformierende Substitutionen mit den Determinanten $q_1^3, q_2^3, \ldots, q_\varrho^3$ zu 2^ϱ Formenklassen. Es werde angenommen, daß der Satz für $\varrho - 1$ bereits bewiesen ist. Das oben definierte Geschlecht von Formen mit der Determinante $q_1 D$ hat alsdann $2^{\varrho-1}$ Klassen, die durch einzelne Formen dargestellt seien. Von diesen gelangt man zu jeder Form mit der Diskriminante D vom gleichen Geschlecht durch eine Substitution mit der Determinante q_1. Wie oben wird gezeigt, daß nur 2^ϱ Formenklassen vorhanden sind.

6. Die endliche Gruppe $G \pmod{q_1^\mu}$, wenn q_1 ein Primteiler von D ist.

Bei der Behandlung des Grundproblems der Kongruenzgruppen vermittels des Klassenzahlsatzes 19 wird die Verteilung der quadratischen Charaktere von

$$\mathfrak{T}^2 - 4 \tag{81}$$

benötigt, wenn die Invariante $\mathfrak{T}$ ein vollständiges Wertsystem nach einem Kongruenzmodul aus K_λ durchläuft. Die Verteilung wird gefunden durch Betrachtung der endlichen Gruppe $G \pmod{q_1}$, wenn q_1 ein Primteiler von D bedeutet. Da die Gruppe bei algebraischen Ausführungen späterhin Verwendung findet, sei darauf etwas genauer eingegangen.

Da q_1 Teiler von D ist, läßt sich b und c in der Formel für die Substitutionen der Gruppe Γ in I, (124) durch q_1 teilbar machen, und die Substitutionen reduzieren sich modulo q_1 auf

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ u & \bar{t} \end{pmatrix} \qquad t\bar{t} \equiv 1 \pmod{q_1}. \tag{82}$$

Diese stellen eine metazyklische Gruppe von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2} p_1^{3\varkappa} \left[p_1^\varkappa - \left(\frac{A}{q_1}\right)\right] \quad \text{oder} \quad 2^{3\varkappa}\left[2^\varkappa - \left(\frac{A}{q_1}\right)\right] \tag{83}$$

dar, wobei $N(q_1) = p_1^{\varkappa}$ wie in I, (155) und $p_1 > 2$ bzw. $= 2$ ist. Zufolge

$$\begin{pmatrix} \bar{t} & 0 \\ -u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ u & \bar{t} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u' t^2 & 1 \end{pmatrix} \pmod{q_1} \tag{84}$$

liefert $t \equiv \bar{t} \equiv 1 \pmod{q_1}$ einen Abelschen Normalteiler N_a, der aus $2\varkappa$ verschiedenen zyklischen Gruppen der Ordnung p_1 besteht. Zerfällt q_1 in $K_\lambda(\sqrt{A})$ in zwei verschiedene Idealfaktoren, so läßt sich u' in die Summe zweier Zahlen zerlegen, von denen die eine dem einen und die andere dem anderen Ideal angehört. Daher läßt sich in diesem Falle N_a in das Produkt zweier Abelscher Gruppen von der Ordnung $p^{\varkappa}$ zerlegen, die auch innerhalb der Gruppe $G \pmod{q_1}$ Normalteiler bleiben.

Jedes Element mit $t \not\equiv 1$ gehört einer zyklischen Gruppe der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}\left[p_1^{\varkappa} - \left(\frac{A}{q_1}\right)\right] \quad \text{oder} \quad 2^{\varkappa} - \left(\frac{A}{q_1}\right) \tag{85}$$

an, wenn $p_1 > 2$ bzw. $= 2$ ist. Für den Ausdruck (81) findet man

$$(t+\bar{t})^2 - 4 \equiv (t-\bar{t})^2 \equiv A t_2^2 \pmod{q_1}, \tag{86}$$

so daß der quadratische Charakter von (81) durch die Zahl A gegeben ist. Die Gruppe (85) reduziert sich auf das Einselement, wenn $\varkappa = 1$, $p_1 = 2, 3$ und das Symbol den Wert $+1$ annimmt. Mit Ausnahme dieser Fälle existieren also stets Werte $\mathfrak{T} \not\equiv \pm 2 \pmod{q_1}$, die (81) einen vorgeschriebenen quadratischen Charakter erteilen.

Der Aufbau der Gruppe $G \pmod{q_1''}$ und ihre Erweiterung bei Erweiterung von Γ zu Γ_ϱ nach Abschnitt 3 ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der Substitutionen modulo q_1''

$$\begin{pmatrix} t'\sqrt{\bar{d}} & \bar{u}'\sqrt{\bar{d}'} \\ u'\sqrt{\bar{d}'} & \bar{t}'\sqrt{\bar{d}} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} d\,d' = D \\ t'\bar{t}'d - u'\bar{u}'d' = 1 \end{matrix}, \tag{87}$$

wobei d sämtliche total positiven Teiler von D durchläuft. Diese Darstellung wird erhalten, wenn die reduzierte Formel (18) durch $\zeta = \zeta' \sqrt{D}$ transformiert, $t_* = td$ gesetzt, die Koeffizienten durch $\sqrt{dA}$ dividiert und schließlich

$$t \equiv t'\sqrt{A}, \quad u \equiv u'\sqrt{A}, \quad n_0 \equiv 1 \pmod{q''} \tag{88}$$

gesetzt wird. Der Vorzug der Darstellung ist, daß auch halbe Potenzen von q_1 als Kongruenzmoduln eingeführt werden können. So ergibt der Modul $\sqrt{q_1}$ bei $d = 1$ die zyklische Gruppe $G \pmod{q_1} : N_a$. Jede Substitution (87), bei der d durch q_1 teilbar ist, erweitert diese zur Diedergruppe.

7. Auflösung des Grundproblems der Kongruenzgruppen.

Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D, ferner m eine zu D prime Zahl aus K_λ. Der Beweis, daß die zugehörige Gruppe Γ die Gruppe $G \pmod{m}$ vollständig erzeugt, läßt sich nunmehr dadurch erbringen, daß die Existenz von ζ-Substitutionen aus Γ nachgewiesen wird, deren Invariante $\mathfrak{T}$ einen

vorgeschriebenen Wert modulo m besitzt. Nach I, (112) besteht für eine ζ-Substitution der Gruppe Γ die Gleichung

$$\mathfrak{T}^2 - 4 = F(u_1, u_2, t_2). \tag{89}$$

Hat das Geschlecht von F nur eine Formenklasse, so läßt sich durch F jede zu D prime Zahl darstellen, die den Charakter von F besitzt und deren konjugierte Werte sämtlich negativ sind. Demzufolge läßt sich (89) erfüllen, wenn es einen Wert $\mathfrak{T}$ derart gibt, daß $\mathfrak{T}^2 - 4$ prim zu D ist und den Charakter von F besitzt, und die zu $\mathfrak{T}$ konjugierten Werte $\mathfrak{T}', \ldots, \mathfrak{T}^{(\lambda-1)}$ den Ungleichungen

$$|\mathfrak{T}'| < 2, \; - - -, |\mathfrak{T}^{(\lambda-1)}| < 2 \tag{90}$$

genügen. Nach dem vorigen Abschnitt gibt es Werte für $\mathfrak{T}$, die den Charakter von F ergeben, wenn D keine Primteiler enthält, für die $\varkappa = 1$, $p = 2$ oder 3 ist und F den Charakter $+1$ hat. Andererseits ergibt sich aus dem Klassenzahlsatz 19 für D die Einschränkung, daß zu jeder Zahl m aus K_λ ein Teiler d derart existiert, daß die zu md konjugierten Zahlen positiv sind. Unter diesen Voraussetzungen für D lassen sich jedoch Werte für $\mathfrak{T}$ angeben, die modulo m einen vorgeschriebenen Wert haben und (89) erfüllen. Dazu stellt man ein vollständiges Wertesystem modulo mD auf und multipliziert dasselbe mit einer Einheit ε aus K_λ, deren konjugierte Werte $\varepsilon', \ldots, \varepsilon^{(\lambda-1)}$ den Ungleichungen

$$|\varepsilon'| < 1, \; - - -, |\varepsilon^{(\lambda-1)}| < 1 \tag{91}$$

genügen, und zwar so oft, bis sämtliche Werte die Ungleichungen (90) erfüllen. Diese stellen wiederum ein vollständiges Wertesystem modulo mD dar und enthalten daher die verlangten Werte für $\mathfrak{T}$.

Im Falle einer Primzahl $m = q$ lassen sich nach Satz 6 in I, 8 durch Wahl von $\mathfrak{T}$ modulo q drei ζ-Substitutionen aus Γ aufstellen, die in der Gruppe $G \pmod q$ zyklische Gruppen umfassendster Ordnung

$$p, \quad \tfrac{1}{2}(p^\varkappa + 1), \quad \tfrac{1}{2}(p^\varkappa - 1) \tag{92}$$

erzeugen. Diese Substitutionen erzeugen keine Untergruppe von G, sondern stets die Gruppe G vollständig. Für ungerades $\varkappa$ als auch für $p = 2$ und gerades $\varkappa$ folgt dies unmittelbar. Denn in den zyklischen Gruppen sind Elemente aus allen Klassen konjugierter Elemente vorhanden (I, 8, Satz 6). Eine Untergruppe enthält jedoch nicht Elemente aus allen Klassen, da das System der konjugierten Untergruppen nicht alle Elemente liefert. Bei $p > 2$ und geradem $\varkappa$ gehört die zyklische Gruppe der Ordnung p nur einer der beiden Klassen an. In diesem Falle schließt man etwa so. Durch die drei Substitutionen werde die Untergruppe G' von G erzeugt. Die Werte, die die Ordnung von G' annehmen kann, sind entweder

$$p^\sigma \cdot \tfrac{1}{2}(p^\varkappa + 1) \cdot \tfrac{1}{2}(p^\varkappa - 1) \tag{93}$$

oder betragen das Doppelte, wobei $0 < \sigma \leqq \varkappa$ ist. Man suche die umfassendste Abelsche Untergruppe von der Ordnung p^ϱ in G' auf, und es wird $0 < \varrho \leqq \sigma$. Diese ist nur durch die eigenen Elemente und durch Elemente einer zyklischen Gruppe, deren Ordnung ein Teiler von $\frac{1}{2}(p^\tau - 1)$ ist, wobei τ Teiler von $\varkappa$ und ϱ ist, in sich transformierbar. Die Anzahl der konjugierten Abelschen Gruppen in G' würde daher nach (93) ein Vielfaches von

$$p^{\sigma-\varrho} \cdot \tfrac{1}{2}(p^\varkappa + 1) \cdot (p^\varkappa - 1) : (p^\tau - 1) \tag{94}$$

betragen. Die Anzahl kann jedoch höchstens $p^\varkappa + 1$ betragen, andernfalls die Abelsche Gruppe nicht umfassend ist. Daher ist $\tau = \varkappa = \varrho = \sigma$ und es sind beide Klassen konjugierter Elemente der Ordnung p vorhanden, also $G' = G$.

Die Ausdehnung des Satzes auf Primzahlpotenzen und beliebige Zahlen erfolgt in derselben Weise wie in I, 9. Daselbst wurden freilich die Fälle, daß Primteiler der Körperdiskriminante von K_λ und der Zahlen 2, 3 in m mehrfach aufgehen, nicht in Betracht gezogen. Unter Einschränkungen für D und m folgt daher der

Satz 20. *Die endliche Gruppe G wird durch Γ vollständig erzeugt.*

Die Einschränkungen für D lassen sich indessen leicht beseitigen. Sei D beliebig und δ derjenige Teiler von D, der sämtliche Primteiler von D enthält, für die $\varkappa = 1$, $p = 2$ oder 3 ist und F den Charakter $+1$ hat. Nach Satz 14 läßt sich Γ als eine Transformationsgruppe $\Gamma'_{(\delta)}$ auffassen, wobei Γ' einer Grundform mit der Diskriminante $D : \delta$ angehört, und die Aufgabe, G' modulo $m\delta$ zu untersuchen, enthält die ursprüngliche Aufgabe. Alsdann ziehe man eine Transformationsgruppe $\Gamma'_{(D' : D : \delta)}$ modulo $m\delta$ in Betracht, wobei D' den genannten Einschränkungen unterliegt.

8. Die algebraische Transformationsgleichung

Seien f und f' zwei Grundformen von der Diskriminante D, die durch eine transformierende Substitution mit der Determinante q^3 ineinander übergehen, wobei q eine nicht in D aufgehende Primzahl ist. Die Formen f und f' seien so gewählt, daß die Koeffizienten n_0 und n'_0 durch q teilbar sind. Alsdann gehören die Grundformen $q^{-1} f(x_1, qx_2, qx_3)$ und $q^{-1} f'(x'_1, qx'_2, qx'_3)$ mit der Diskriminante qD derselben Klasse unter den $2^{\varrho-1}$ Klassen nach Satz 19b an, sind also äquivalent. Die den Formen f und f' zugehörigen Gruppen Γ und Γ' haben daher nach Satz 14 eine Transformationsgruppe der Zahl q gemeinsam. Diese hat bezüglich Γ und Γ' denselben Index $\psi(q)$, da nach Satz 20 $G \pmod q$ durch Γ als auch durch Γ' vollständig erzeugt wird. Die den Gruppen Γ und Γ' zugeordneten automorphen Funktionen werden daher (allgemein ausgedrückt) durch eine algebraische Korrespondenz ineinander transformiert, die in beiden Variablensystemen den Index $\psi(q)$ hat.

Der hyperbolische Inhalt des Diskontinuitätsbereiches von Γ, Γ', $\Gamma_{(q)} = \Gamma'_{(q)}$ sei bzw. I, I', $I_{(q)}$, und es ist

$$I_{(q)} = \psi(q) \cdot I = \psi(q) \cdot I', \tag{95}$$

also im besonderen $I = I'$.

Nach Satz 16 werden f und f' äquivalent, wenn ein Teiler d von D derart vorhanden ist, daß die $\lambda - 1$ zu dq konjugierten Zahlen sämtlich positiv sind, und die Gruppen Γ und Γ' sind isomorph. Gibt es ein total positives dq, so ist beiden Gruppen dieselbe automorphe Funktion zugeordnet, die durch die algebraische Transformation in sich transformiert wird. Existiert kein total positives dq, aber ein negatives dq, dessen konjugierte Werte sämtlich positiv sind, so sind die Diskontinuitätsbereiche der Gruppen Γ und Γ' zueinander kreissymmetrisch, besitzen also keine kreissymmetrische Transformation in sich. In diesem Falle werden die den Bereichen zugehörigen konjugiert-imaginären automorphen Funktionen durch die algebraische Transformationsgleichung ineinander transformiert.

Die Bemerkung (33) in Abschnitt 3 findet nunmehr ihre Bestätigung, da der Index $\psi(q)$ von $\Gamma_{(q)}$ bezüglich Γ zugleich die Anzahl der Klassen der Darstellungen von q durch Φ_d bedeutet, und es gibt nur eine Transformationsgleichung. Auch die Symmetrieverhältnisse lassen sich sofort klären. Die Transformationsgruppe $\Gamma_{(q)}$ gehört einer Grundform mit der Diskriminante qD an. Bei Äquivalenz von f und f' liefert qd als Teiler von qD eine Erweiterung der Gruppe $\Gamma_{(q)}$, deren Γ und Γ' nicht fähig sind. An der Transformationsgleichung bzw. Korrespondenz gelangt dies dahin zum Ausdruck, daß bei Vertauschung der Variablen bzw. Variablensysteme die Gleichung in sich übergeht oder in die konjugiert-komplexe Gleichung, je nach dem dq positiv oder negativ ist. Sind beide Arten von Teilern vorhanden, so hat die Gleichung reelle Koeffizienten. Eine teilweise Zusammenfassung der Resultate gibt folgender

Satz 21. *Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D und q eine nicht in D aufgehende Primzahl, so besitzt die automorphe Funktion der zugehörigen Gruppe Γ für jedes q eine Transformationskorrespondenz vom Index $\psi(q)$. Eine Transformation der Funktion in sich wird erhalten, wenn es einen Teiler d von D derart gibt, daß dq total positiv ist, und die Transformationsgleichung ist symmetrisch in den Variablensystemen.*

9. Der hyperbolische Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der Grundfunktionen.

Der hyperbolische Inhalt des Diskontinuitätsbereiches der Gruppe Γ wurde bereits in I, 12 ermittelt. Die Gültigkeit der Formel für beliebige D ist nunmehr unmittelbar einzusehen, wenn eine Transformationsgruppe $\Gamma_{(D':D)}$

in Betracht gezogen wird, wobei D' nach (80) oder (97) definiert ist. Die Aufgabe ist auch für die Gruppe Γ_g der Grundfunktion nach Abschnitt 3 gelöst, wenn der Index von Γ bezüglich Γ_g bestimmt ist.

Satz 22. *Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D, so beträgt der Index der zugehörigen Gruppe Γ bezüglich der erweiterten Gruppe Γ_g*

(96) $$2^{\mu+\sigma},$$

wenn μ die Anzahl der Primteiler der Diskriminante D und σ die Mindestzahl von Primfaktoren aus K_λ bedeutet, mit denen D multipliziert werden muß, um eine Zahl

(97) $$D' = D \cdot \prod_{i=1}^{\sigma} q_i$$

zu erhalten, die für jede Zahl m aus K_λ einen Teiler d derart besitzt, daß dm total positiv wird.

Die Erweiterung von I' zu Γ_g ist nach Abschnitt 3 durch ζ-Substitutionen gegeben, deren Determinante d ein total positiver Teiler von D ist, und zwar ist von den Teilern $\varepsilon^2 d$ (ε Einheit aus K_λ) nur ein Wert zuzulassen. Für d sind auch total positive Einheiten in Betracht zu ziehen, die nicht das Quadrat einer Einheit aus K_λ sind. Erzeugen die Systeme der konjugierten Einheiten $\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varepsilon^{(\lambda-1)}$ nicht sämtliche 2^λ Vorzeichenkombinationen unter λ Größen, sondern nur $2^{\lambda-\nu}$, so sind genau 2^ν total positive Einheiten als Werte für d zuzulassen. Die in (96) angegebene Anzahl für die Teiler d ergibt sich nunmehr folgendermaßen. Zufolge der Definition der Zahlen $q_1, \ldots, q_\sigma$ haben D' und D dieselben total positiven Teiler d. Andererseits erzeugen nach Voraussetzung die Teiler d' von D' mit ihren konjugierten Werten sämtliche 2^λ Vorzeichenkombinationen. Werden sämtliche Teiler $\varepsilon d'$ in eine Klasse zusammengefaßt, so gibt es

(98) $$2^{\mu+\sigma-\lambda+(\lambda-\nu)} = 2^{\mu+\sigma-\nu}$$

Teilerklassen von D', die total positive Teiler enthalten. Jede Klasse enthält 2^ν zulässige Werte für d, und (96) ist der Index von Γ bezüglich Γ_g.

Der Satz steht in Beziehung zu dem Klassenzahlsatz 19b. Bei $\sigma = 0$ ist die Klassenzahl der Formen, die dem Geschlechte von f angehören, gleich eins. Die der Form f zugehörige Grundfunktion besitzt algebraische Transformationen in sich für jede ganze Zahl m aus K_λ, die prim zu D ist. Im allgemeinen Falle sind 2^σ Grundfunktionen vorhanden, die untereinander und in sich transformierbar sind. Die Zahl σ stimmt mit ϱ in Satz 19b, (80) überein, wenn die Grundfunktionen zu sich selbst konjugiert-imaginär sind, andernfalls ist $\sigma = \varrho + 1$. Bei $\lambda = 1$ ist $\varrho = \sigma = 0$. Bei $\lambda = 2$ gibt es einen zweiten Fall $\varrho = 0$, $\sigma = 1$. Dieser tritt ein, wenn die Grundeinheit des quadratischen Körpers als auch die Primteiler von D total positiv sind. Die beiden Grundfunktionen sind zueinander konjugiert-imaginär und werden

in sich oder ineinander transformiert, je nachdem die (positiv gewählte) Zahl m total positiv ist oder nicht. In Verbindung mit (95) ergibt sich noch folgender

Satz 23. *Die Diskontinuitätsbereiche der reproduzierenden Gruppen von Grundformen gleichen Geschlechtes haben denselben hyperbolischen Inhalt.*

10. Reduzierte Formenbüschel.

Das Geschlecht p einer automorphen Funktion ergibt sich aus der Formel

$$p - 1 = \frac{I}{4\pi} - \tfrac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{\nu}\right), \tag{99}$$

wobei I den hyperbolischen Inhalt des Diskontinuitätsbereiches, ν die Ordnung des einzelnen Verzweigungspunktes der automorphen Funktion bedeutet und die Summation sich über die Anzahl der Verzweigungspunkte erstreckt. Anzahl und Ordnung der Verzweigungspunkte lassen sich aus den elliptischen und parabolischen Substitutionen der Gruppe der automorphen Funktion erschließen. Die Reduktionstheorie dieser Substitutionen hat bereits Poincaré für $\lambda = 1$ entwickelt[5]). Die Aufgabe läßt sich zunächst allgemeiner formulieren, indem man nach den Klassen konjugierter Elemente in der vollständigen reproduzierenden Gruppe einer ternären Form f fragt, für die die Invariante $\mathfrak{T}$ einen bestimmten Wert hat.

Die einzelne zyklische Untergruppe der reproduzierenden Gruppe von f führt eine bestimmte in f eigentlich enthaltene binäre quadratische Form in sich über. Sei $\varphi = (a_0, a_1, a_2)$ diese Form. Alsdann gibt es eine zu f äquivalente Form

$$B = \varphi(x, y) + b_1 xz + b_2 yz + cz^2, \tag{100}$$

bei der die Substitutionen der zyklischen Gruppe die Gestalt

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_0 x + \beta_0 y + \eta_0 z \\ y' &= \gamma_0 x + \delta_0 y + \vartheta_0 z \\ z' &= \qquad\qquad z \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{vmatrix} = 1 \tag{101}$$

annehmen. Da auch z^2 in sich übergeht, wird durch (101) jede Form in sich transformiert, die mit (100) bis auf c übereinstimmt. Der Koeffizient c werde als Parameter eines Formenbüschels aufgefaßt[6]).

Man setze $c = c_1 : c_2$ und betrachte das Büschel $c_2 B$. Alsdann ist c_2 Teiler des kontravarianten Büschels. Beschränkt man sich auf die Auffindung von Grundformen f, so ist für c_2 eine Einheit ε aus K_λ zu setzen und φ, b_1, b_2 haben keinen gemeinsamen Teiler. Da f und εf dieselbe reproduzierende

[5]) Poincaré, Journ. d. Math. IV. Série, Bd. 3 (1887), VI—VIII, 439—459.

[6]) Das Kegelschnittbüschel B = 0 besitzt paarweise zusammenfallende Grundpunkte.

Gruppe haben, genügt es, den Parameter c in (100) auf alle ganzen Zahlen aus K_λ zu beschränken. Die Diskriminante des Büschels wird eine lineare ganze Funktion von c:

$$D = Cc + \varphi(-b_2, b_1). \tag{102}$$

Hierbei bedeutet C die Diskriminante von φ.

Die Reduktionstheorie der zu einem vorgegebenen Wert C gehörigen Büschel gestaltet sich folgendermaßen. Vermittels

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y', \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1 \tag{103}$$

läßt sich φ reduzieren und b_1 und b_2 vermittels

$$x = x' + \eta z, \quad y = y' + \vartheta z. \tag{104}$$

Die Anwendung von (104) auf das Büschel B in (100) ergibt

$$\begin{aligned} b_1' &= b_1 + 2\eta a_0 + \vartheta a_1 \\ b_2' &= b_2 + \eta a_1 + 2\vartheta a_2. \end{aligned} \tag{105}$$

Demzufolge gehören $N(C)$ reduzierte Büschel zu jeder Form φ. Da die Klassenzahl der Formen φ endlich ist, folgt daraus, daß durch die Reduktionen eine endliche Anzahl zur Diskriminante C gehöriger Büschel erhalten werden.

Im allgemeinen findet unter den so gefundenen reduzierten Büscheln noch Äquivalenz statt, da nicht jede Substitution (103), die φ reproduziert, durch eine Substitution (104) zu einer das Büschel reproduzierenden Substitution ergänzt werden kann. So führt die Zusammensetzung der reproduzierenden Substitution $x = -x'$, $y = -y'$ mit (104) auf die Substitutionen der Periode 2

$$x = -x' + \eta z, \quad y = -y' + \vartheta z, \tag{106}$$

und je zwei reduzierte Büschel werden im allgemeinen durch eine Substitution (106) äquivalent. Die reproduzierenden Substitutionen der Form φ sind durch die Auflösungen der Gleichung

$$\mathfrak{T}^2 - \mathfrak{U}_\tau^2 (C : \tau^2) = 4 \tag{107}$$

in ganzen Zahlen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}_\tau$ aus K_λ gegeben, wobei τ der Teiler von φ ist. Durch unmittelbare Ausrechnung läßt sich zeigen, daß, wenn φ, b_1, b_2 keinen Teiler gemeinsam haben, aus der Duplikatur der Grundlösung von

$$\mathfrak{T}^2 - \mathfrak{U}^2 C = 4 \tag{108}$$

im allgemeinen die Erzeugende der zyklischen Gruppe des Büschels hervorgeht, und nur in besonderen Fällen aus der Grundlösung[7]). Unter der Voraussetzung, daß f eine Grundform ist, kann man auch auf die Formel I, 6, (128)

---

[7]) Diese Bemerkung gestattet eine Anwendung auf die diophantische in ganzen Zahlen x und y zu lösende Gleichung

$$a_0 x^2 + a_1 x y + a_2 y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0.$$

zurückgreifen, zufolge deren die Invariante $\mathfrak{T}$ einer ζ-Substitution der Gruppe Γ eine Auflösung von (108) liefert. Die Invariante $\mathfrak{T}_0 = \alpha_0 + \delta_0$ der Substitution (101) steht aber mit $\mathfrak{T}$ in der Beziehung [8])

$$\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}^2 - 2, \tag{109}$$

stellt also die Duplikatur der Lösung $\mathfrak{T}$ von (108) dar, woraus die Behauptung sich ergibt. Der Fall, daß bereits die Grundlösung von (108) eine reproduzierende Substitution des Büschels liefert, führt auf eine ζ-Substitution, die einer Erweiterung von Γ nach Abschnitt 3, (31) angehört. Die ganze Zahl $\mathfrak{T}_0 + 2$ ist sodann in K_λ kein vollständiges Quadrat, aber die Aussonderung sämtlicher quadratischer Teiler ergibt einen bei der Erweiterung von Γ auftretenden Teiler d von D. In der Gruppe Γ_g ist d, also auch $\mathfrak{T}_0 + 2$ eine total positive Zahl, und es folgt aus den Bedingungen für Diskontinuität, daß die zu $\mathfrak{T}_0 - 2$ konjugierten Werte sämtlich negativ sind.

Die Lösung der Aufgabe, alle Klassen konjugierter Elemente mit der Invariante $\mathfrak{T}_0 \neq \pm 2$ zu finden, die in der Gruppe Γ_g einer Grundform f mit der Diskriminante D vorhanden sind, ergibt sich nunmehr folgendermaßen. Bei der Aufspaltung von $\mathfrak{T}_0^2 - 4$ in $\mathfrak{U}_0^2$ und C kommen nur eine endliche Anzahl von Werten in Betracht. Denn zufolge der unimodularen Transformation

$$x = x', \quad y = \varepsilon y', \quad z = z' : \varepsilon, \tag{110}$$

die C in $\varepsilon^2 C$ überführt, ist von den Aufspaltungen $\mathfrak{U}_0^2 \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon^2 C$, in denen ε sämtliche Einheiten aus K_λ durchläuft, nur eine zu wählen. Die in C quadratisch aufgehenden Teiler von D sind als Teiler τ von φ zu berücksichtigen, wenn $C : \tau^2$ Diskriminantenzahl ist. Für jedes so erhaltene C sind die zugehörigen reduzierten Büschel aufzustellen, soweit diese eine reproduzierende Substitution mit der Invariante $\mathfrak{T}_0$ besitzen, und die in den Büscheln enthaltenen Formen mit der Diskriminante D zu bestimmen. Nur diejenigen Formen φ sind zulässig, bei denen gemäß den Bedingungen für Diskontinuität die zu φD konjugierten Werte negativ sind und φD bei $C < 0$ positiv ist, und die zufolge (102) der Kongruenz

$$D \equiv \varphi \pmod{C} \tag{111}$$

genügen. Die Anzahl der mit f äquivalenten Formen ist allgemein angebbar, sobald die Klassenzahlen für die Formen φ bekannt sind. Für den Fall, daß die Klassenzahl des Geschlechtes von f gleich eins ist, leuchtet dies ein, da sämtliche Klassen eines Geschlechtes von φ durch f darstellbar sind, sobald eine Klasse darstellbar ist. Im allgemeinen Falle der Klassenzahl 2^ϱ (Satz 19b) ist auch die Klassenzahl der Geschlechter der φ durch 2^ϱ teilbar, und es

[8]) Die Formel ergibt sich aus (22), (23). Hierzu auch Poincaré, l. c. 432.

entfallen auf jede Klasse der ternären Formen dieselbe Anzahl von Klassen aus dem Geschlechte von φ. Die Begründung läßt sich vermittels der transformierenden Substitutionen erbringen. Wenn der Diskontinuitätsbereich von Γ_g eine kreissymmetrische Transformation in sich besitzt, stellt jedes der reduzierten Büschel, die eine mit f äquivalente Form enthalten, eine Klasse konjugierter Elemente mit der Invariante $\mathfrak{T}_0$ in Γ_g dar. Andernfalls liefern zwei Büschel, die durch eine Substitution (101) mit der Determinante -1 ineinander übergehen und eine zu f äquivalente Form enthalten, nur eine Klasse. Die inversen Elemente bilden eine Klasse für sich mit Ausnahme des Falles, daß die zyklische Gruppe des Büschels sich zu einer „hyperbolischen Diedergruppe" erweitern läßt.

Im nächsten Abschnitt werden bei der Reduktion der Büschel zu den bisherigen Substitutionen auch solche

(112) $$z = \varepsilon z'$$

herangezogen, die φ und damit C invariant lassen, aber D in $\varepsilon^2 D$ überführen. Bei einer endlichen Anzahl von Wiederholungen wird ein zum ursprünglichen Büschel äquivalentes Büschel erhalten. (112) läßt sich zerlegen vermittels der Transformation

(113) $$\varepsilon f(x, y' : \varepsilon, z),$$

bei der C invariant ist und D in εD übergeht. Die Wiederholung führt nach Anwendung der unimodularen Transformation $x = x' : \varepsilon$, $y = y' \varepsilon$ auf (112) zurück. Bei Verwendung von (113) ist in (111) und den vorstehenden Bedingungen außer D

(114) $$D' = \varepsilon D$$

einzusetzen, wobei ε ein System von Grundeinheiten und einfachen Kombinationen aus diesen durchläuft.

Im folgenden scheiden die hyperbolischen Substitutionen aus. Das Verhalten der Grundfunktionen bei parabolischen Substitutionen ist unmittelbar aufzuweisen. Es ist $\mathfrak{T}_0 = 2$, $C = 0$, und f läßt sich auf

(115) $$f' = \tau y^2 + b_1' x z + b_2' y z + c' z^2$$

reduzieren. Die Diskriminante beträgt $D = \tau b_1'^2$. Besitzt D keinen quadratischen Teiler, so ist $b_1' = 1$, und f' läßt sich auf

(116) $$D y^2 + x z$$

reduzieren. Daraus folgt, daß der Diskontinuitätsbereich einer mit der Modulfunktion commensurablen Grundfunktion nur eine einzelne Spitze besitzt, für die $\nu = \infty$ in Formel (99) zu setzen ist.

11. Die Verzweigungspunkte der Ordnung $\nu > 2$.

Die Anzahl der Verzweigungspunkte der Ordnung ν ist gegeben durch die Klassen konjugierter zyklischer Untergruppen der Ordnung ν in Γ_g. Erzeugende dieser Gruppen sind die Substitutionen (101) mit

$$\mathfrak{T}_0 = 2\cos\frac{2\pi}{\nu}, \quad \mathfrak{U}_0^2 C = -4\left(\sin\frac{2\pi}{\nu}\right)^2. \tag{117}$$

Der Fall $\nu = 2$, bei dem $\mathfrak{T}_0 = -2$, $\mathfrak{U}_0 = 0$ ist, wird in Abschnitt 12 behandelt.

Sei ν zunächst ungerade. Wenn ν voneinander verschiedene Primzahlen enthält, ist C eine Einheit und b_1 und b_2 sind beide auf Null reduzierbar. Solche Büschel werden durch $x = -x'$, $y = -y'$ in sich transformiert und die Ordnung der zyklischen Gruppe der Büschel beträgt mindestens 2ν. Daraus folgt, daß bei automorphen Funktionen, die die vollständige reproduzierende Gruppe einer ternären Form zur Gruppe besitzen, im besonderen also bei Grundfunktionen Verzweigungspunkte von ungerader Ordnung, die mehrere Primzahlen enthält, nicht auftreten können.

Für das spezielle Büschel mit $b_1 = 0$, $b_2 = 0$

$$x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\,x\,y + y^2 + c\,z^2 \tag{118}$$

läßt sich die zyklische Gruppe durch Spiegelungen

$$\begin{aligned} x &= -x' + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\,y', \quad y = y' \\ x &= y', \qquad\qquad\qquad y = x' \end{aligned} \tag{119}$$

erzeugen. Die Zusammensetzung ergibt die Substitution der Ordnung ν

$$x = y' \qquad y = -x' + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\,y'. \tag{120}$$

Sei ν die Potenz einer ungeraden Primzahl p. Bei Einführung der Beschränkung $K_\lambda = K\left(\cos\frac{2\pi}{\nu}\right)$ wird $N(C) = p$. Nur bei den Büscheln, deren Reduktion auf $b_1 = b_2 = 0$ führt, beträgt die Ordnung der zyklischen Gruppe 2ν. Im übrigen sind die Büschel durch (104) und (106) reduzierbar und für b_1 und b_2 sind $\frac{1}{2}(p-1)$ reduzierte Wertepaare anzugeben. Ein Wertesystem dieser Art ist

$$b_1 = b_2 = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-1). \tag{121}$$

Bei Anwendung der Reduktionen (112) sind die Einheiten des Kreiskörpers modulo C zu untersuchen. Die Einheiten $2\cos\frac{2\pi\mu}{\nu}$ ($\mu \not\equiv 0 \bmod p$) werden modulo C der Zahl 2 kongruent. Daher sind sämtliche $\frac{1}{2}(p-1)$ zu derselben Form φ gehörige Büschel ineinander transformierbar, wenn die Potenzreste von 2 sämtliche absolut kleinsten Reste modulo p durchlaufen. In den Fällen $p = 3, 5, 7, 11, 13$ trifft dies zu. Da der Körper der ν-ten Einheitswurzeln bei $\nu = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ die Klassenzahl eins besitzt, existiert für

diese Fälle bei Anwendung von (113) nur ein reduziertes Büschel, deren zyklische Gruppe die Ordnung ν hat. Als solches kann man wählen

$$x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{\nu}xy + y^2 + xz + yz + cz^2. \tag{122}$$

Vermittels Spiegelungen gewinnt man die Substitution der Ordnung ν

$$x = y', \qquad y = -x' + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}y' - z. \tag{123}$$

Die Diskriminante berechnet sich zu

$$D = \left(2 + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\right)\left[1 - c\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\right)\right]. \tag{124}$$

Für die genannten Werte von ν gibt es in den reellen Kreisteilungskörpern stets Einheiten, die mit ihren konjugierten Einheiten ein vorgeschriebenes Vorzeichensystem erzeugen. Daher existiert unter den Werten εD in (114) genau ein Wert D', der den Bedingungen für Diskontinuität genügt. Aus (111) folgt sodann, daß Grundfunktionen einen oder keinen Verzweigungspunkt der Ordnung ν besitzen, je nachdem D' quadratischer Rest oder Nichtrest modulo C ist. Wenn D durch die Primzahl C teilbar ist, so existiert ein Verzweigungspunkt der Ordnung 2ν. Bemerkungswert ist, daß das Büschel (118) in die Gestalt (122) gesetzt werden kann, wenn daselbst ν durch 2ν ersetzt wird.

Ist ν durch 4 teilbar, enthält aber noch eine ungerade Primzahl als Faktor, so ist wiederum $N(C) = 1$, der Unterschied zu dem ersten Fall ist aber, daß auch Grundfunktionen mit Verzweigungspunkten der Ordnung ν existieren.

Sei ν eine Potenz von 2 und $K_\lambda = K\left(\cos\frac{2\pi}{\nu}\right)$, so ist $N(C) = 4$ und es lassen sich b_1 und b_2 auf die Wertepaare

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 0) \tag{125}$$

reduzieren. Für die Büschel mit den Wertepaaren (0, 1), (1, 0) hat die Gruppe die Ordnung $\nu : 2$, und Substitutionen von der Gestalt (101) mit der Invariante $\mathfrak{T}_0 = 2\cos\frac{2\pi}{\nu}$ führen die einen Büschel in die anderen über. Bei den Wertepaaren (0, 0) und (1, 1) hat die Gruppe die Ordnung ν, aber nur aus den Büscheln mit $b_1 = b_2 = 1$ lassen sich Grundformen ableiten.

Bei $\lambda = 1$ nimmt ν nur die Werte 3, 4, 6 an. Die Grundformen ergeben sich aus dem Büschel (122), und es ist nach (124)

$$D = 1 - 3c, \quad 2\cdot(1 - 2c), \quad 3\cdot(1 - c), \tag{126}$$

wobei $c = 0, -1, -2, \ldots$ anzusetzen ist. Die Grundfunktionen besitzen nur einen oder keinen Verzweigungspunkt dieser Ordnungen, im besonderen treten die Ordnungen 3 und 6 nicht zugleich auf, da für diese $D \equiv 1$ bzw.

0 (mod 3) ist. Das Geschlecht der Formen (122) ist eindeutig durch die Charaktere

$$\left(\frac{-3}{q_i}\right) \text{ bei } \nu = 3, 6 \text{ und } \left(\frac{-1}{q_i}\right) \text{ bei } \nu = 4 \tag{127}$$

festgelegt, wobei q_i alle Primteiler $\neq 3$ bzw. 2 von D durchläuft. Der Charakter von 3 bzw. 2 ist nach Abschnitt 1, (14) mitbestimmt.

Eine weitere Anwendung bezieht sich auf die Dreiecksfunktionen. In dem Büschel (122) ergibt $c = 1$ eine Form, die für $x = 0$ die binäre Form (1, 1, 1) enthält und demzufolge eine reproduzierende Substitution von der Ordnung 3 besitzt. In der Tat ergibt die Zusammensetzung der drei Spiegelungen

$$\begin{array}{lll} x = y' & x = x' & x = x' \\ y = x' & y = 2\cos\frac{2\pi}{\nu}x' - y' - z' & y = y' \\ z = z', & z = z', & z = -x' - y' - z' \end{array} \tag{128}$$

elliptische Substitutionen von der Periode 2, 3, ν, so daß (128) die Gruppe des Kreisbogendreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{\nu}$ erzeugt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (128) die vollständige reproduzierende Gruppe der ternären Form erzeugt, ist, daß die Form die Bedingungen für Diskontinuität erfüllt und die Formel für den hyperbolischen Inhalt genau das Doppelte des Dreiecksinhaltes liefert. (124) ergibt für $c = 1$

$$D = \left(2 + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\right)\left(-1 + 2\cos\frac{2\pi}{\nu}\right). \tag{129}$$

Für $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ erhält D die Werte $0, -2, -2, -1, 0$. Die Fälle $\nu = 3, 4, 5$, in denen definite Formen erhalten werden, betreffen die Gruppen der regulären Körper. Bei $\nu > 6$ wird D positiv und die Formen sind indefinit. Die konjugierten Formen werden definit, wenn $2\cos\frac{2\pi\mu}{\nu}$ für sämtliche zu ν teilerfremden Reste $\mu \neq 1$ kleiner als 1 wird, wenn also $\mu : \nu$ größer als ein Sechstel ist. So erhält man die bereits von Fricke angegebenen Zahlen[9])

$$\nu = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30. \tag{130}$$

Mit Ausnahme von $\nu = 18$ erweisen sich die Formen (122), $c = 1$ als Grundformen, und die Formel für den hyperbolischen Inhalt ergibt das Doppelte des Dreiecksinhaltes, so daß (128) die vollständige Gruppe erzeugt. Aber auch in dem Fall $\nu = 18$, in welchem die Adjungierte einen Teiler der Norm 3 hat, ist dies leicht nachzuweisen.

---

[9]) R. Fricke und F. Klein, Automorphe Funktionen, 1, 610 (4).

12. Die Verzweigungspunkte der Ordnung $\nu = 2$.

Die Substitutionen von der Ordnung zwei

$$x = -x' + \eta_0 z, \quad y = -y' + \vartheta_0 z \tag{131}$$

fanden bereits in (106) Erwähnung. Je nachdem C positiv oder negativ ist, handelt es sich um eine Spiegelung an der Geraden $z = 0$, oder halbe Umdrehung um den Pol von $z = 0$ bezüglich $B = 0$. Im folgenden werden nur die elliptischen Substitutionen in Betracht gezogen, und da die zu C konjugierten Werte negativ sind, wird $-C$ eine total positive Zahl. Die Koeffizienten η_0 und ϑ_0 lassen sich auf ein bestimmtes Wertesystem modulo 2 reduzieren, wenn (131) durch (104) transformiert wird. Die Forderung, daß (131) das Büschel B in (100) reproduziert, ergibt für b_1 und b_2 die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2\,\eta_0 a_0 + \vartheta_0 a_1 + 2\,b_1 &= 0, \\ \eta_0 a_1 + 2\,\vartheta_0 a_2 + 2\,b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{132}$$

Da b_1 und b_2 ganze Zahlen aus K_λ sind, werden $\vartheta_0 a_1$ und $\eta_0 a_1$ durch 2 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler von a_1 und 2 sei r_1. Alsdann ist C durch r_1^2 teilbar und η_0 und ϑ_0 durch r_2 teilbar, wenn $r_1 r_2 = 2$ gesetzt wird. Für D ergibt sich die Formel

$$D = C\,[c - \tfrac{1}{4}\,\varphi(\eta_0, \vartheta_0)], \tag{133}$$

und es ist $C : r_1^2$ Teiler von D. Das Büschel läßt die Umformung zu

$$B = \varphi(x - \tfrac{1}{2}\eta_0 z,\ y - \tfrac{1}{2}\vartheta_0 z) + z^2 (D : C). \tag{134}$$

Die Lösung der Aufgabe, die Klassen konjugierter Elemente der Ordnung 2 der Gruppe Γ_g zu bestimmen, weicht von der allgemeinen Lösung in Abschnitt 10 nur bez. der Bestimmung der Diskriminanten C ab. Man stelle ein System total positiver Teiler d von D auf, wie es bereits bei Erweiterung von Γ zu Γ_g aufgetreten ist, und ermittle sämtliche Diskriminantenzahlen $-d\,r_1^2 = C$. An die Stelle von (111) tritt zufolge (133)

$$D : d \equiv \frac{1}{r_2^2}\,\varphi(\eta_0, \vartheta_0) \pmod{r_1^2}, \tag{135}$$

wobei r_2 der in η_0 und ϑ_0 aufgehende Teiler von 2 ist. Auch kann der Fall eintreten, daß φ einen Teiler hat. Dieser ist ein Teiler von 2, da er in D nur einmal und in C mindestens zweimal aufgeht. Die in den Büscheln enthaltenen ternären Formen mit der Diskriminante D sind in Geschlechter einzuteilen. Für die Primteiler von D, die nicht in 2 aufgehen, sind die Charaktere zufolge (134) durch

$$\left(\frac{-d}{q_i}\right), \quad \left(\frac{\varphi\, D : d}{q_i}\right) \tag{136}$$

gegeben, wobei q_i in dem ersten Symbol die Primteiler von $D : d$ durchläuft, und in dem zweiten Symbol die von d. Wenn D keinen oder nur einen Primteiler von 2 besitzt, sind die Charaktere zufolge (14) vollständig bestimmt.

Die Elemente der Ordnung 2 in der reproduzierenden Gruppe von f stehen in Beziehung zu den Erweiterungen von Γ in Abschnitt 3. Sei aus Γ_g eine ζ-Substitution der Ordnung 2 mit der Determinante d gegeben. Für diese hat die Invariante $\mathfrak{T}$ den Wert Null und zufolge I, (112) besteht

(137) $$F = -4\Phi_1 = -4d.$$

Die Adjungierte der Grundform f stellt also die Zahl $-4d$ dar. Der Teiler der Darstellung sei r_2, so daß $-r_1^2 d$ eigentlich dargestellt wird. Alsdann gibt es eine zu F äquivalente Form $F'(X, Y, Z)$ von der Beschaffenheit $F'(0, 0, 1) = -r_1^2 d$. In einer solchen Form sind die Koeffizienten von XZ und YZ durch $r_1^2 d$ teilbar und F' wird durch eine Substitution der Ordnung 2

(138) $$X = -X', \quad Y = -Y', \quad Z = Z' + \eta_0 X' + \vartheta_0 Y'$$

mit ganzzahligen Werten η_0, ϑ_0 in sich transformiert. Die kontragrediente Substitution hat die Gestalt (131). Daher stellt die Form $f'(x, y, z)$, zu der F' adjungiert ist, durch $z = 0$ eine Form φ mit der Diskriminante $-r_1^2 d$ dar und wird durch eine Substitution (131) in sich transformiert. Hieraus folgt der

Satz 24. *Sei f eine Grundform mit der Diskriminante D und d ein total positiver Teiler von D, so erzeugt jede ζ-Substitution der Ordnung 2 mit der Determinante d aus der Gruppe Γ_g eine elliptische Substitution der reproduzierenden Gruppe von f, deren Fixpunkt eine binäre Form mit der Diskriminante $-dr_1^2$ darstellt, wobei r_1 ein Teiler von 2 ist.*

Die elliptischen Substitutionen der Ordnung 2 werden durch Spiegelungen erzeugbar, wenn φ ambig ist und die Transformation mit der Determinante -1, die φ in sich überführt, auf die elliptische Substitution ausgeübt, das Wertepaar (η_0, ϑ_0) in (131) modulo 2 in sich überführt.

Für $\lambda = 1$ folgen einige numerische Angaben. Die Tabelle (139) gibt die einfachsten Typen von Formenbüscheln, aus denen sich Grundformen ableiten lassen.

(139)

	$-C$	φ	η_0, ϑ_0	D
1)	$4(4n+1)$	$(1, 0, 4n+1)$	1,0	$(4n+1)(1-4c)$
2)	„	„	0,1	$(4n+1)(4n+1-4c)$
3)	„	„	1,1	$2(4n+1)(2n+1-2c)$
4)	„	$(2, -2, 2n+1)$	1,0	$2(4n+1)(1-2c)$
5)	„	„	0,1	$(4n+1)(2n+1-4c)$
6)	„	„	1,1	„
7)	$8(2n+1)$	$(1, 0, 4n+2)$	1,0	$2(2n+1)(1-4c)$
8)	„	„	1,1	$2(2n+1)(4n+3-4c)$
9)	$4(4n+3)$	$(1, 0, 4n+3)$	1,0	$(4n+3)(1-4c)$
10)	„	„	0,1	$(4n+3)(4n+3-4c)$
11)	$4n+3$	$(1, -1, n+1)$	0,0	$-(4n+3)\cdot c$
12)	$4(4n+3)$	$2(1, -1, n+1)$	1,0	$2(4n+3)(1-2c)$
13)	„	„	0,1	$2(4n+3)(n+1-2c)$
14)	„	„	1,1	„

Zu dieser Tabelle ist bezüglich der Transformationen von φ in sich folgendes zu bemerken. Sämtliche Formen φ sind ambig, aber 5), 6) als auch 13), 14) sind nicht durch Spiegelungen erweiterungsfähig und daher durch eine Substitution der Determinante -1 ineinander transformierbar. Für den Wert $n = 0$ haben 3) und 11) eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bzw. 6, hingegen werden die Büschel 1), 2) als auch 12), 13), 14) ineinander transformierbar.

Die Gaußschen Tabellen der Klassenzahlen der Geschlechter binärer Formen gestatten, das Geschlecht p der Grundfunktionen für $\lambda = 1$ in großem Umfange zu berechnen. Bei den mit der Modulfunktion commensurablen Funktionen ergeben sich folgende Fälle vom Geschlechte $p = 0$:

$$
\begin{aligned}
&D = q_1 && = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71.\\
&D = q_1 q_2 && = 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55,\\
&&& \quad 62, 69, 87, 94, 95, 119.\\
&D = q_1 q_2 q_3 && = 30, 42, 66, 70, 78, 105, 110.
\end{aligned}
\tag{140}
$$

Die Fälle $D = q_1$ finden sich bei Fricke[10]). Für sämtliche in (140) aufgeführten Transformationsgrade habe ich die Aufgabe der Aufstellung des Hauptmoduls auf rein algebraischem Wege in einfachster Weise gelöst. Im folgenden seien noch die Werte für $D = q_1 q_2$ mit den Charakteren -1, -1, bei denen $p = 0$ ist, angegeben. Bis auf den Fall $D = 91$, in dem $p = 1$ ist, haben sämtliche $D < 120$ das Geschlecht $p = 0$, ferner

(141) 122, 129, 134, 143, 146, 159, 161, 166, 178, 183, 194, 202, 206, 215, 237, 314.

Auch über diese Funktionen habe ich umfangreiche algebraische Untersuchungen ausgeführt.

Schlußbemerkung. Das Abbrechen der Zahlenreihen bei vorgegebenem Geschlecht p läßt sich aus der Eigenschaft der Transformierbarkeit der Funktionen begründen, zufolge deren für jedes Geschlecht die Anzahl der Verzweigungspunkte eine obere Grenze nicht überschreiten kann. Dieses Schlußverfahren ist auch für $\lambda > 1$ verwendbar, und die Formel für den hyperbolischen Inhalt führt zu dem Resultat, daß zu einem bestimmten Grade λ und Geschlecht p nur eine endliche Anzahl transformierbarer automorpher Funktionen existieren. Die Behauptung, das auch mit wachsendem λ die Anzahlen bei vorgegebenem Geschlecht schnell abbrechen, ist zur Zeit nicht

---

[10]) R. Fricke, Elliptische Funktionen, Teubner (1922) II, 367. Daselbst fehlt die Zahl 59. Eine Tabelle dieser Zahlen habe ich bereits 1916 besessen.

nachweisbar, da das Anwachsen des Minimums der Körperdiskriminante Δ mit wachsendem λ nicht hinreichend bekannt ist[11]).

Was die spezielle Aufgabe betrifft, alle transformierbaren automorphen Funktionen mit vorgegebenem Geschlecht und vorgegebener Verzweigung bei beliebigem Körper K_λ zu finden, so habe ich sämtliche Dreiecksfunktionen bestimmt und die Viereckfunktionen für $\lambda = 1, 2, 3$. Auch $\lambda = 4, 5$ enthält Lösungen, aber die Durchführung der Aufgabe ist dadurch behindert, daß die Zahlkörper mit kleinsten Diskriminanten nicht genügend bekannt sind.

---

[11]) Die von Minkowski gegebene Abschätzung (Diophantische Approximationen. Teubner, 1907, 130) ist nicht hinreichend. Eine schärfere Abschätzung wird bereits erhalten, wenn man den Umstand benutzt, daß für Vierecke der Inhalt $2\pi : 6$ nicht unterschritten werden kann. Für ungerades $\lambda > 3$ ergibt sich die Abschätzung

$$\Delta^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\lambda - \lambda\right) > \frac{1}{24}(2\pi)^{2\lambda}.$$

(Eingegangen am 27. April 1937.)

Matrixfunktionen beschränkter Schwankung[1]).

Von

Otto Dobsch in Prag.

§ 1.

Problemstellung und Vorbemerkungen.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift (Bd. 38, 1934) erschienenen Arbeit (der einzigen, auf die im folgenden immer wieder Bezug genommen wird) hat K. Löwner den Begriff der Monotonie auf Matrixfunktionen übertragen. Es lag sehr nahe, auch zu der die monotonen Funktionen umfassenden Klasse der Funktionen beschränkter Schwankung — jede solche Funktion läßt sich bekanntlich als Differenz zweier monotoner darstellen — ein Analogon bei Matrixfunktionen zu suchen. Zunächst werde aber gesagt, was unter einer Matrixfunktion verstanden werden soll.

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x und $C_n = (c_{ik})$ eine reelle symmetrische n-reihige Matrix, deren Eigenwerte λ_i sämtlich dem Definitionsbereich von $f(x)$ angehören. Dann versteht man unter $f(C_n)$ diejenige Matrix, die aus C_n entsteht, indem man alle Eigenvektoren beibehält, die Eigenwerte λ_i hingegen durch $f(\lambda_i)$ ersetzt. Eine Matrixfunktion n-ter Stufe entsteht, wenn man sich $f(C_n)$ für alle n-reihigen Matrizen gebildet denkt, deren Eigenwerte dem Definitionsbereich von $f(x)$ angehören.

Des weiteren bedeute für zwei Matrizen $A_n \leq B_n$, daß die zu $B_n - A_n$ gehörige quadratische Form negativer Werte nicht fähig ist. $f(X_n)$ heißt dann monoton (die skalare Funktion $f(x)$ monoton von n-ter Stufe), wenn mit $A_n \leq B_n$ stets auch $f(A_n) \leq f(B_n)$ ist für je zwei Matrizen des Definitionsbereiches.

Für die Übertragung des Begriffes der beschränkten Schwankung auf Matrixfunktionen bieten sich zwei Wege als die nächstliegenden:

Der eine: *man definiere auf irgendeine Weise für Matrizen einen Absolutbetrag* $b(A)$[2]). *Man wird dann sagen, daß die in* $\alpha \leqq x \leqq \beta$

[1]) Die Arbeit wurde als Dissertation an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Deutschen Universität in Prag angenommen.

[2]) Dabei ist zunächst noch offengelassen, von welcher Art die Größe $b(A)$ sein soll. Wir werden bloß reelle symmetrische Matrizen und Skalare betrachten. Beträge von Matrizen sind verschiedentlich gebraucht worden. Man vergleiche J. Schur, Math. Ann. 66.

definierte Funktion $f(x)$ als Matrixfunktion n-ter Stufe von beschränkter Schwankung ist, wenn es eine Zahl K gibt, so daß stets

$$(1) \qquad S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} b\{f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})\} < K \cdot b(E)$$

gilt, unabhängig von der speziellen Wahl der „Zerlegung"

$$(2) \qquad \mathfrak{Z} : \alpha E = A^{(0)} \leq A^{(1)} \leq \ldots \leq A^{(p)} = \beta \cdot E.$$

($E = n$-dimensionale Einheitsmatrix.)

Wir werden in § 2 unter Zugrundelegung der speziellen Betragdefinition $b(A) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2}$ zeigen, daß jede Funktion von beschränkter Schwankung im gewöhnlichen Sinn auch als Matrixfunktion beliebiger Stufe von beschränkter Schwankung ist.

Die Betragdefinition $b(A) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2}$ (für die wir im folgenden kurz $|A|$ schreiben werden) mag willkürlich scheinen. Man kann aber von vornherein sagen, daß die durch (1) charakterisierte Funktionenklasse weitgehend unabhängig sein wird von der verwendeten Betragdefinition $b(A)$. Läßt man die Frage nach den allgemeinsten, für unsere Zwecke äquivalenten Funktionen $b(A)$ beiseite, so wird man, falls $b(A)$ ein Skalar ist, naturgemäß verlangen:

1. *Es sei* $b(0) = 0$, $b(A) > 0$ *für* $A \neq 0$,
2. $b(A)$ *sei eine stetige Funktion der Matrixkomponenten* a_{ik}.

Nun führen zwei verschiedene Betragfunktionen $b(A)$ und $b^*(A)$ in (1) sicher dann zur gleichen Funktionenklasse, wenn es zwei positive Zahlen k_1, k_2 gibt, mit denen stets

$$k_1 < \frac{b(A)}{b^*(A)} < k_2 \qquad (A \neq 0)$$

ist. Dies ist beispielsweise erfüllt, wenn man *außer* 1. *und* 2. *noch*

$$3. \qquad b(\lambda A) = \lambda b(A) \qquad (\lambda \geqq 0)$$

fordert. Denn dann hat der Quotient $\frac{b(A)}{b^*(A)} = \frac{b\left(\frac{1}{\sqrt{\sum a_{ik}^2}} A\right)}{b^*\left(\frac{1}{\sqrt{\sum a_{ik}^2}} A\right)}$ auf der abgeschlossenen Punktmenge $\sum a_{ik}^2 = 1$ ein endliches Maximum und ein positives Minimum.

Der zweite der angedeuteten möglichen Wege besteht in der Charakterisierung der Funktionen, die sich als Differenz zweier von gleicher Stufe monotoner darstellen lassen. Diese Frage wird soweit geführt, daß als notwendige Bedingung für die Zerlegbarkeit in zwei monotone Funktionen die Endlichkeit gewisser Stieltjesscher Integrale angegeben

wird, die im Falle monotoner Funktionen als Verallgemeinerung des für monotone Funktionen erster Stufe stets sinnvollen Integrals $\int_{\alpha}^{\beta} d\,y$ und von $\overline{\lim} \sum_{\nu} |y_\nu - y_{\nu-1}|$ für die Differenz zweier solcher angesehen werden können. Es ist zwar zu vermuten, daß diese oder ähnliche Bedingungen auch hinreichend sind, es fehlt mir aber bislang an einer Methode, die die Zerlegung wirklich leistet. Zur Rechtfertigung der auftretenden integralartigen Bildungen wird in § 4 eine kleine Erweiterung des Stieltjesschen Integralbegriffes vorgenommen.

Wir fügen noch einige Bemerkungen über verschiedene konkrete Betragdefinitionen an, die, soweit sie sich auf $b(A) = |A|$ beziehen, später verwendet werden.

1. Der (auch für nichtsymmetrische Matrizen erklärte) Betrag $b_1(A) = |A| = \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2}$ hat außer 1. bis 3. noch zwei weitere wichtige Eigenschaften: er ist *orthogonalinvariant* und es gilt für zwei Matrizen die *Dreiecksungleichung* $|A + B| \leqq |A| + |B|$.

Die Orthogonalinvarianz ist in den Identitäten $|A\,T| = |T\,A| = |A|$ für jede orthogonale Matrix T enthalten.

Die Dreiecksungleichung für zwei Matrizen

$$\sqrt{\sum_{i,k} (a_{ik} + b_{ik})^2} \leqq \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2} + \sqrt{\sum_{i,k} b_{ik}^2}$$

oder quadriert

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, b_{ik} \leqq \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,k} b_{ik}^2}$$

kommt auf die Schwarzsche Ungleichung hinaus. (Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die a_{ik} den b_{ik} mit einem nichtnegativen Faktor proportional sind.)

2. Es sei $b_2(A) = \mathrm{Max}\,\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$, worin die λ_i die Eigenwerte von A bedeuten. $b_2(A)$ ist orthogonal-invariant. Zum Beweise der Dreiecksungleichung beachte man nur, daß $b_2(A)$ gleich dem Maximum von $|A(x, x)|$ auf der Einheitskugel $E(x, x) = 1$ ist. Daselbst ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}\,|(A + B)(x, x)| &\leqq \mathrm{Max}\,\{|A(x, x)| + |B(x, x)|\} \\ &\leqq \mathrm{Max}\,|A(x, x)| + \mathrm{Max}\,|B(x, x)|. \end{aligned}$$

3. Man könnte unter $b(A)$ auch eine *Matrix* verstehen. Der oben angegebene Funktionsbegriff für Matrizen legt es nahe, unter $b(A)$ die Matrixfunktion zu verstehen, die aus der skalaren Funktion $b(x) = |x|$ entspringt.

Es sei also A eine reelle symmetrische n-reihige Matrix mit den Eigenwerten λ_i; man verstehe dann unter dem Betrag $b_3(A)$ die Matrix mit den Eigenwerten $|\lambda_i|$ und denselben Eigenvektoren wie A. Man sieht sofort, daß jede von n-ter Stufe monotone Funktion in diesem Sinne von beschränkter Schwankung ist; dann ist nämlich mit $A^{(\nu-1)} \leq A^{(\nu)}$ stets auch $f(A^{(\nu-1)}) \leq f(A^{(\nu)})$ oder $\{f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})\}(x,x) \geqq 0$, es ist $b_3\{f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})\} = f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})$ und man erhält für die Summe (1) unabhängig von der Einteilung $f(\beta E) - f(\alpha E) = (f(\beta) - f(\alpha))E$. Bei Zugrundelegung dieser Betragdefinition gilt aber im allgemeinen für zwei Matrizen nicht die Dreiecksungleichung[3]), so daß man bei Betrachtung von Funktionen, die nicht von n-ter Stufe monoton sind, nicht sagen kann, wie sich $S(3)$ bei Einschaltung neuer Matrizen in (1) ändert.

Daß auch diese Betragdefinition zur selben Funktionenklasse führt, läßt sich so beweisen. (1) mit $b(A) = b_3(A)$ wird vollständig zum Ausdruck gebracht durch

$$\sum_{\nu=1}^{p} b_3(\Delta_\nu f)(x,x) < K, \quad (\Delta_\nu f = f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})) \text{ auf } \sum_{1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Danach ist insbesondere in Richtung der x_i-Achse

$$\sum_{\nu=1}^{p} \{b_3(\Delta_\nu f)\}_{ii} < K$$

folglich

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \{b_3(\Delta_\nu f)\}_{ii} < K \cdot n.$$

Nun ist aber die Spur $\sum_{i=1}^{n} \{b_3(\Delta_\nu f)\}_{ii}$ gleich der Summe der Eigenwerte der Matrix $b_3(\Delta_\nu f)$. Obige Ungleichung bleibt also umsomehr richtig, wenn man nur den jeweils größten Eigenwert beibehält

$$\sum_{\nu=1}^{p} b_2(\Delta_\nu f) < K \cdot n,$$

d. h. (1) ist für $b_2(A)$ mit der Konstanten $K \cdot n$ erfüllt.

Die Umkehrung folgt einfach auf Grund der Bemerkung, daß für jede Matrix A stets $b_3(A) \leq b_2(A) \cdot E$ ist. Das gibt

$$\sum_{\nu=1}^{p} b_3(\Delta_\nu f) \leq E \cdot \sum_{\nu=1}^{p} b_2(\Delta_\nu f).$$

---

[3]) Als Beispiel für die Ungültigkeit der Dreiecksungleichung nehme man etwa die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2.

Zurückführung der in § 1 eingeführten beschränkten Schwankung n-ter Stufe auf die gewöhnliche.

Wir beweisen jetzt, daß für jede Funktion $f(x)$, für die

$$\sum_{\nu=1}^{p} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| < k \tag{3}$$

für jede Zerlegung $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = \beta$ erfüllt ist, auch

$$S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} b\{f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)})\} < K \cdot b(E) \tag{1}$$

gilt für jede Teilung

$$\mathfrak{Z}: \alpha E = A^{(0)} \leq A^{(1)} \leq \ldots \leq A^{(p)} = \beta E \tag{2}$$

[4])

und ein passend gewähltes K, wenn der Betrag $b(A)$ auf eine der in § 1 angegebenen Arten erklärt wird.

Es genügt, dies für ein spezielles $b(A)$ zu beweisen und wir wählen als solches $b_1(A) = \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}^2}$, wofür wir jetzt einfach $|A|$ schreiben. Daß umgekehrt aus der beschränkten Schwankung n-ter Stufe die Beschränktheit der gewöhnlichen Schwankung folgt, ergibt sich sofort, wenn man nur Vielfache der Einheitsmatrix einschaltet.

Zunächst einige Vorbereitungen zum Beweise! Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sich die zu zwei aufeinanderfolgenden Matrizen $A^{(\nu-1)}, A^{(\nu)}$ in (2) gehörigen quadratischen Formen nur um das Quadrat einer einzigen Linearform unterscheiden. Denn bestünde die Differenzform etwa aus m $(1 \leqq m \leqq n)$ linear unabhängigen Quadraten $A^{(\nu)}(x,x) - A^{(\nu-1)}(x,x) = \sum_{\mu=1}^{m} (\alpha_{\mu 1}^{(\nu)} x_1 + \ldots + \alpha_{\mu n}^{\nu} x_n)^2$, so könnte man dies beispielsweise durch Einschalten von $A^{(\nu-1)} + (\alpha_{1i}^{(\nu)} \alpha_{1k}^{(\nu)})$, $A^{(\nu-1)} + (\alpha_{1i}^{(\nu)} \alpha_{1k}^{(\nu)}) + (\alpha_{2i}^{(\nu)} \alpha_{2k}^{(\nu)}), \ldots$ zwischen $A^{(\nu-1)}$ und $A^{(\nu)}$ erreichen. Da sich hierbei $S(\mathfrak{Z})$ infolge der Gültigkeit der Dreiecksungleichung höchstens vergrößern kann, genügt es, die Beschränktheit für solche ausgezeichnete Teilungen nachzuweisen.

Wir fassen jetzt eine beliebige, aber im folgenden festzuhaltende Teilung (2) ins Auge. Dann beachte man, daß bei der Bildung von $S(\mathfrak{Z})$ in (1) nur die Funktionswerte an denjenigen Stellen — sie seien etwa $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_q = \beta$ — eingehen, die Eigenwerte einer der Matrizen $A^{(\nu)}$ sind. Man kann daher, ohne $S(\mathfrak{Z})$ zu ändern, $f(x)$ gegen

---

[4]) Der folgende Beweis macht von der Voraussetzung, daß die „Enden" $A^{(0)}, A^{(p)}$ gerade Vielfache der Einheitsmatrix sind, nirgends Gebrauch, es müssen nur sämtliche Eigenwerte von $A^{(0)}, A^{(p)}$ dem Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ angehören.

irgendeine Interpolationsfunktion $P(x)$ austauschen, für die $P(\xi_\nu) = f(\xi_\nu)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q)$ ist. Im folgenden wollen wir unter $P(x)$ die die Punkte $(\xi_\nu, f(\xi_\nu))$ verbindende, abteilungsweise lineare Funktion verstehen. Es ist also

$$S_f(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} |f(A^{(\nu)}) - f(A^{(\nu-1)}| = \sum_{\nu=1}^{p} |P(A^{(\nu)}) - P(A^{(\nu-1)})| = S_P(\mathfrak{Z}).$$

Der nächste Schritt bestehe in folgendem: die Eigenwerte der $A^{(\nu)}$ seien der Größe nach geordnet $\lambda_1^{(\nu)} \leqq \lambda_2^{(\nu)} \leqq \ldots \leqq \lambda_n^{(\nu)}$. Aus der Voraussetzung über die Differenzform $A^{(\nu)}(x, x) - A^{(\nu-1)}(x, x)$ folgt dann bekanntlich für deren Anordnung

$$(4) \qquad \lambda_1^{(\nu-1)} \leqq \lambda_1^{(\nu)} \leqq \lambda_2^{(\nu-1)} \leqq \lambda_2^{(\nu)} \leqq \ldots \leqq \lambda_n^{(\nu-1)} \leqq \lambda_n^{(\nu)}.$$

Wir ersetzen jetzt (um Grenzbetrachtungen zu vermeiden) die Matrizen $A^{(\nu)}$ aus (2) durch benachbarte $\bar{A}^{(\nu)}$ mit den Eigenwerten $\bar{\lambda}_i^{(\nu)}$, so daß in der neuen Reihe

$$(2') \qquad \bar{\mathfrak{Z}}: \bar{A}^{(0)} \leq \bar{A}^{(1)} \leq \ldots \leq \bar{A}^{(p)}$$

für die Eigenwerte zweier aufeinanderfolgender stets

$$(4') \qquad \bar{\lambda}_1^{(\nu-1)} < \bar{\lambda}_1^{(\nu)} < \bar{\lambda}_2^{(\nu-1)} < \bar{\lambda}_2^{(\nu)} < \ldots \bar{\lambda}_n^{(\nu-1)} < \bar{\lambda}_n^{(\nu)}$$

gilt. (Insbesondere müssen daher wenigstens je $n - 1$ Matrizen am Anfang und am Ende der Reihe (2) abgeändert werden.) Dabei soll auch für die geänderte Reihe (2') kein Eigenwert aus dem Interwall $\langle \alpha, \beta \rangle$ herausfallen und es sollen sich auch die zu $\bar{A}^{(\nu-1)}$ und $\bar{A}^{(\nu)}$ gehörigen quadratischen Formen wieder nur um das Quadrat einer Linearform unterscheiden. Man überlegt sich leicht, daß sich dies durch eine beliebig kleine Änderung der Komponenten von $A^{(\nu)}$ stets erreichen läßt. (Die vorher konstruierte Funktion $P(x)$ soll aber von dieser Änderung nicht mehr betroffen werden. Es werden daher jetzt die Knickstellen ξ_ν von $P(x)$ nicht mehr genau mit den Eigenwerten $\bar{\lambda}_i^{(\nu)}$ übereinstimmen.)

Wegen der Stetigkeit von $P(x)$ und der Betragdefinition läßt sich dann auch $|S_P(\mathfrak{Z}) - S(\bar{\mathfrak{Z}})| = |S_f(\mathfrak{Z}) - S_P(\bar{\mathfrak{Z}})|$ unter jede beliebig vorgegebene Schranke herunterdrücken, wofern nur alle $|\bar{A}^{(\nu)} - A^{(\nu)}|$ hinreichend klein gemacht werden. Damit gilt dann jede für $S_P(\bar{\mathfrak{Z}})$ gewonnene Schranke auch noch für $S_f(\mathfrak{Z})$.

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$L^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1^{(\nu)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2^{(\nu)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{\lambda}_n^{(\nu)} \end{pmatrix} (\bar{\lambda}_1^{(\nu)} < \bar{\lambda}_2^{(\nu)} < \ldots < \bar{\lambda}_n^{(\nu)}),$$

so läßt sich $\overline{A}^{(\nu)}$ mit Hilfe einer orthogonalen Matrix $\Theta^{(\nu)}$ in der Form $\Theta^{(\nu)'} L^{(\nu)} \Theta^{(\nu)}$ darstellen und man erhält unter Anwendung der Bemerkung 1 auf S. 355

$$S_P(\overline{3}) = \sum_{\nu=1}^{p} |P(\overline{A}^{(\nu)}) - P(\overline{A}^{(\nu-1)})|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} |\Theta^{(\nu)'} P(L^{(\nu)}) \Theta^{(\nu)} - \Theta^{(\nu-1)'} P(L^{(\nu-1)}) \Theta^{(\nu-1)}|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} |P(L^{(\nu)}) \Theta^{(\nu)} \Theta^{(\nu-1)'} - \Theta^{(\nu)} \Theta^{(\nu-1)'} P(L^{(\nu-1)})|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} |P(L^{(\nu)}) T^{(\nu)} - T^{(\nu)} P(L^{(\nu-1)})|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} |(P(\bar{\lambda}_i^{(\nu)}) - P(\bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})) \tau_{ik}^{(\nu)}|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |(P(\bar{\lambda}_i^{(\nu)}) - P(\bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})) \tau_{ik}^{(\nu)}|^2},$$

wobei $T^{(\nu)} = (\tau_{ik}^{(\nu)}) = \Theta^{(\nu)} \Theta^{(\nu-1)'}$ diejenige orthogonale Matrix ist, die die Transformation zwischen den Hauptachsensystemen von $\overline{A}^{(\nu-1)}$ und $\overline{A}^{(\nu)}$ vermittelt. Infolge unserer Voraussetzung über die Differenz $\overline{A}^{(\nu)} - \overline{A}^{(\nu-1)}$ und die Anordnung (4′) der Eigenwerte ist nun die Transformationsmatrix $T^{(\nu)}$ durch dieselben bis auf Vorzeichenänderungen der Zeilen und Spalten festgelegt[5]). Die Quadrate der $\tau_{ik}^{(\nu)}$ sind eindeutig bestimmt:

$$(5) \qquad (\tau_{ik}^{(\nu)})^2 = -\frac{1}{(\bar{\lambda}_i^{(\nu)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})^2} \frac{\prod_{j=1}^{n} (\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}) (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})}{\prod_{j \neq i} (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}) \prod_{j \neq k} (\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})},$$

insbesondere ist also

$$(5') \qquad (\tau_{ii}^{(\nu)})^2 = \prod_{j \neq i} \frac{(\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}) (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu-1)})}{(\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu-1)}) (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)})}.$$

Damit ist

$$(6) \qquad S_P(\overline{3})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{P(\bar{\lambda}_i^{(\nu)}) - P(\bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})}{\bar{\lambda}_i^{(\nu)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)}} \right)^2 \cdot \left(- \frac{\prod_{j} (\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}) \prod_{j} (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})}{\prod_{j}' (\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}) \prod_{j}' (\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)})} \right)}.$$

Wir schätzen jetzt $S_P(\overline{3})$ durch ein Integral ab. Dazu verbinden wir je zwei aufeinanderfolgende Punkte $\overline{A}^{(\nu-1)}$, $\overline{A}^{(\nu)}$ im Matrixraum durch die Strecke $\overline{A}^{(\nu-1)} + \tau(\overline{A}^{(\nu)} - \overline{A}^{(\nu-1)})$, $0 \leqq \tau \leqq 1$. Dann unterscheiden

[5]) Vgl. die in [1]) zit. Arbeit, S. 181.

sich zwei Matrizen auf derselben $\bar{A}^{(\nu-1)} + \tau_1 (\bar{A}^{(\nu)} - \bar{A}^{(\nu-1)})$, $\bar{A}^{(\nu-1)} + \tau_2 \cdot (\bar{A}^{(\nu)} - \bar{A}^{(\nu-1)})$ wieder um das Quadrat einer Linearform (eben um $(\tau_2 - \tau_1)(\bar{A}^{(\nu)} - \bar{A}^{(\nu-1)})$). Den ganzen so entstehenden Streckenzug $\mathfrak{C}$ im Matrixraum denke man sich dann in Parameterdarstellung $X = X(t)$ gegeben (es sei $X(t_\nu) = \bar{A}^{(\nu)}$), wobei man als Parameter etwa die Bogenlänge $\int_{\bar{A}^{(0)}}^{X} \sqrt{\sum d\, a_{ik}^2}$ nehmen kann. Damit werden auch die Eigenwerte λ_i von $X(t)$ gewisse monoton nicht abnehmende Funktionen $\lambda_i(t)$ und für $i < k$ bleibt immer $\lambda_i(t) < \lambda_k(t)$, genauer $\lambda_k(t) - \lambda_i(t) \geqq \mu$, wenn μ die kleinste aller Differenzen $\lambda_{j+1}^{(\nu-1)} - \lambda_j^{(\nu)}$ bedeutet. Beide Aussagen folgen aus der Bemerkung, daß zu der größeren Matrix (im Sinne des $\leq$-Zeichens) die nicht kleineren Eigenwerte gehören. Außerdem sind die Funktionen $\lambda_i(t)$ auf jeder Teilstrecke von $\mathfrak{C}$ als Wurzeln der algebraischen Gleichung $\| \bar{A}^{(\nu-1)} + t(\bar{A}^{(\nu)} - \bar{A}^{(\nu-1)}) - \lambda E \| = 0$ wegen deren Verschiedenheit nach den Sätzen über implizite Funktionen stetig differenzierbar.

Schaltet man auf $\mathfrak{C}$ neue Matrizen ein, so daß die maximale zu zwei aufeinanderfolgenden gehörende Parameterdifferenz gegen Null geht, so streben in (5), (5′) bzw. (6) alle Quotienten

$$\frac{\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}}{\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_i^{(\nu)}} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{\lambda}_j^{(\nu)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)}}{\bar{\lambda}_j^{(\nu-1)} - \bar{\lambda}_k^{(\nu-1)}}$$

für $i \neq j$, $k \neq j$ gleichmäßig gegen 1 und man erhält für $S_P(\bar{\mathfrak{Z}})$ in der Grenze die folgende Integralabschätzung

$$(7) \qquad S_P(\bar{\mathfrak{Z}}) \leqq \int_{t_0}^{t_p} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P'^2(\lambda_i)\, d\lambda_i^2 + \sum_{i \neq k} \left\{ \frac{P(\lambda_i) - P(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right\}^2 d\lambda_i\, d\lambda_k}$$

$\Big(P'(\lambda_i)$ ist abteilungsweise konstant, die übrigen Koeffizienten $\left\{ \frac{P(\lambda_i) - P(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right\}^2$ der quadratischen Differentialform in (7) sind stetig$\Big)$.

Die Beschränktheit von $S_p(\bar{\mathfrak{Z}})$ ist bewiesen, sobald es gelingt, für das Integral rechts eine von der Wahl der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ unabhängige Schranke anzugeben. Dazu zerspalten wir zunächst folgendermaßen

$$S_P(\bar{\mathfrak{Z}}) \leqq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_p} |P'(\lambda_i)|\, d\lambda_i + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n} \int_{t_0}^{t_p} \left| \frac{P(\lambda_i) - P(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i\, d\lambda_k}.$$

Hier ist nach Definition der Funktion $P(x)$

$$\int_{t_0}^{t_p} |P'(\lambda_i)|\, d\lambda_i = \sum_{\nu=1}^{p} |f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})|.$$

Es ist also

$$S(\overline{3}) < n \cdot k + \sum_{i \neq k} S_{ik} \tag{8}$$

mit

$$S_{ik} = \int_{t_0}^{t_p} \left| \frac{P(\lambda_i) - P(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i \, d\lambda_k} \qquad (i \neq k). \tag{9}$$

Bleibt somit zu zeigen, daß S_{ik} beschränkt ist. Zu dem Zwecke zerlegen wir $P(x)$ in noch einfachere Funktionen. Ist $P(x)$ eine Summe von Funktionen, $P(x) = \sum_{\nu=1}^{g} P_\nu(x)$ so gilt allgemein

$$S_{ik} = \int_{t_0}^{t_p} \left| \frac{\sum_{\nu=1}^{g} P_\nu(\lambda_i) - \sum_{\nu=1}^{g} P_\nu(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i \, d\lambda_k},$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{g} \int_{t_0}^{t_p} \left| \frac{P_\nu(\lambda_i) - P_\nu(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i \, d\lambda_k}. \tag{10}$$

Die Funktionen $P_\nu(x)$ wollen wir so wählen, daß die ν-te gerade den Anstieg bzw. Abfall im Intervall $(\xi_{\nu-1}, \xi_\nu)$ leistet, vorher verschwindet und nachher auf dem erreichten Wert verharrt, also

$$P_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \leqq x \leqq \xi_{\nu-1}, \\ \dfrac{f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})}{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}} (x - \xi_{\nu-1}) & \text{für } \xi_{\nu-1} \leqq x \leqq \xi_\nu, \\ f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1}) & \text{für } \xi_\nu \leqq x \leqq \beta. \end{cases}$$

Offenbar ist $\sum_{\nu=1}^{g} P_\nu(x) = P(x)$. Für die Funktion $P_\nu(x)$ läßt sich nun das Integral

$$J = \int_{\mathfrak{C}_{ik}} \left| \frac{P_\nu(\lambda_i) - P_\nu(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i \, d\lambda_k} \tag{11}$$

leicht abschätzen. Sei etwa $i < k$, dann ist der Integrationsweg $\mathfrak{C}_{ik}$ eine stückweise glatte Kurve in der λ_i, λ_k-Ebene mit $\dot{\lambda}_i(t) \geqq 0$, $\dot{\lambda}_k(t) \geqq 0$, die ganz in dem Dreieck verläuft, das von der Winkelhalbierenden $\lambda_i = \lambda_k$ und den beiden Geraden $\lambda_i = \alpha$ und $\lambda_k = \beta$ begrenzt wird. Durch die Achsenparallelen

$$\lambda_i = \xi_{\nu-1}, \ \lambda_i = \xi_\nu, \ \lambda_k = \xi_{\nu-1}, \ \lambda_k = \xi_\nu$$

wird dasselbe in sechs Teilgebiete zerlegt, die in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise bezeichnet seien. Wir rechnen das Integral (11) für die einzelnen Teilgebiete aus. Zur Abkürzung sei

$$P_\nu(\xi_\nu) - P_\nu(\xi_{\nu-1}) = f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1}) = h,$$

gesetzt. In I und V ist $J = 0$, da beidemal $P(\lambda_i) - P(\lambda_k) = 0$ ist. In II, III, IV ist

$$J \leqq |h_\nu| \int \frac{\sqrt{d\lambda_i\, d\lambda_k}}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

Nun sei vorab als schon bewiesen angenommen — der etwas längere Beweis wird nachzutragen sein — daß das Integral $\int \frac{\sqrt{dx\, dy}}{y-x}$ erstreckt über eine stückweise glatte Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit $\dot{x}(t) \geqq 0$, $\dot{y}(t) \geqq 0$ zwischen den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 < x_2 \leqq y_1 < y_2$ (die also innerhalb oder am Rande in Fig. 2 gezeichneten Winkelraumes liegen)

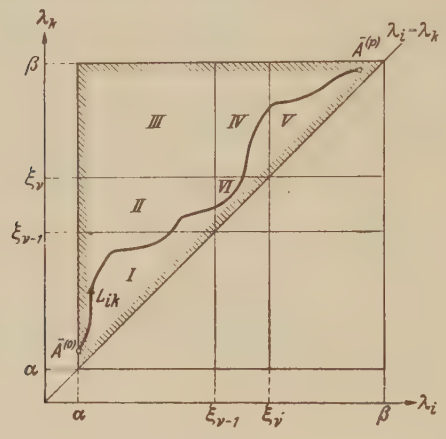


Fig. 1.

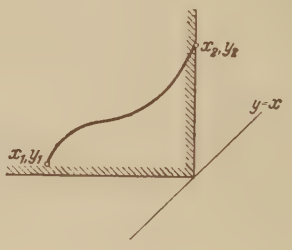


Fig. 2.

$\leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Dann ist in II, III, IV: $J \leqq \frac{\pi}{2} |h_\nu|$. In VI endlich ist

$$J = \frac{|h_\nu|}{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}} \int \sqrt{d\lambda_i\, d\lambda_k} \leqq \frac{|h_\nu|}{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}} \int \frac{d\lambda_i + d\lambda_k}{2} \leqq |h_\nu| \leqq \frac{\pi}{2} |h_\nu|.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß der Integrationsweg wegen $d\lambda_i \geqq 0$, $d\lambda_k \geqq 0$ in höchstens drei der Gebiete II, III, IV, VI eindringen kann, so daß für (11) schließlich folgt

$$J = \int_{\mathfrak{C}_{ik}} \left| \frac{P_\nu(\lambda_i) - P_\nu(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right| \sqrt{d\lambda_i\, d\lambda_k} \leqq \frac{3\pi}{2} |h_\nu|.$$

Weiter ist nach (10)

$$S_{ik} \leqq \frac{3\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{g} |h_\nu| = \frac{3\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{g} |f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})| < \frac{3\pi}{2} k$$

und dies gibt endlich in (8) eingesetzt

$$S_P(\bar{3}) < n \cdot k + n(n-1) \frac{3\pi}{2} k < \frac{3\pi}{2} n^2 k.$$

Damit ist die gewünschte Schranke[6]) gewonnen; sie ist, wie zu erwarten, auch von der Intervallänge unabhängig.

Wir schulden noch den Beweis folgender Behauptung: *Sind* $P(x_1\, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ *zwei Punkte, deren Koordinaten den Ungleichungen* $x_1 < x_2 \leqq y_1 < y_2$ *genügen, so ist längs jeder stückweise glatten Kurve* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *für die* $\dot{x}(t) \geqq 0$, $\dot{y}(t) \geqq 0$ *ist*[7]),

$$J = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx\, dy}}{y - x} \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Führt man die Winkelhalbierenden als neue Koordinatenachsen ein:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + x), \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta),$$
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta),$$

so wird

$$J = \tfrac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{d\xi^2 - d\eta^2}}{\eta}.$$

Die Bedingungen $dx \geqq 0$, $dy \geqq 0$ gehen über in $|d\eta| \leqq d\xi$, so daß sich η als eindeutige Funktion $\eta = \eta(\xi)$ darstellen läßt. Die Differentialgleichung der Extremalen des zum Integral (12) gehörigen Variationsproblems nimmt in dem neuen Koordinatensystem die besonders einfache Gestalt an

$$\eta\, \eta'' + \eta'^2 - 1 = 0$$

und gibt integriert

$$\eta^2 - (\xi - \alpha)^2 = \beta,$$

oder im alten System

$$(a - x)(y - a) = \text{konst.}$$

Die Extremalen sind also gleichseitige Hyperbeln mit achsenparallelen Asymptoten und dem Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden $y = x$. Nur für nichtnegative Werte der Konstanten rechts ist $dx \geqq 0$, $dy \geqq 0$, das Geradenpaar $(a - x)(y - a) = 0$ liefert offenbar ein Minimum $J = 0$. Man kann das Integral (12) auffassen als Bogenlänge bei der Metrik $-ds^2 = \frac{dx\, dy}{(y - x)^2}$[8]). Durch je zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, deren Koordinaten den Ungleichungen

$$x_1 < x_2 < y_1 < y_2 \tag{13}$$

[6]) Sie gilt, wie schon gesagt, auch für $S(3)$.

[7]) Parallele Stücke zu beiden Achsen sind zugelassen; längs dieser verschwindet das Integral.

[8]) Durch die imaginäre Transformation $\xi = \omega$, $\eta = i\tau$ erhält man die Maßbestimmung der Poincaréschen Halbebene.

genügen, geht genau eine geodätische Linie

$$(a-x)(y-a)=k^2 \tag{14}$$

hindurch. Wir zeigen, daß diese die *längste* Verbindungslinie der beiden Punkte ist und leiten zu dem Zwecke zunächst eine einfache Formel für die Länge dieser geodätischen Bögen her. Für das Integral (12) längs (14) — es heiße $\widehat{P_1 P_2}$ — findet man leicht

$$\widehat{P_1 P_2}=\int_{P_1}^{P_2}\frac{\sqrt{dx\,dy}}{y-x}=\operatorname{arctg}\frac{x_2-a}{k}-\operatorname{arctg}\frac{x_1-a}{k}=\operatorname{arctg}\frac{k(x_2-x_1)}{k^2+(x_2-a)(x_1-a)}.$$

Die Konstanten k und a gewinnt man aus der Bedingung, daß P_1, P_2 auf (14) liegen. Aus

$$(a-x_1)(y_1-a)=(a-x_2)(y_2-a)=k^2$$

ist

$$a=\frac{x_2 y_2-x_1 y_1}{x_2+y_2-x_1-y_1},$$

$$y_1-a=\frac{y_1 x_2+y_1 y_2-y_1^2-x_2 y_2}{x_2+y_2-x_1-y_1},\qquad a-x_1=\frac{x_2 y_2-x_1 x_2-x_1 y_2+x_1^2}{x_2+y_2-x_1-y_1}.$$

Mit diesen Werten ist

$$\widehat{P_1 P_2}=\operatorname{arctg}\frac{k(x_2-x_1)}{(a-x_1)(y_1-a)+(a-x_1)(a-x_2)}=\operatorname{arctg}\frac{k(x_2-x_1)}{(a-x_1)(y_1-x_2)}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{x_2-x_1}{y_1-x_2}\sqrt{\frac{y_1-a}{a-x_1}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{(y_1-x_2)(y_2-x_1)}},$$

$$\widehat{P_1 P_2}=\operatorname{arctg}\sqrt{-(x_1 y_1 x_2 y_2)}. \tag{15}$$

Da sich die Wertepaare (x_1, y_1), (x_2, y_2) trennen, ist das auftretende Doppelverhältnis negativ. Man sieht: die Distanz zweier Punkte, die sich durch eine Extremale verbinden lassen, ist immer positiv und $< \frac{\pi}{2}$.

Um nun zu beweisen, daß der Hyperbelbogen (14) in unserer Geometrie tatsächlich immer die längste Verbindung zweier Punkte darstellt, betrachten wir ein geodätisches Dreieck mit den Ecken $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$. Es sei etwa $x_1 < x_2 < x_3$, dann ist, da für jedes Punktepaar (13) gilt,

$$x_1 < x_2 < x_3 < y_1 < y_2 < y_3.$$

Es läßt sich nun zeigen, daß für die Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ folgende Ungleichung gilt:

$$\widehat{P_1 P_3} \geqq \widehat{P_1 P_2}+\widehat{P_2 P_3}. \tag{16}$$

Beweis: Die Behauptung lautet ausgeschrieben

$$\operatorname{arctg}\sqrt{-(x_1\,y_1\,x_2\,y_2)} \leqq \operatorname{arctg}\sqrt{-(x_1\,y_1\,x_3\,y_3)} - \operatorname{arctg}\sqrt{-(x_2\,y_2\,x_3\,y_3)}$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-(x_1\,y_1\,x_3\,y_3)} - \sqrt{-(x_2\,y_2\,x_3\,y_3)}}{1+\sqrt{(x_1\,y_1\,x_3\,y_3)\,(x_2\,y_2\,x_3\,y_3)}}.$$

Da beidemal der Hauptwert zu nehmen ist, ist dies gleichbedeutend mit

$$\sqrt{-(x_1\,y_1\,x_2\,y_2)} \leqq \frac{\sqrt{-(x_1\,y_1\,x_3\,y_3)} - \sqrt{-(x_2\,y_2\,x_3\,y_3)}}{1+\sqrt{(x_1\,y_1\,x_3\,y_3)\,(x_2\,y_2\,x_3\,y_3)}}.$$

Die auftretenden Doppelverhältnisse ändern sich nicht, wenn man die x_i, y_i derselben projektiven Transformation unterwirft; dadurch kann man etwa erreichen, daß

$$x_1 = \infty, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad 0 < y_1 < y_2 < y_3$$

wird. Dann ist

$$-(x_1\,y_1\,x_2\,y_2) = \frac{y_2-y_1}{y_1+1}, \qquad -(x_1\,y_1\,x_3\,y_3) = \frac{y_3-y_1}{y_1},$$
$$-(x_2\,y_2\,x_3\,y_3) = \frac{y_3-y_2}{(y_3+1)\,y_2}$$

und die zu beweisende Ungleichung nimmt die Form an

$$\sqrt{\frac{y_2-y_1}{y_1+1}} + \sqrt{\frac{(y_2-y_1)\,(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)}{(y_1+1)\,(y_3+1)\,y_1\,y_2}} \leqq \sqrt{\frac{y_3-y_1}{y_1}} - \sqrt{\frac{y_3-y_2}{(y_3+1)\,y_2}}.$$

Da alle Wurzeln positiv zu nehmen sind und rechts etwas positives steht, kann man quadrieren:

$$2\,\frac{y_2+1}{y_1+1}\sqrt{\frac{(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)}{(y_3+1)\,y_1\,y_2}}$$
$$\leqq \frac{y_3-y_1}{y_1} + \frac{y_3-y_2}{(y_3+1)\,y_2} - \frac{y_2-y_1}{y_1+1} - \frac{(y_2-y_1)\,(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)}{(y_1+1)\,(y_3+1)\,y_1\,y_2}$$

$$2\,(y_2+1)\sqrt{(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)\,(y_3+1)\,y_1\,y_2}$$
$$\leqq (y_3-y_1)\,(y_1+1)\,(y_3+1)\,y_2 + (y_3-y_2)\,(y_1+1)\,y_1$$
$$-(y_2-y_1)\,(y_3+1)\,y_1\,y_2 - (y_2-y_1)\,(y_3-y_1)\,(y_3-y_2).$$

Die rechte Seite ist weiter

$$(y_3-y_1)\,(y_1\,y_2\,y_3 + y_2 + y_1\,y_3 + y_2^2)$$
$$+ y_1\,(y_1\,y_3 + y_3 - y_2 - y_2^2\,y_3 + y_1\,y_2\,y_3 - y_2^2)$$
$$= (y_2+1)\,\{(y_3-y_1)\,(y_1\,y_3+y_2) + y_1\,(y_1\,y_3 - y_2 - y_2\,y_3 + y_3)\}.$$

Nach Streichung des positiven Faktors (y_2+1) beiderseits bleibt daher

$$2\sqrt{(y_3-y_1)\,(y_3-y_2)\,(y_3+1)\,y_1\,y_2}$$
$$\leqq y_1\,y_3^2 + y_2\,y_3 - y_1\,y_2 - y_1\,y_2 - y_1\,y_2\,y_3 + y_1\,y_3$$

oder

$$(17)\quad \sqrt{(y_3 - y_2)(y_3 + 1)\, y_1 y_2 (y_3 - y_1)} \leqq \tfrac{1}{2}\{(y_3 - y_2)(y_3 + 1)\, y_1 + y_2 (y_3 - y_1)\}.$$

In der Tat ist das arithmetische Mittel zweier positiver Zahlen nie kleiner als das geometrische. Das Gleichheitszeichen in (17) gilt dann und nur dann, wenn

$$(y_3 - y_2)(y_3 + 1)\, y_1 = y_2 (y_3 - y_1) \quad \text{oder} \quad y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_2 - y_1 = 0$$

ist. In die Form

$$(y_2 - y_1)(y_1 + 1) = (y_3 - y_1)\, y_1$$

gebracht, besagt dies, daß der Punkt $P_2(-1, y_2)$ auf der durch die beiden anderen Punkte $P_1(\infty, y_1)$ und $P_3(0, y_3)$ bestimmten Hyperbel

$$(y - y_1)(y_1 - x) = (y_3 - y_1)\, y_1$$

liegen muß. Da alle Schritte umkehrbar sind, folgt auch umgekehrt (16) aus (17), so daß (16) damit bewiesen ist.

Ist nun $\mathfrak{C}$ eine beliebige stückweise glatte Kurve zwischen P_1 und P_2, für die $dx \geqq 0$, $dy \geqq 0$ ist, so kann man sie mit beliebiger Genauigkeit durch ein geodätisches Polygon $\mathfrak{P}$ glatt approximieren. Dann läßt sich auch erreichen, daß sich das Integral (12) über $\mathfrak{C}$ beliebig wenig von dem über $\mathfrak{P}$ erstreckten unterscheidet. Letzteres vergrößert man dadurch, daß man schrittweise alle Ecken zwischen P_1 und P_2 abschneidet. Dann bleibt es immer noch $< \frac{\pi}{2}$. Also muß auch das ursprüngliche über $\mathfrak{C}$ genommene Integral $< \frac{\pi}{2}$ gewesen sein.

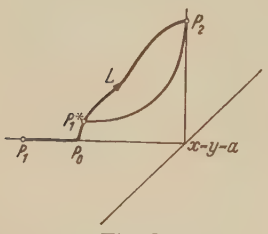


Fig. 3.

Sind endlich P_1, P_2 zwei Punkte auf den Asymptoten von (14), für die also

$$x_1 < x_2 = a = y_1 < y_2$$

ist (vgl. Fig. 3), so geht durch dieselben keine Extremale hindurch, die ein Maximum liefern würde. Trotzdem bleibt (12) gültig. Denn fällt $\mathfrak{C}$ mit dem Aymptotenpaar zusammen, so ist $J = 0$. Andernfalls wird es unter den Punkten von $\mathfrak{C}$, für die $y = a$ ist, einen Punkt P_0 mit größter Abszisse $x_0 < a$ geben und in dessen beliebiger Nähe einen Punkt P_1^* mit $y_1^* > a$. Das über $\mathfrak{C}$ genommene Integral (12) ist sodann kleiner als das längs $\mathfrak{C}$ bis P_1^*, dann aber längs der Extremalen erstreckte. Da man nun den von P_0 bis P_1^* genommenen Anteil unter jede vorgeschriebene Schranke herabdrücken kann — der Nenner in (12) bleibt oberhalb einer festen Konstanten — kann auch das über $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral nicht größer als $\frac{\pi}{2}$ sein. (Übrigens kann man sagen, daß es wirklich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.)

§ 3.

Differentialungleichungen für die Monotonie n-ter Stufe.

Wie eingangs erwähnt, heißt eine in einem Intervall mit den Grenzen $\alpha < \beta$ (es kann offen, halboffen oder geschlossen sein) definierte Funktion $f(x)$ daselbst monoton von n-ter Stufe, wenn für $f(x)$ als Matrixfunktion n-ter Stufe mit $A_n \leq B_n$ stets auch $f(A_n) \leq f(B_n)$ ist[9]); dabei sind A_n, B_n (reelle symmetrische) n-reihige Matrizen, deren Eigenwerte sämtlich dem Definitionsbereich von $f(x)$ angehören.

Nach K. Löwner[10]) wird die Monotonie n-ter Stufe vollständig zum Ausdruck gebracht durch die Ungleichungen

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} [\xi_1 \eta_1] & [\xi_1 \eta_2] & \cdots & [\xi_1 \eta_m] \\ [\xi_2 \eta_1] & [\xi_2 \eta_2] & \cdots & [\xi_2 \eta_m] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\xi_m \eta_1] & [\xi_m \eta_2] & \cdots & [\xi_m \eta_m] \end{vmatrix} \geqq 0,$$

gültig für $m = 1, 2, \ldots, n$ und beliebige Werte $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_m$ aus dem Definitionsintervall in der Anordnung

$$(19) \qquad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots \xi_m < \eta_m \text{ [10])}.$$

Dabei bedeutet $[\xi\,\eta] = \dfrac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}$.

Ist $f(x)$ in einem halb- oder vollabgeschlossenen Intervall definiert, so ist für die Monotonie n-ter Stufe daselbst notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ im Innern desselben monoton von n-ter Stufe ist und daß im ganzen Intervall Monotonie 1-ter Stufe besteht.

Schließlich bringt die Monotonie n-ter Stufe gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften mit sich, nämlich $(2n-3)$-malige stetige Differenzierbarkeit und Beschränktheit des $(2n-2)$-ten Differenzenquotienten in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (α, β). Daraus folgt bekanntlich, daß die $(2n-3)$-te Ableitung (als totalstetige Funktion) mit etwaiger Ausnahme einer Menge vom Maß Null überall in (α, β) eine Ableitung besitzt.

Eben diese Differenzierbarkeitseigenschaften ermöglichen es, die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Monotonie n-ter Stufe in die folgende differentielle Form zu bringen, deren Beweis den Inhalt dieses Paragraphen bilden wird.

---

[9]) Unter Monotonie werde im folgenden immer monotones Wachstum verstanden.

[10]) Vgl. die eingangs zitierte Abhandlung.

Satz. *Für die Monotonie n-ter Stufe einer Funktion $f(x)$ in einem offenen Intervall $\alpha < x < \beta$ sind die beiden folgenden Bedingungen zusammen notwendig und hinreichend:*

I. *$(2n-3)$-malige stetige Differenzierbarkeit von $f(x)$ und Beschränktheit des ersten Differenzenquotienten von $f^{(2n-3)}(x)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (α, β). $f^{(2n-3)}(x)$ ist also totalstetig und es existiert bis auf eine Menge vom Maß Null eine $(2n-2)$-te Ableitung.*

II. *Es ist*

$$M_n(f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{f(x)}{1!} & \frac{f'(x)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!} \\ \frac{f'(x)}{2!} & \frac{f''(x)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!} & \frac{f^{(n)}(x)}{(n+1)!} & \cdots & \frac{f^{(2n-2)}(x)}{(2n-1)!} \end{pmatrix} \tag{20}$$

eine monoton wachsende Matrix, d. h. sind $x_1 < x_2$ zwei Stellen aus (α, β), an denen $f^{(2n-2)}(x)$ einen Sinn hat, so ist

$$M_n(f(x_1)) \leq M_n(f(x_2)). \tag{21}$$

Zusatz. *Aus* (21) *folgt für die Elemente der Hauptdiagonale*

$$f^{(2k)}(x_1) \leq f^{(2k)}(x_2) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Die Ableitungen gerader Ordnung $f(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(2n-2)}(x)$ sind in (α, β) monoton wachsende Funktionen. Als solche hat insbesondere die letzte $f^{(2n-2)}(x)$ an jeder Stelle aus (α, β) einen linksseitigen und einen nicht kleineren rechtsseitigen Grenzwert (der gleich ist der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Ableitung). Aus der Bedingung II zusammen mit der Totalstetigkeit von $f^{(2n-3)}(x)$ folgt also über I hinaus für $f(x)$ die Existenz einer linksseitigen und einer nicht kleineren rechtsseitigen $(2n-2)$-ten Ableitung an jeder Stelle aus (α, β). Die $(2n-2)$-te Ableitung ist bis auf abzählbar viele Sprungstellen überall vorhanden (und hat sogar mit etwaiger Ausnahme einer Menge vom Maß Null selbst eine Ableitung $f^{(2n-1)}(x)$).

Die Ungleichung (21) *gilt also für je zwei beliebige Werte $x_1 < x_2$ aus (α, β), wenn unter $f^{(2n-2)}(x_1)$, $f^{(2n-2)}(x_2)$ jedesmal der linksseitige oder rechtsseitige* Grenzwert verstanden wird. (Die schärfste Aussage erhält man offenbar, wenn man an der Stelle x_1 den rechtsseitigen und an der Stelle x_2 den linksseitigen Grenzwert nimmt.)

Der Beweis des Satzes werde zuerst für $(2n-1)$-mal stetig differenzierbares $f(x)$ geführt. Bis auf Widerruf bedeute also (ohne daß dies immer ausdrücklich gesagt wird) $f(x)$ eine $(2n-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.

Die Determinante in (18) wollen wir so umformen, daß darin höhere Steigungen [11]) auftreten. Dazu dividieren wir durch das Produkt $\prod_{\substack{i,k=1\\ i>k}}^{m} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k)$ und verfahren mit dem Quotienten

$$(18') \qquad A_m = \frac{1}{\prod_{\substack{i,k=1\\ i>k}}^{m} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k)} \begin{vmatrix} [\xi_1\,\eta_1] & [\xi_1\,\eta_2] & \dots & [\xi_1\,\eta_m] \\ [\xi_2\,\eta_1] & [\xi_2\,\eta_2] & \dots & [\xi_2\,\eta_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\xi_m\,\eta_1] & [\xi_m\,\eta_2] & \dots & [\xi_m\,\eta_m] \end{vmatrix}$$

folgendermaßen:

Denken wir uns die $(m-1)$-te Kolonne von der m-ten, die $(m-2)$-te von der $(m-1)$-ten, usw. schließlich die erste von der zweiten subtrahiert und jedesmal den entsprechenden Nenner aus der Reihe $(\eta_m - \eta_{m-1}), \dots, (\eta_2 - \eta_1)$ hineingenommen! Dann dasselbe bis vor zur zweiten Kolonne (d. h. zuletzt werde die zweite von der dritten abgezogen)! Dabei dividiere man jetzt durch $(\eta_m - \eta_{m-2}), \dots, (\eta_3 - \eta_1)$. So fortfahrend wird man beim $(m-1)$-ten Schritt nur mehr die $(m-1)$-te Spalte von der m-ten abzuziehen und durch $\eta_m - \eta_1$ zu dividieren haben. Damit sind auch alle Nenner $\eta_i - \eta_k$ aufgebraucht. Verfährt man dann ebenso mit den Zeilen, so erscheint A_m in der Gestalt

$$(22) \qquad A_m = \begin{vmatrix} [\xi_1\,\eta_1] & [\xi_1\,\eta_1\,\eta_2] & \dots & [\xi_1\,\eta_1 \dots \eta_m] \\ [\xi_1\,\xi_2\,\eta_1] & [\xi_1\,\xi_2\,\eta_1\,\eta_2] & \dots & [\xi_1\,\xi_2\,\eta_1 \dots \eta_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\xi_1 \dots \xi_m\,\eta_1] & [\xi_1 \dots \xi_m\,\eta_1\,\eta_2] & \dots & [\xi_1 \dots \xi_m\,\eta_1 \dots \eta_m] \end{vmatrix} \geqq 0.$$

$$(m = 1, \dots, n)$$

läßt man hier alle Werte ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ in eine Stelle x aus (α, β) zusammenrücken, so erkennt man, daß für eine von n-ter Stufe monotone Funktion $f(x)$ (unter der zusätzlichen Voraussetzung der

[11]) Die Steigungen einer Funktion $f(x)$ sind rekursiv definiert durch $[x_1 \dots x_{k+1}] = \frac{[x_2 \dots x_{k+1}] - [x_1 \dots x_k]}{x_{k+1} - x_1}$; $[x_1 \dots x_k] = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1}^{k}{}' (x_i - x_j)}$ ist symmetrisch in den Argumenten $x_1, \dots, x_k$. Der k-te Differenzenquotient kann definiert werden als $k![x_1 \dots x_{k+1}]$. Ist $f(x)$ in einem Intervall k-mal stetig differenzierbar und gehören $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ diesem Intervall an, so gilt der Mittelwertsatz: $[x_1 \dots x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ mit $x_1 < \xi < x_{k+1}$ und es ist $\lim_{x_i \to x} [x_1 \dots x_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$.

$(2n-1)$-maligen stetigen Differenzierbarkeit) an jeder Stelle x des Definitionsintervalles (α, β) von $f(x)$ die Determinanten

$$(23) \qquad \Delta_m(f(x)) = \begin{vmatrix} \frac{f'(x)}{1!} & \frac{f''(x)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \\ \frac{f''(x)}{2!} & \frac{f'''(x)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f^{(m)}(x)}{m!} & \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!} & \cdots & \frac{f^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!} \end{vmatrix} \geqq 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n)$$

sind. Darüber hinaus soll jetzt gezeigt werden, daß die Matrix

$$(24) \qquad D_n(f(x)) = \begin{Vmatrix} \frac{f'(x)}{1!} & \frac{f''(x)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \\ \frac{f''(x)}{2!} & \frac{f'''(x)}{3!} & \cdots & \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f^{(n)}(x)}{n!} & \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} & \cdots & \frac{f^{(2n-1)}(x)}{(2n-1)!} \end{Vmatrix} \geq 0$$

ist, d. h. daß $D_n(f(x))$ an jeder Stelle x aus (α, β) Matrix einer nicht negativen quadratischen Form ist.

Die Behauptung ist bekanntlich richtig, wenn in (23) für alle $m = 1, 2, \ldots, n$ das Ungleichheitszeichen gilt. Um sie allgemein zu beweisen, nehmen wir eine in (α, β) von n-ter Stufe monotone, $(2n-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ zu Hilfe, für die dort alle $\Delta_m(\varphi(x)) > 0$ $(m = 1, \ldots, n)$ sind. Solche Funktionen gibt es sicher, z. B. leistet, wenn α endlich ist, $\varphi(x) = \sqrt{x-\alpha}$ alles Verlangte. Bei beliebigem $\varepsilon > 0$ ist dann $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ als Summe zweier monotoner Funktionen n-ter Stufe wieder monoton, also nach (23) auch $\Delta_m(f + \varepsilon\varphi) \geqq 0$ für $m = 1, \ldots, n$. Wann kann hier das Gleichheitszeichen eintreten? Sei ξ eine Stelle aus (α, β). Dann ist dort $\Delta_m(f + \varepsilon\varphi)$ als Funktion von ε betrachtet ein Polynom genau m-ten Grades; denn der Koeffizient $\Delta_m(\varphi(\xi))$ von ε^m ist nach Voraussetzung positiv. Dasselbe kann also höchstens m Nullstellen haben. Die kleinste positive sei ε_m und $\eta = \eta(\xi)$ das Minimum aller ε_m $(m = 1, \ldots, n)$. Für $0 < \varepsilon < \eta(\xi)$ sind dann alle $\Delta_m(f + \varepsilon\varphi) > 0$, d. h. $D_n(f + \varepsilon\varphi)$ ist Matrix einer positiv definiten quadratischen Form: $D_n(f + \varepsilon\varphi) \geq 0$. Daher gilt auch noch in der Grenze

$$D_n(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} D_n(f + \varepsilon\varphi) \geq 0.$$

Damit ist gezeigt, daß aus der Monotonie n-ter Stufe (24) folgt. Andererseits ist aber (24) äquivalent der Behauptung II des Satzes (nur diese bedarf natürlich eines Beweises); denn (24) bedeutet ja, daß für beliebige Werte der Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und für jede Stelle x aus (α, β)

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{f^{(i+k-1)}(x)}{(i+k-1)!} u_i u_k \geqq 0 \tag{25}$$

ist. Sind nun $x_1 < x_2$ zwei beliebige Werte aus (α, β), so folgt hieraus durch Integration nach x von x_1 bis x_2

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{f^{i+k-2}(x_2) - f^{i+k-2}(x_1)}{(i+k-1)!} u_i u_k \geqq 0. \tag{26}$$

Dies ist aber in anderer Schreibweise die Aussage II des Satzes. Umgekehrt folgt aus (26) nach Division durch $x_2 - x_1$ und Grenzübergang $x_1 \to x$, $x_2 \to x$ (25), oder was dasselbe ist, (24).

Damit ist jedenfalls die Aussage II des Satzes für die Monotonie n-ter Stufe als notwendig erkannt. Um zu beweisen, daß sie auch hinreichend ist, muß gezeigt werden, daß (24) hinreichend ist.

Werde zunächst wieder angenommen, daß in den aus (24) folgenden Ungleichungen (23) überall das Ungleichheitszeichen steht. Sei dann $\langle \alpha', \beta' \rangle$ ein abgeschlossenes Teilintervall aus (α, β) und $\mu > 0$ das Minimum aller $\Delta_m(f(x))$ $(m = 1, \ldots, n)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$. Nach dem Mittelwertsatz ist der Ausdruck (18′)

$$\mathsf{A}_m = \left| \frac{f^{(i+k-1)}(\xi_{ik}^m)}{(i+k-1)!} \right|_{i,k=1}^{m} \qquad (m = 1, \ldots, n),$$

wobei die Zwischenstellen ξ_{ik}^m jedesmal dem Intervall (ξ_i, η_k) entnommen sind. Wegen der (gleichmäßigen) Stetigkeit aller Ableitungen $f'(x), \ldots, f^{(2n-1)}(x)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ läßt sich nun um jede Stelle x aus $\langle \alpha', \beta' \rangle$ eine (der Größe nach von x unabhängige) Umgebung $\langle x - \delta, x + \delta \rangle$ abgrenzen, so daß, falls die ξ_i, η_i alle derselben entnommen sind,

$$\left| \left| \frac{f^{(i+k-1)}(\xi_{ik}^m)}{(i+k-1)!} \right|_{i,k=1}^{m} - \left| \frac{f^{(i+k-1)}(x)}{(i+k-1)!} \right|_{i,k=1}^{m} \right| < \mu$$

ist, gleichzeitig für alle $m = 1, 2, \ldots, n$. In dieser ist dann $\mathsf{A}_m > 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, (18) erfüllt. Damit ist jedenfalls die Monotonie im Kleinen gesichert. Ist aber eine Funktion in zwei übereinandergreifenden Intervallen monoton von n-ter Stufe, so ist sie es nach einem Satz von Löwner[12]) auch in deren Vereinigung. Um die

[12]) § 5, Satz 6 der zitierten Abhandlung.

Monotonie in ganz $\langle \alpha', \beta' \rangle$ zu erkennen, braucht man daher nur $\langle \alpha', \beta' \rangle$ mit übereinandergreifenden Intervallen der Länge 2δ zu überdecken. Da α' beliebig nahe an α, β' beliebig nahe an β gewählt werden kann, ist dies gleichbedeutend mit der Monotonie in (α, β).

Sei jetzt in (23) auch das Gleichheitszeichen zugelassen. Dann nehme man wieder eine in (α, β) von n-ter Stufe monotone, $(2n-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x)$, für die alle Determinanten $\Delta_m(\varphi) > 0$ sind und bilde $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ $(\varepsilon > 0)$. Für diese Funktion sind dann in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ alle

$$\Delta_m(f+\varepsilon\varphi) = \left| \frac{f^{(i+k-1)}(x)}{(i+k-1)!} + \varepsilon \frac{\varphi^{(i+k-1)}(x)}{(i+k-1)!} \right|_{i,k=1}^{m} > 0, \qquad (m = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

denn die zu $D_n(f+\varepsilon\varphi)$ gehörige quadratische Form ist als Summe einer nicht negativen und einer nach Voraussetzung positiv definiten Form wieder positiv definit, was aber gerade durch (27) zum Ausdruck gebracht wird. Es ist also $f+\varepsilon\varphi$ für jedes positive ε monoton n-ter Stufe. Nun ist, wie man aus den Kriterien (18) leicht erkennt, die Grenzfunktion von monotonen Funktionen n-ter Stufe selbst von n-ter Stufe monoton. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert also die Monotonie n-ter Stufe von f in (α, β).

Nunmehr werde die Voraussetzung der $(2n-1)$-maligen stetigen Differenzierbarkeit fallen gelassen, von der Funktion $f(x)$ also nur die Monotonie n-ter Stufe verlangt. Es wurde schon gesagt, daß daraus I folgt. Den Beweis von II wollen wir auf den Spezialfall eines $(2n-1)$-mal stetig differenzierbaren $f(x)$ zurückführen.

Wir bemerken zunächst, daß $f(x+\tau)$ $(\beta - \alpha > \tau > 0)$ im Intervall $(\alpha, \beta - \tau)$ monoton ist. Da ferner eine Linearkombination monotoner Funktionen mit positiven Koeffizienten und auch die Grenzfunktion solcher wieder monoton von gleicher Stufe sind, ist

$$f_1(\varrho; x) = \int_0^{\varrho} f(x+\tau)\, d\tau \qquad (\beta - \alpha > \varrho > 0)$$

im Intervall $(\alpha, \beta - \varrho)$ monoton von n-ter Stufe und ebenso auch

$$f_2(\varrho, \sigma; x) = \int_0^{\sigma} f_1(\varrho; x+\omega)\, d\omega \qquad (\varrho > 0,\ \beta - \alpha > \varrho + \sigma > 0)$$

mit $\sigma > 0$ im Intervall $(\alpha, \beta - \varrho - \sigma)$. Außerdem ist aber jetzt $f_2(\varrho, \sigma; x)$ in $(\alpha, \beta - \varrho - \sigma)$ $(2n-1)$-mal stetig differenzierbar; denn es ist ja

$$\frac{d}{dx} f_2(\varrho, \sigma; x) = \frac{d}{dx} \int_x^{x+\sigma} f_1(\varrho; \zeta)\, d\zeta = f_1(\varrho; x+\sigma) - f_1(\varrho; x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f_2(\varrho, \sigma; x) = \frac{d}{dx} \int_x^{x+\varrho} f(\zeta + \sigma)\, d\zeta - \frac{d}{dx} \int_x^{x+\varrho} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= f(x + \varrho + \sigma) - f(x + \sigma) - f(x + \varrho) + f(x)$$

und $f(x + \varrho + \sigma)$, $f(x + \sigma)$, $f(x + \varrho)$, $f(x)$ sind in $(\alpha, \beta - \varrho - \sigma)$ weitere $(2n - 3)$-male stetig differenzierbar.

Für $f_2(\varrho, \sigma; x)$ ist also der Satz schon bewiesen und es ist daher

$$D_n(f_2(\varrho, \sigma; x)) = \left(\frac{f_2^{(i+k-1)}(\varrho, \sigma; x)}{(i+k-1)!}\right)_{i,k=1}^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{(i+k-1)!} \frac{d^{i+k-2}}{dx^{i+k-2}} [f_1(\varrho; x + \sigma) - f_1(\varrho; x)]\right)_{i,k=1}^{n}$$

$$= M_n(f_1(\varrho; x + \sigma)) - M_n(f_1(\varrho; x)) \geq 0$$

oder nach Division durch ϱ (> 0)

$$(27') \qquad \left(\frac{1}{(i+k-1)!} \frac{d^{i+k-2}}{dx^{i+k-2}} \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} f(x + \tau)\, d\tau\right)_{i,k=1}^{n}$$

$$\leq \left(\frac{1}{(i+k-1)!} \frac{d^{i+k-2}}{dx^{i+k-2}} \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} f(x + \sigma + \tau)\, d\tau\right)_{i,k=1}^{n}.$$

Seien jetzt $x_1 = x$, $x_2 = x + \sigma$ zwei beliebige Stellen aus (α, β), an denen $f^{(2n-2)}(x)$ existiert, und ϱ so gewählt, daß auch $x_2 + \varrho = x + \varrho + \sigma$ dem Intervall (α, β) angehört. Läßt man $\varrho \to 0$ gehen, so wird

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} f(x_1 + \tau)\, d\tau = f(x_1),$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \left\{\frac{d^\nu}{dx^\nu} \frac{1}{\varrho} \int_0^{\varrho} f(x_1 + \tau)\, d\tau\right\} = \lim_{\varrho \to 0} \left\{\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \frac{f(x_1 + \varrho) - f(x_1)}{\varrho}\right\}.$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \frac{f^{(\nu-1)}(x_1 + \varrho) - f^{(\nu-1)}(x_1)}{\varrho} = f^{(\nu)}(x_1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n - 2).$$

Damit entsteht aber aus (27') gerade die gewünschte Ungleichung

$$(21) \qquad \left(\frac{f^{(i+k-2)}(x_1)}{(i+k-1)!}\right)_{i,k=1}^{n} \leq \left(\frac{f^{(i+k-2)}(x_2)}{(i+k-1)!}\right)_{i,k=1}^{n}.$$

Es ist also die eine Hälfte des Satzes bewiesen, daß nämlich aus der Monotonie n-ter Stufe I und II folgen. Bleibt nur noch die Umkehrung zu beweisen. Sei also I und II vorausgesetzt. Dann schließe man hieraus zunächst auf die Aussagen des Zusatzes. Im besonderen ist

$f^{(2n-2)}(x)$ eine monotone, also im Riemannschen Sinne integrable Funktion. Weiter folgt aus (21) oder

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{f^{(i+k-2)}(x_1)}{(i+k-1)!}\, u_i u_k \leqq \sum_{i,k=1}^{n} \frac{f^{(i+k-2)}(x_2)}{(i+k-1)!}\, u_i u_k$$

durch dieselben Integrationen, wie sie beim Übergang von $f(x)$ zu $f_2(\varrho, \sigma; x)$ ausgeführt wurden,

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{f_2^{(i+k-2)}(\varrho, \sigma; x_1)}{(i+k-1)!}\, u_i u_k \leqq \sum_{i,k=1}^{n} \frac{f_2^{(i+k-2)}(\varrho, \sigma; x_2)}{(i+k-1)!},$$

d. h. II für die Funktion $f_2(\varrho, \sigma; x)$; da $f_2(\varrho, \sigma; x)$ $(2n-1)$-mal stetig differenzierbar ist, folgt hieraus die Monotonie n-ter Stufe zunächst für diese Funktion, hieraus nach Division durch σ und Grenzübergang $\sigma \to 0$ die Monotonie von $f_1(\varrho; x)$ und ebenso nach Division durch ϱ für $\varrho \to 0$ die Monotonie n-ter Stufe von $f(x)$. Damit ist aber der Satz in allen Stücken bewiesen.

§ 4.

Verallgemeinerte Stieltjes-Integrale.

In Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integralbegriffs läßt sich folgender Satz beweisen, der später verwendet werden wird:

Seien die in $\langle \alpha, \beta \rangle$ erklärten Funktionen $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …, $\psi_n(t)$ von beschränkter Schwankung und $f(t)$ daselbst stetig. Sei weiter $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine stetige, positiv-homogene Funktion erster Ordnung, d. h. es werde verlangt: $F(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$, $F(k x_1, \ldots, k x_n) = k F(x_1, \ldots, x_n)$ *für jedes* $k > 0$. *Ist dann an jeder Sprungstelle mindestens einer der Funktionen $\psi_i(t)$ die Bedingung*

$$(28)\quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t) - \psi_i(t-0))^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{n} (\psi_i(t+0) - \psi_i(t))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t+0) - \psi_i(t-0))^2}$$ [13])

erfüllt, dann hat die Summe

$$(29)\quad S(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=1}^{p} f(\tau_\nu) F(\Delta_\nu \psi_1, \ldots, \Delta_\nu \psi_n), \quad \Delta_\nu \psi_i = \psi_i(t_\nu) - \psi_i(t_{\nu-1}),$$

$$\mathfrak{Z}: \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = \beta, \quad t_{\nu-1} \leqq \tau_\nu \leqq t_\nu$$

[13]) Unter $\psi_i(t-0)$, $\psi_i(t+0)$ die stets existierenden Grenzwerte $\lim_{h \to 0} \psi_i(t-h)$ bzw. $\lim_{h \to 0} \psi_i(t+h)$, $h > 0$ verstanden.

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge einen von der speziellen Wahl derselben unabhängigen Grenzwert, den wir mit

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, F(d\,\psi_1(t), \ldots, d\,\psi_n(t)) \tag{30}$$

bezeichnen.

Wir beschäftigen uns vorerst nur mit $f(t) \equiv 1$ und gebrauchen folgende geometrische Sprechweise: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien rechtwinklige kartesische Koordinaten in einem n-dimensionalen euklidischen Raum. Dann ist bekanntlich die durch $x_i = \psi_i(t)$ gegebene Kurve rektifizierbar. (D. h. die Längen der einbeschriebenen Polygonzüge liegen unter einer endlichen Grenze und konvergieren für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge gegen die obere Grenze aller Polygonlängen.) Durch die Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist dann für jedes Punktepaar $P(x_i)$, $Q(y_i)$ ein *nichteuklidischer Abstand* $F(y_i - x_i) \geqq 0$ erklärt, wofür wir auch kürzer $\widehat{PQ}$ schreiben. Daneben werde der euklidische Abstand $E(y_i - x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ mit $\overline{PQ}$ bezeichnet. Es soll gezeigt werden, daß aus der Rektifizierbarkeit im Sinne der Pythagoräischen Metrik E schon die im Sinne der allgemeinen Minkowskischen Metrik F[14]) folgt. Der Gedankengang des Beweises ist folgender:

Sei $\mathfrak{Z}\,(\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = \beta)$ eine Zerlegung des Parameterintervalls $\langle \alpha, \beta \rangle$ mit den zugehörigen Raumpunkten $P_0, P_1, \ldots, P_r$ und $\overline{\mathfrak{Z}}$ aus $\mathfrak{Z}$ durch Weiterteilung entstanden. Und zwar werde $P_\nu P_{\nu+1}$ ersetzt durch den Streckenzug $P_\nu, P_{\nu_1}, \ldots, P_{\nu_k}, P_{\nu+1}$[15]). Läßt man $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots$ durchlaufen, so konvergieren die euklidischen Summen $S_e(\mathfrak{Z}) = \sum_\mu \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta_\mu x_i)^2}$ gegen ihre obere Grenze $J = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d\,\psi_i(t))^2}$; für eine genügend feine Teilung $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_\nu$ ist daher $|S_e(\mathfrak{Z}) - J|$ und umsomehr $|S_e(\mathfrak{Z}) - S_e(\overline{\mathfrak{Z}})|$ klein, da ja $S_e(\mathfrak{Z}) \leqq S_e(\overline{\mathfrak{Z}}) \leqq J$ ist. Die Behauptung: dasselbe gilt für $|S(\mathfrak{Z}) - S(\overline{\mathfrak{Z}})|$. Sei ϑ rein kleine Winkel! Auf allen Teilstrecken von $\overline{\mathfrak{Z}}$, die mit ihrer „Grundstrecke" $P_\nu P_{\nu+1}$ einen Winkel $< \vartheta$ einschließen, ist auch die Änderung der nichteuklidischen Länge bei der Weiterteilung klein wegen der Stetigkeit der Metrik F. Die Gesamtlänge der übrigen (zunächst ihre euklidische und

[14]) Sie ist anisotrop, dagegen homogen in bezug auf die Raumpunkte und auf jeder Geraden gilt die euklidische Streckenrechnung.

[15]) $P_{\nu_{k_\nu}}$, wenn man ganz genau schreiben wollte.

wegen der Beschränktheit von F dann auch ihre nichteuklidische) geht aber mit $|S_e(3) - S_e(\overline{3})|$ zwangsläufig gegen 0. Wir führen genauer aus:

M sei das Maximum von $F(x_1, \ldots, x_n)$ auf der Einheitskugel $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

Weiter gibt es wegen der (gleichmäßigen) Stetigkeit von $F(x_i)$ auf derselben eine Entfernungsschranke — gemessen durch den zugehörigen Zentriwinkel ϑ — derart, daß für je zwei Punkte Q, R auf der Einheitskugel $|F(Q) - F(R)| < \frac{\varepsilon}{4J}$ ist, wenn der Winkel der beiden Radien nach Q und $R < \vartheta$ ist. Außerdem sei ϑ so klein, daß $(1 - \cos\vartheta) < \frac{\varepsilon}{4JM}$ ist. Für alle gegen ihre Grundstrecke „schwach geneigten“ [16]) Teilstrecken $P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}$ von $\overline{3}$ gilt daher

$$\left| \overset{\frown}{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} \frac{\overset{\frown}{P_\nu P_{\nu+1}}}{\overline{P_\nu P_{\nu+1}}} \right| < \frac{\varepsilon}{4J} \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}.$$

Bezeichnet ferner $P^*_{\nu_i}$ die senkrechte Projektion des Punktes P_{ν_i} auf die durch P_ν, $P_{\nu+1}$ gehende Gerade, so ist (der Unterschied der durch Projektion und Drehung in diese Gerade aus $P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}$ entstandenen Strecken)

$$\left| \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} \cdot \frac{\overset{\frown}{P_\nu P_{\nu+1}}}{\overline{P_\nu P_{\nu+1}}} - \overset{\frown}{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} \right| < (1 - \cos\vartheta) M \cdot \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4J} \cdot \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}},$$

also

$$\left| \overset{\frown}{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \overset{\frown}{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2J} \cdot \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}.$$

Kommen wir überein, unter Σ' Summation über alle jene schwach [16]) geneigten Teilstrecken von $\overline{3}$, unter Σ'' Summation über die übrigen zu verstehen, so folgt weiter

$$\left| \sum'_{i,\nu} \overset{\frown}{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \Sigma' \overset{\frown}{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Ist nun $J - \sum_\nu \overline{P_\nu P_{\nu+1}} < \delta$ und damit auch $\sum_{i,\nu} \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \sum_\nu \overline{P_\nu P_{\nu+1}} < \delta$, so geht mit δ auch $\Sigma'' \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}$ gegen 0. (Denn es ist offenbar $\Sigma \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \Sigma \overline{P_\nu P_{\nu+1}} \geqq (1 - \cos\vartheta) \Sigma'' \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}$.) Man wähle jetzt $\delta(\varepsilon)$ insbesondere so klein, daß $\Sigma'' \overline{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} < \frac{\varepsilon}{4M}$ wird. Dann ist um so mehr $\Sigma'' \overline{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} < \frac{\varepsilon}{4M}$, also $\Sigma'' \overset{\frown}{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} < \frac{\varepsilon}{4}$. Daher ist erstens

$$\left| \Sigma' \overset{\frown}{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}} - \Sigma \overset{\frown}{P_\nu P_{\nu+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{32}$$

[16]) D. h. um weniger als ϑ.

da sich die beiden Summen höchstens um die Projektionen $\Sigma'' \widehat{P^*_{\nu_i} P^*_{\nu_{i+1}}}$ unterscheiden, und zweitens

$$|\Sigma \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \Sigma' \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{33}$$

(31), (32), (33) geben aber zusammen

$$|\sum_{i,\nu} \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_{i+1}}} - \sum_{\nu} \widehat{P_\nu P_{\nu+1}}| < \varepsilon.$$

Damit schließt man leicht auf die Konvergenz der Folge $S(\mathfrak{Z}_\nu)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $\mathfrak{Z}_\nu$, $\mathfrak{Z}_\mu$ zwei Zerlegungen unserer Folge. Wir bilden die aus den Teilpunkten beider bestehende $\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu$ und die zugehörigen Summen $S(\mathfrak{Z}_\nu)$, $S(\mathfrak{Z}_\mu)$, $S(\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu)$. Aus

$$S_e(\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu) - S_e(\mathfrak{Z}_\nu) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ S_e(\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu) - S_e(\mathfrak{Z}_\mu) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{34}$$

folgt

$$|S(\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu) - S(\mathfrak{Z}_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |S(\mathfrak{Z}_\nu + \mathfrak{Z}_\mu) - S(\mathfrak{Z}_\mu)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|S(\mathfrak{Z}_\nu) - S(\mathfrak{Z}_\mu)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Wegen der Konvergenz der Folge $S_e(\mathfrak{Z})$ gibt es dann einen Index $N = N(\varepsilon)$, so daß für ν, $\mu > N$ (34), mithin auch (35), d. h. das Cauchysche Konvergenzkriterium für die Folge $S(\mathfrak{Z}_\nu)$ erfüllt ist.

Ist $\mathfrak{Z}'_1, \mathfrak{Z}'_2, \ldots$ eine zweite ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so führt sie zum selben Grenzwert $\lim_{\nu\to\infty} S(\mathfrak{Z}'_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} S(\mathfrak{Z}_\nu)$, denn auch $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}'_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}'_2, \ldots$ ist eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge.

Nunmehr bereitet auch die Übertragung auf ein beliebiges stetiges $f(t) \neq 1$ keine Schwierigkeit. Will man im Bilde bleiben, so wird man sagen, daß jetzt außer der (ortsunabhängigen) Metrik längs der Kurve noch eine variable Eichung gegeben ist. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung und wenn noch τ_ν, τ_{ν_i} Parameterwerte sind, die zu Zwischenpunkten auf $P_{\nu-1} P_\nu$, bzw. $P_{\nu_i - 1} P_{\nu_i}$ gehören, gilt

$$\begin{aligned}
&|\Sigma f(\tau_{\nu_i+1}) \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}} - \Sigma f(\tau_{\nu+1}) \widehat{P_\nu P_{\nu+1}}| \\
\leqq &|\Sigma f(\tau_{\nu_i+1}) \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}} - \Sigma f(\tau_{\nu+1}) \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}}| \\
+ &|\Sigma f(\tau_{\nu+1}) \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}} - \Sigma f(\tau_{\nu+1}) \widehat{P_\nu P_{\nu+1}}|.
\end{aligned}$$

Sei $|f(t)| < K$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$. Man wähle jetzt das Feinheitsmaß δ der Teilung $\mathfrak{Z}$ so klein, daß erstens für jede Unterteilung von $\mathfrak{Z}$

$$\sum_{\nu} |\widehat{P_\nu P_{\nu+1}} - \sum_{i} \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}}| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

wird (daß das möglich ist, geht aus dem Gang des vorigen Beweises unmittelbar hervor), zweitens aber $|f(\tau') - f(\tau'')| < \frac{\varepsilon}{4J}$ ist für $|\tau' - \tau''| < \delta$, was wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(t)$ geht. Dann hat man

$$|\Sigma f(\tau_{\nu_i+1}) \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}} - \Sigma f(\tau_{\nu+1}) \widehat{P_\nu P_{\nu+1}}|$$
$$< \frac{\varepsilon}{4J} \Sigma \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}} + K \cdot \sum_\nu |\widehat{P_\nu P_{\nu+1}} - \Sigma \widehat{P_{\nu_i} P_{\nu_i+1}}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit schließt man aber wörtlich wie vorher ((34), (35)) auf die Konvergenz der allgemeinen Summen (29) für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge.

Die Ausdehnung auf uneigentliche Integrale nimmt man jetzt genau so vor wie beim gewöhnlichen Riemannschen Integralbegriff. Man definiert dann $\int_\alpha^\beta f(t) F(d\psi_i(t))$ als

$$\int_\alpha^\beta f(t) F(d\psi_i(t)) = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \int_{\alpha+\varepsilon_1}^{\beta-\varepsilon_2} f(t) F(d\psi_i(t)),$$

falls dieser Grenzwert existiert. Analoges gilt, wenn eine oder beide Integrationsgrenzen ∞ werden, z. B. ist $\int_\alpha^\infty f(t) F(d\psi_i(t))$ zu definieren als

$$\lim_{A \to \infty} \int_\alpha^A f(t)\, F(d\psi_i(t)),$$

wieder, falls der Grenzwert existiert.

§ 5.

Endlichkeit gewisser Integrale für monotone Funktionen n-ter Stufe und die Differenz solcher.

Wir geben jetzt Integrale an, die für monotone Funktionen n-ter Stufe und die Differenz zweier solcher endlich bleiben und die als Verallgemeinerung des für monotone Funktionen erster Stufe endlichen Integrals $\int dy$ und der für die Differenz zweier solcher ebenfalls endlichen totalen Variation $\lim \sum_\nu |y(x_\nu) - y(x_{\nu-1})|$ $(\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = \beta)$ angesehen werden können.

Sei also $f(x)$ eine im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ (es werde im folgenden immer als abgeschlossen vorausgesetzt) definierte, daselbst von n-ter Stufe monotone Funktion. Dann entnehmen wir § 3, daß $f(x)$ im Innern stetige Ableitungen bis zur $(2n-3)$-ten Ordnung hat und daß $f^{(2n-2)}(x)$ dort

eine monotone Funktion ist. An den Sprungstellen, an denen $f^{(2n-2)}$ zunächst undefiniert bleibt, werde

$$f^{(2n-2)}(x) = \tfrac{1}{2}\{f^{(2n-2)}(x-0) + f^{(2n-2)}(x+0)\}$$

definiert. Die letzte Festsetzung bleibt erhalten, wenn man vermittels einer $(2n-2)$-mal stetig differenzierbaren Funktion $x = x(\xi)$ eine neue unabhängige Veränderliche ξ einführt und sie überträgt sich ferner auch auf die Differenz zweier monotoner Funktionen[17]).

Nun sei $\zeta = \zeta(x)$ eine der bis auf einen positiven konstanten Faktor bestimmten projektiven Transformationen, die das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ in $\langle 0, +\infty \rangle$ überführen. Sind α, β endlich, so ist $\zeta = c\,\frac{x-\alpha}{\beta - x}$ $(c > 0)$, ist etwa $\beta = +\infty$, so ist $\zeta = c\,(x-\alpha)$ $(c > 0)$. Man führe jetzt den bis auf eine additive Konstante bestimmten $\log \zeta = \xi$ als neue unabhängige Variable ein. Dann ist das Differential $d\xi = \frac{(\beta-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)(\beta-x)}$ invariant gegenüber projektiven Transformationen von x, d. h. ist

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

so ist

$$d\xi = \frac{(\beta-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)(\beta-x)} = \frac{(\beta'-\alpha')\,dx'}{(x'-\alpha')(\beta'-x')},$$

wenn α', β' die durch die Transformation aus α, β hervorgehenden Werte sind. Damit sind auch alle Ableitungen einer in $\langle \alpha, \beta \rangle$ gegebenen Funktion $y = f(x) = f\left(\frac{\alpha + \beta e^{\xi}}{1 + e^{\xi}}\right) = f^*(\xi)$ nach ξ: $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{\{k\}}, \ldots$ (soweit dieselben existieren) invariant gegenüber der betrachteten Transformation.

Wir behaupten jetzt: *Ist $f(x)$ eine $\langle \alpha, \beta \rangle$ von n-ter Stufe monotone Funktion oder die Differenz zweier solcher, so sind nach Einführung der unabhängigen Variablen $\xi = \log \zeta$ die gegenüber in $\langle \alpha, \beta \rangle$ polfreien projektiven Transformationen invarianten uneigentlichen Integrale*

$$(36) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |df|, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\dot{f}|, \ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} |df^{\{2n-2\}}|$$

---

[17]) Diese natürlich willkürliche Festsetzung — man könnte $f^{(2n-2)}(x)$ an den Sprungstellen als beliebigen Zwischenwert zwischen rechtsseitigem und linksseitigem Grenzwert definieren — soll es nur ermöglichen, daß sich gewisse im folgenden auftretende Grenzwerte von Summen als Integral schreiben lassen. [Für $n = 1$ ist das für die totale Variation einer Funktion von beschränkter Schwankung nicht möglich, außer man ändert die Funktionswerte an den Sprungstellen passend (etwa im Sinne des Textes) ab.] Lehnt man aber diese nicht im Wesen der Sache, sondern nur in der Ökonomie der Bezeichnung begründete Festsetzung als zu willkürlich ab, so hat man im folgenden überall, wo es sich um Differenzen monotoner Funktionen handelt, statt des Integralzeichens den lim sup der entsprechenden Summen zu schreiben.

endlich. Dies bedeutet offenbar, daß die Funktionen $f, \dot{f}, \ldots, f^{(2n-2)}$ nach passender Festsetzung von $f^{(i)}(-\infty)$, $f^{(i)}(+\infty)$ im abgeschlossenen Intervall $\langle -\infty, +\infty \rangle$ von beschränkter Variation sind.

Sei zunächst $f(x)$ eine monotone Funktion. Dann kann man sich zum Beweise das Definitionsintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $f(x)$ durch eine die Monotonie nicht zerstörende projektive Transformation mit positiver Determinante in $\langle 0, \infty \rangle$ übergeführt denken. x ist also jetzt eine in $0 \leqq x \leqq \infty$ laufende Variable. Es ist dann $d\xi = d \log x = \frac{dx}{x}$. Die Ableitungen $\frac{dy}{d\xi} = \dot{y}, \ldots, \frac{d^k y}{d\xi^k} = y^{(k)}, \ldots$ drücken sich durch die nach x genommenen $y', y'', \ldots, y^{(k)}, \ldots$ (wie man leicht durch vollständige Induktion feststellt) auf folgende Art aus:

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} c_{ik} x^i y^{(i)},$$

wobei c_{ik} positive ganze Zahlen sind. Hieraus erhält man durch Multiplikation mit $d\xi = \frac{dx}{x}$ und Integration, falls die rechts auftretenden Integrale existieren,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |dy^{(k-1)}| \leqq \sum_{i=1}^{k} c_{ik} \int_{0}^{\infty} x^{i-1} |dy^{(i-1)}|.$$

Die Endlichkeit von $\int_{-\infty}^{\infty} |dy^{(k)}|$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ ist somit bewiesen, sobald die Endlichkeit der Stieltjesschen Integrale

$$I_k = \int_{0}^{\infty} x^k |dy^{(k)}| \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-2) \tag{37}$$

erkannt ist.

Die Wahl von $\langle 0, \infty \rangle$ als Definitionsintervall ermöglicht es, unter Heranziehung eines Interpolationssatzes von K. Löwner[18]) einfache Ungleichungen für die Ableitungen einer monotonen Funktion anzugeben. Er lautet in unserem Fall: es gibt genau eine rationale Funktion $\varrho(x)$ höchstens $(n-1)$-ten Grades, die mit der von n-ter Stufe monotonen Funktion $f(x)$ an $(2n-1)$ verschiedenen Stellen aus $(0, \infty)$ übereinstimmt. Sie hat lauter reelle einfache Pole außerhalb $\langle 0, \infty \rangle$ mit negativen Residuen, läßt sich also in der Form darstellen:

$$\varrho(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\alpha_i - x}, \qquad \alpha_i < 0, \qquad a_i \geqq 0.$$

Es ist ferner $\lim_{x \to 0} f(x) \leqq \varrho(0)$, $\varrho(\infty) \leqq \lim_{x \to \infty} f(x)$.

[18]) § 5, Satz 3 der zit. Abhandlung.

Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$ $(\omega_i > 0)$ die Interpolationsstellen, also $f(\omega_i) = \varrho(\omega_i)$ für $i = 1, \ldots, 2n-1$, so erhält man für die Steigungen von $f(x)$ an diesen Stellen

$$(38) \qquad [\omega_1 \ldots \omega_{k+1}] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1) \ldots (\alpha_i - \omega_{k+1})} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n-2).$$

Aus (38) liest man unmittelbar ab, daß die Steigungen ungerader Ordnung bis zur $(2n-3)$-ten einschließlich $\geqq 0$[19]), diejenigen gerader Ordnung bis einschließlich zur $(2n-2)$-ten $\leqq 0$[19]) sind. Diese Aussagen übertragen sich durch Grenzübergang auf die entsprechenden Ableitungen. Sodann lassen sich aus (38) Ungleichungen zwischen den Steigungen verschiedener Ordnung gewinnen. Wegen $\left|\frac{\omega_{k+1}}{\alpha_i - \omega_{k+1}}\right| < 1$ ist

$$|\omega_{k+1}[\omega_1 \ldots \omega_{k+1}]| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1) \ldots (\alpha_i - \omega_k)} \frac{\omega_{k+1}}{\alpha_i - \omega_{k+1}}\right|$$

$$\leqq \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1) \ldots (\alpha_i - \omega_k)}\right|,$$

d. h.

$$\omega_{k+1}|[\omega_1 \ldots \omega_{k+1}]| \leqq |[\omega_1 \ldots \omega_k]|\ ^{19}),$$

und da dies für beliebige Werte $\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}$ gilt, folgt hieraus wieder durch Grenzübergang $\omega_i \to x$ $(x > 0)$

$$(39) \qquad x\left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| \leqq \left|\frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}\right|, \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n-2),$$

wobei die Aussage für $k = 2n-2$ sowohl für die linksseitige als auch für die rechtsseitige Ableitung, also auch für das arithmetische Mittel beider Werte richtig ist.

Sei weiter die Interpolationsfunktion $\varrho_1(x) = \frac{a}{\alpha - x} + c$, $a \geqq 0$, $\alpha < 0$, bestimmt durch $\varrho(\omega_i) = f(\omega_i)$, $i = 1, 2, 3$. Dann wird

$$|\omega_1[\omega_1\, \omega_2]| = \left|\frac{a\,\omega_1}{(\alpha - \omega_1)(\alpha - \omega_2)}\right| \leqq \left|\frac{a}{\alpha - \omega_2}\right| = c - \varrho_1(\omega_2)$$

$$= \varrho_1(\infty) - \varrho_1(\omega_2) \leqq \lim_{x \to \infty} f(x) - \varrho_1(\omega_2)$$

und daraus für $\omega_1 \to x$, $\omega_2 \to x$ $(x > 0)$

$$|x\, y'| \leqq \lim_{\omega \to \infty} f(\omega) - f(x),$$

also $\lim\limits_{x \to \infty} x\, y' = 0$

[19]) Das Gleichheitszeichen gilt offenbar nur für $f(x) = \text{const}$.

Ebenso beweist man $\lim_{x \to 0} x y' = 0$.

Mit Hilfe dieser Ungleichungen beweist man jetzt leicht die Endlichkeit der Integrale (37). Für $n = 1$ und $n > 1$, $k = 0$ ist die Behauptung richtig. Für $n > 1$ und $k > 0$ gilt, falls das letzte Integral endlich ist, die Formel der partiellen Integration und unter Beachtung von (39) ist

$$I_k = \lim_{x \to \infty} (x^k y^{(k)}) - \lim_{x \to 0} (x^k y^{(k)}) - k \int_0^\infty x^{k-1} y^{(k)} \, dx$$

$$= - k \int_0^\infty x^{k-1} y^{(k)} \, dx.$$

Nach (39) ist weiter

$$\left| \int_A^B x^{k-1} y^{(k)} \, dx \right| \leqq k! \left| \int_A^B y' \, dx \right| = k! \; (y(B) - y(A)),$$

also

$$|I_k| \leqq k \cdot k! \; (\lim_{x \to \infty} y(x) - \lim_{x \to 0} y(x)).$$

Damit ist die Endlichkeit der Integrale (37) und (36) für monotone Funktionen bewiesen. Ist $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$ die Differenz zweier solcher, so sind

$$\int_0^\infty x^k \, |d\varphi^{(k)}| \leqq \left| \int_0^\infty x^k \, d f_1^{(k)}(x) \right| + \left| \int_0^\infty x^k \, d f_2^{(k)}(x) \right|$$

$$\int_{-\infty}^\infty |d\varphi^{(k)}| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |d f_1^{(k)}| + \int_{-\infty}^{+\infty} |d f_2^{(k)}|$$

ebenfalls endlich.

Auf die Endlichkeit der Integrale (37) für monotone Funktionen und die Differenz solcher läßt sich die Endlichkeit anderer Integrale zurückführen, die man mit Hilfe der Matrizen $M_k(f(x))$ aus § 3 aufbauen kann und die auch deshalb von besonderem Interesse sind, weil sie invariant sind gegenüber projektiven Transformationen von x.

Es kann nämlich behauptet werden, daß die Integrale

$$(40) \qquad J_k = \int_\alpha^\beta \left| \frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha} \right|^{k-1} \sqrt[k]{\left| \begin{matrix} d f & \frac{d f'}{2!} & \cdots & \frac{d f^{(k-1)}}{k!} \\ \frac{d f'}{2!} & \frac{d f''}{3!} & \cdots & \frac{d f^{(k)}}{(k+1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d f^{(k-1)}}{k!} & \frac{d f^{(k)}}{(k+1)!} & \cdots & \frac{d f^{(2k-2)}}{(2k-1)!} \end{matrix} \right|}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$) *ebenfalls endlich sind, wenn* $f(x)$ *eine in* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *von n-ter Stufe monotone Funktion oder die Differenz zweier solcher ist. Ist* $\beta = \infty$, *so verstehe man unter* $\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}$ *die daraus durch Grenzübergang* $\beta \to \infty$ *entstehende Größe* x. Dabei sind die Integrale aufzufassen als uneigentliche Integrale der in § 4 betrachteten Art; die zunächst wieder über ein inneres Teilintervall $\langle \alpha + \varepsilon_1, \beta - \varepsilon_2 \rangle$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$) zu erstreckenden Integrale können insbesondere als Grenzwert der Summen

$$(41)\quad S_k(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu} \left[\frac{(x_\nu - \alpha)(\beta - x_\nu)}{\beta - \alpha}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\det(M_k(f(x_\nu)) - M_k(f(x_{\nu-1})))|}$$

bei unendlicher Verfeinerung der Teilung gebildet werden. [Man sieht leicht, daß

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}) = \sqrt{\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k & x_{k+1} & \cdots & x_{2k-1} \end{vmatrix}\right|}$$

alle in § 4 gemachten Voraussetzungen erfüllt, ferner ist für die Funktionen $i!\, x_i = f^{(i-1)}(x)$ die Sprungbedingung (28) immer erfüllt, da höchstens eine derselben (nämlich $f^{(2n-2)}(x)$) sprunghaft ist und für diese die zu Beginn des Paragraphen getroffene Festsetzung

$$f^{(2n-2)}(x) = \tfrac{1}{2}\{f^{(2n-2)}(x-0) + f^{(2n-2)}(x+0)\}$$

gilt.] Ist $f(x)$ *monoton* von n-ter Stufe, so sind die in (40) und (41) auftretenden Determinanten, wie in § 3 bewiesen wurde, alle nicht negativ.

Invarianzbeweis: Sei jetzt $x = \frac{au+b}{cu+d}$, $\delta = ad - bc > 0$ eine in $\alpha < x < \beta$ polfreie projektive Transformation, die also das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ überführt in ein Intervall $\langle \alpha', \beta' \rangle$. Eine in $\langle \alpha, \beta \rangle$ gegebene Funktion $y(x)$ geht dann über in eine Funktion $z(u)$, es ist also $y(x) = z(u)$. Es kann behauptet werden, daß das Integral (40) invariant ist gegenüber der betrachteten Transformation, d. h. daß

$$J_k = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\det d\, M_k(y(x))|}$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\det d\, M_k(z(u))|}$$

ist.

Dabei transformiert sich $\Delta_k(y(x))$ (Erklärung von Δ_k auf Seite 370) gemäß

$$\Delta_k(y(x)) = \Delta_k(z(u)) \left[\frac{cu+d}{\delta}\right]^{k^2}. \tag{42}$$ [20]

Berücksichtigt man noch

$$dx = \frac{\delta}{(cu+d)^2}\,du, \quad \frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha} = \frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{(\beta'-\alpha')}\,\frac{\delta}{(cu+d)^2},$$

so ergibt sich

$$\left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\Delta_k(y(x))|}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\det d\,M_k(y(x))|}$$

$$= \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\Delta_k(z(u))|}\;\;du$$

$$= \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{k-1} \sqrt[k]{|\det d\,M_k(z(u))|}.$$

Daraus erkennt man die Invarianz für $(2n-1)$-mal differenzierbares $y(x)$. Um sie allgemein zu beweisen, gehen wir auf die Näherungssummen (41) zurück, wobei wir uns also zunächst auf ein inneres Teilintervall $\langle A, B\rangle$ von $\langle\alpha, \beta\rangle$ beschränken. Eine Abschätzung für die Änderung der Näherungssummen bei der Transformation läßt sich folgendermaßen gewinnen:

Die Ableitungen $z^{(i)}$ von $z(u)$ und $y^{(i)}$ von $y(x)$ hängen vermöge der Transformation $x = \frac{au+b}{cu+d}$ zusammen durch

$$\dot{z} = y'\dot{x}$$
$$\ddot{z} = y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

---

[20]) Man sieht das am einfachsten ein, wenn man in

$$A_k = \frac{1}{\prod_{i>j}(\xi_i-\xi_j)(\eta_i-\eta_j)} \left|\frac{f(\xi_i)-f(\eta_j)}{\xi_i-\eta_j}\right|^k_{i,j=1}$$

$$\xi_i-\eta_j = (\xi_i'-\eta_j')\,\frac{\delta}{(c\xi_i'+d)(c\eta_j'+d)}, \quad f(\xi_i) = f(\xi_i'), \quad f(\eta_j) = f(\eta_j')$$

einsetzt. Man erhält

$$A_k(\xi_i, \eta_i) = A(\xi_i', \eta_i')\,\frac{\prod_1^n [(c\xi_i'+d)(c\eta_i'+d)]^k}{\delta^{k^2}}$$

und daraus folgt durch Grenzübergang (42).

Seien jetzt x, $x+\Delta x$ zwei benachbarte Punkte aus $\langle A, B\rangle$ und u, $u+\Delta u$ die entsprechenden transformierten Werte. Dann gilt für die Änderungen der Ableitungen beim Übergang von x zu $x+\Delta x$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{z} &= \Delta y' \cdot \dot{x} + y' \Delta \dot{x} + \Delta y' \cdot \Delta \dot{x}\\ \Delta \ddot{z} &= \Delta y'' \cdot \dot{x}^2 + \ldots\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Vernachlässigt man hier alle Glieder, deren Produkte mehrere Δ enthalten und ersetzt ferner in den übrigen die Änderungen $\Delta x^{(i)}$ durch die Differentiale $d x^{(i)}$, so erhält man für $\Delta z^{(i)}$ dasselbe Transformationsgesetz wie für die Differentiale $d z^{(i)}$. Die so entstandenen Größen seien mit $\Delta^* z^{(i)}$ bezeichnet. Es ist also

$$\Delta z^{(i)} = \Delta^* z^{(i)} + \varrho_i$$

Die Reste ϱ_i, die sich zusammensetzen aus Gliedern, die Produkte mehrerer Δ enthalten und solchen, die die Differenzen $d x^{(i)} - \Delta x^{(i)}$ enthalten, also ebenfalls klein von 2-ter Ordnung sind, immer multipliziert mit gewissen Größen, die in $\langle A, B\rangle$ unterhalb einer festen Schranke bleiben, lassen sich, wenn man noch berücksichtigt, daß $\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}$ in $\langle A, B\rangle$ stetig ist und oberhalb einer festen Schranke bleibt, sicher folgendermaßen abschätzen:

$$|\varrho_i| < \text{const} \cdot \Delta x \cdot \Big(\sum_{\nu=0}^{2k+2} \Big[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\Big]^{\nu} \frac{\Delta y^{(\nu)}}{(\nu+1)!} \Big).$$

Betrachten wir nun die beiden zu den Teilintervallen $\langle x, x+\Delta x\rangle$, $\langle u, u+\Delta u\rangle$ gehörigen Summanden der (41) entsprechenden Näherungssummen, deren k-te Potenzen also

$$\Big[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\Big]^{k(k-1)} |\det \Delta M_k(y(x))|,$$

$$\Big[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\Big]^{k(k-1)} |\det \Delta M_k(z(u))|$$

sind. Dieselben lassen sich auch in der Form schreiben *):

$$\Big\| \Big[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\Big]^{i+j-2} \frac{\Delta y^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \Big\|_{i,j=1}^{k},$$

$$\Big\| \Big[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\Big]^{i+j-2} \frac{\Delta z^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \Big\|_{i,j=1}^{k}.$$

*) Die folgenden Doppelstriche bedeuten Beträge von Determinanten.

Auf Grund der Bedeutung der $\Delta^* z_\nu$ besteht die Gleichung

$$\left\| \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta y^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k} =$$

$$= \left\| \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta^* z^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}.$$

Es ist daher

$$\left\| \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta z^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}$$

$$= \left\| \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta y^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k} + R,$$

wobei der Rest R aus den Determinantengliedern mit mindestens einem ρ_i als Faktor besteht. Die übrigen Faktoren vergrößere man wieder, indem man sie durch

$$\text{const} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2k-2} \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i} \frac{\Delta y^{(i)}}{(i+1)!} \right)$$

ersetzt. Das gibt dann für den Rest R wieder die Abschätzung

$$|R| \leqq \text{const} \cdot \Delta x \cdot \left(\sum_{i=0}^{2k-2} \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i} \frac{\Delta y^{(i)}}{(i+1)!} \right)^{k}.$$

Geht man zu den k-ten Wurzeln über, so ergibt sich auf Grund der Bemerkung, daß für zwei positive Zahlen $0 \leqq r \leqq s$, $s = r + h$, $\sqrt[k]{s} \leqq \sqrt[k]{r} + \sqrt[k]{h}$ ist:

$$\left| \sqrt[k]{\left\| \left[\frac{(u-\alpha')(\beta'-u)}{\beta'-\alpha'}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta z^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}} \right.$$

$$\left. - \sqrt[k]{\left\| \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i+j-2} \frac{\Delta y^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}} \right| \leqq \sqrt[k]{|R|}$$

$$\leqq \text{const} \cdot \sqrt[k]{\Delta x} \cdot \left| \sum_{i=0}^{2k-2} \left[\frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{\beta-\alpha}\right]^{i} \frac{\Delta y^{(i)}}{(i+1)!} \right|.$$

Sei jetzt $A = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = B$ eine Teilung von $\langle A, B\rangle$ und $A' = u_0 < u_1 < \ldots < u_p = B'$ die durch die Transformation hervorgegangene. Setzt man in der obigen Gleichung $x = x_{\nu-1}$, $x + \Delta x = x_\nu$

($u = u_{\nu-1}$, $u + \Delta u = u_\nu$), so erhält man für die Näherungssummen des über $\langle A, B\rangle$ bzw. $\langle A', B'\rangle$ erstreckten Integrals (40) die Abschätzung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt[k]{\left\| \left[\frac{(x_\nu - \alpha)(\beta - x_\nu)}{\beta - \alpha} \right]^{i+j-2} \frac{\Delta_\nu y^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}} \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=1}^{p} \sqrt[k]{\left\| \left[\frac{(u_\nu - \alpha')(\beta' - u_\nu)}{\beta' - \alpha'} \right]^{i+j-2} \frac{\Delta_\nu z^{(i+j-2)}}{(i+j-1)!} \right\|_{i,j=1}^{k}} \right|$$

$$\leqq \text{const} \cdot \sqrt[k]{\text{Max}\,(x_\nu - x_{\nu-1})} \cdot \sum_{i=0}^{2k-2} \left| \sum_{\nu=1}^{p} \left[\frac{(x_\nu - \alpha)(\beta - x_\nu)}{\beta - \alpha} \right]^i \frac{\Delta_\nu y^{(i)}}{(i+1)!} \right|.$$

Die rechtsstehenden Summen bleiben als Näherungssummen der über $\langle A, B\rangle$ erstreckten Integrale I_k unterhalb einer von der Zerlegung unabhängigen Schranke, es läßt sich daher die rechte Seite durch passende Wahl von $\delta = \text{Max}\,(x_\nu - x_{\nu-1})$ unter jede vorgegebene Schranke herunterdrücken. Damit ist zunächst die Invarianz der Integrale J_k in $\langle A, B\rangle$ erkannt. Damit folgt aber aus der Konvergenz der uneigentlichen Integrale (40) in einem Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ auch die der transformierten Integrale in dem transformierten Intervall $\langle \alpha', \beta'\rangle$.

Um jetzt zu beweisen, daß die Integrale (40) für monotone Funktionen n-ter Stufe endlich sind, dürfen wir uns daher wieder $f(x)$ im Intervall $\langle 0, \infty\rangle$ gegeben denken. Dann ist

$$J_k = \int_0^\infty \sqrt[k]{\begin{vmatrix} df & x\frac{df'}{2!} & \dots & x^{k-1}\frac{df^{(k-1)}}{k!} \\ x\frac{df'}{2!} & x^2\frac{df''}{3!} & \dots & x^k\frac{df^{(k)}}{(k+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{k-1}\frac{df^{(k-1)}}{k!} & x^k\frac{df^{(k)}}{(k+1)!} & \dots & x^{2k-2}\frac{df^{(2k-2)}}{(2k-1)!} \end{vmatrix}}.$$

In der zu diesen Integralen gehörigen (zunächst für ein endliches Teilintervall $\langle \varepsilon, A\rangle$, $\varepsilon > 0$, $A > \varepsilon$ zu bildenden) Näherungssummen ist jedes Glied

$$\sqrt[k]{\begin{vmatrix} \Delta_\nu f & \dots & x_\nu^{k-1}\Delta_\nu\frac{f^{(k-1)}}{k!} \\ \vdots & & \vdots \\ x_\nu^{k-1}\Delta_\nu\frac{f^{(k-1)}}{k!} & \dots & x_\nu^{2k-2}\Delta_\nu\frac{f^{(2k-2)}}{(2k-1)!} \end{vmatrix}}$$

als geometrisches Mittel der n nichtnegativen zur Matrix

$$(43)\qquad \begin{pmatrix} \Delta_\nu f & x_\nu \frac{\Delta_\nu f'}{2!} & \dots & x_\nu^{k-1} \frac{\Delta_\nu f^{(k-1)}}{k!} \\ x_\nu \frac{\Delta_\nu f'}{2!} & x_\nu^2 \frac{\Delta_\nu f''}{3!} & \dots & x_\nu^k \frac{\Delta_\nu f^{(k)}}{(k+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_\nu^{k-1} \frac{\Delta_\nu f^{(k-1)}}{k!} & x_\nu^k \frac{\Delta_\nu f^{(k)}}{(k+1)!} & \dots & x_\nu^{2k-2} \frac{\Delta_\nu f^{(2k-2)}}{(2k-1)!} \end{pmatrix}$$

gehörigen Eigenwerte nicht größer als das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{k}\left\{\Delta_\nu f + x_\nu^2 \frac{\Delta_\nu f''}{3!} + \dots + x^{2k-2} \frac{\Delta_\nu f^{(2k-2)}}{(2k-1)!}\right\}.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich

$$J_k \leqq \frac{1}{k}\,(I_0 + I_2 + \dots + I_{2k-2}) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-2).$$

Ist schließlich $\varphi = f_1 - f_2$ die Differenz zweier von n-ter Stufe monotoner Funktionen, so findet man auf Grund ähnlicher Abschätzungen an der Matrix (43)

$$J_k(f_1 - f_2) \leqq \sum_{\nu=0}^{k} (I_\nu(f_1) + I_\nu(f_2)) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-2).$$

(Eingegangen am 2. Oktober 1936.)

Koppelkurven mit drei Spitzen und spezielle Koppelkurven-Büschel.

Von

Anton E. Mayer in Wien.

Der große, für Anwendungen in der Getriebetechnik nicht unwillkommene, aber naturgemäß schwer zu überblickende Formenreichtum der Koppelkurven läßt es zu, daß einer Koppelkurve gewisse Singularitäten vorgeschrieben werden. So sind seit langem, von näherungsweisen Geradführungen her, Koppelkurven mit sechspunktig berührender Tangente bekannt. Auch andere Singularitäten höherer Art, zum Beispiel Schnabelspitzen, haben interessiert. Dabei geht es fast immer um Differentialgeometrie „im kleinen": um das Verhalten der Kurve in der beliebig kleinen Umgebung eines Punktes.

Deutlich unterschieden davon — Geometrie algebraischer Kurven „im großen" — ist die Untersuchung von Koppelkurven, deren Gesamtverlauf mehrere vorgegebene Singularitäten aufweist. Hierher gehört der vorliegende Beitrag, der sich mit Koppelkurven befaßt, die an Stelle der drei im allgemeinen vorhandenen Knotenpunkte drei Spitzen haben. Diese Kurven besitzen beachtenswerte Eigenschaften, welche, soviel ich sehe, sich bisher gänzlich der Aufmerksamkeit entzogen haben. Daß dreispitzige Koppelkurven existieren, hat allerdings Cayley in seiner grundlegenden Arbeit über Koppelkurven[1]) vermerkt, jedoch sich damit begnügt, eine Bedingung für die Stablängen in den erzeugenden Koppelgetrieben aufzustellen.

Die dreispitzigen Koppelkurven selbst sind im ersten Teil meiner Ausführungen hintangestellt; begonnen wird mit den Koppelgetrieben, die sie erzeugen.

[1]) Hier seien jene Quellen zusammengestellt, aus denen ich für das Folgende den meisten Nutzen gezogen habe: S. Roberts, On three-bar motion in plane space, Proceed. London math. Soc. 7 (1876), S. 14—23; A. Cayley, On three-bar motion, Coll. math. Papers 9, Cambridge 1896, S. 551—580 [= Proceed. London math. Soc. 7 (1876), S. 136—166]; G. T. Bennett, The three-bar sextic curve, Proceed. London math. Soc. (2) 20 (1922), S. 59—84; F. V. Morley, An analytical treatment of the 3-bar curve, ebenda (2) 21 (1923), S. 140—160; A. Haarbleicher, Application des coordonnées isotropes à l'étude de la courbe des trois barres, Journ. École polytechn. (2) 31 (1933), S. 13—40. Bei dieser Gelegenheit verweise ich auch auf folgendes Schriftenverzeichnis: R. Kanayama, Bibliography on the theory of linkages, Tôhoku math. Journ. 37 (1933), S. 294—319.

Für derartige Getriebe erhielt ich ohne rechnerische Hilfsmittel folgendes Kennzeichen (§ 5): Das Gelenkviereck des Getriebes kann im Verlauf seiner Bewegung das Sehnenviereck eines Kreises werden, der die ruhende Viereckseite zum Durchmesser hat; in dieser „Hauptstellung" schneiden die sich drehenden Seiten des Gelenkvierecks einander in dem Punkt der Koppelebene, der die dreispitzige Kurve beschreibt. Von der Figur liest man mühelos Cayleys oben erwähnte Bedingung ab (§ 6). Ein Getriebe besitzt nur eine einzige Hauptstellung, welche also vor den beiden anderen spitzenerzeugenden Stellungen ausgezeichnet sein muß (§ 3). Hierin kann man einen einfachen gruppentheoretischen Sachverhalt erblicken (§ 4). Die in der Hauptstellung erzeugte Spitze der Koppelkurve scheint ebenfalls vor den übrigen beiden Spitzen bevorzugt. Der Unterschied verschwindet aber bei der dreifachen Erzeugung der Koppelkurve (§ 8).

Der Schlüssel zu allen unseren Sätzen über die dreispitzige Koppelkurve liegt in der Erkenntnis, daß Spitzen und Brennpunkte der Kurve die sechs besonderen Punkte auf dem Feuerbachschen Kreis eines Dreiecks sind, das auch mit den erzeugenden Koppelgetrieben in durchsichtiger Weise zusammenhängt (§ 9). Die neun Hauptpunkte des Feuerbachkreises treten zutage, wenn sämtliche Koppelkurven mit einem und demselben Spitzendreieck berücksichtigt werden (§ 10). Es gibt vier solche Kurven, deren zwölf erzeugende Getriebe in einzelnen Stäben übereinstimmen (§ 11).

Für einen wichtigen, seit Cayley bekannten Satz über allgemeine Koppelkurven, die Art der Verteilung von Brennpunkten und Doppelpunkten längs eines Kreises betreffend, ergab sich mir an Hand der Feuerbachschen Figur für den Sonderfall der dreispitzigen Koppelkurven ein ungemein einfacher Beweis (§ 13). Aus der Relation zwischen Doppel- und Brennpunkten folgen weitere Beziehungen (§ 14, § 15), welche ziemlich weit in die Dreiecksgeometrie hineinführen, insbesondere dann, wenn die Doppelpunkte Spitzen sind.

Das meiste Interesse verdient unter den Eigenschaften der dreispitzigen Koppelkurve vielleicht diese: Die Spitzentangenten laufen in einem Punkt zusammen (§ 16), im Winkelgegenpunkt zum Nagelschen Punkt des Spitzendreiecks (§ 17).

In der Theorie der Koppelkurven ist wohl der bedeutendste Fortschritt aus neuerer Zeit die Entdeckung von G. T. Bennett[1]), daß jede Koppelkurve in der isogonalen Verwandtschaft ihres Doppelpunktedreiecks sich selbst entspricht. Für die dreispitzige Koppelkurve würde sich hieraus ergeben, daß sie das Spitzendreieck berührt. Ich habe indessen vorgezogen, die Berührung mit den Seiten des Spitzendreiecks und die Berührungspunkte — dort berühren auch die Ankreise — durch eine kinematische Überlegung unmittelbar festzustellen (§ 19). Dann fällt uns,

umgekehrt, die Isogonalinvarianz der dreispitzigen Koppelkurve gleichsam von selbst zu (§ 20).

Jede dreispitzige Koppelkurve liegt in einem der Quadranten, in die ihr Spitzendreieck die projektive Ebene zerschneidet (§ 21). Die vier Kurven zu einem vorgegebenen Spitzendreieck verteilen sich auf alle vier Quadranten. Drei der Kurven sind zweiteilig. Die „mittlere" ist je nachdem ein- oder zweiteilig oder rational (§ 22). In letzterem Falle weist sie einen außerordentlichen Doppelpunkt auf, den Inkreismittelpunkt (im engeren Sinn) des Spitzendreiecks (§ 23). Rationale dreispitzige Koppelkurven werden mittels sogenannter durchschlagender Gelenkvierecke erzeugt, deren Hauptstellung § 23 konstruieren lehrt. Für die Abmessungen derartiger Gelenkvierecke habe ich ein Nomogramm entworfen (§ 24).

Am Anfang des zweiten Teils steht die schon von Roberts[1]) beiläufig erwähnte Tatsache, daß konfokale Koppelkurven mit übereinstimmenden Doppelpunkten ein Büschel bilden. Dieses „Grundbüschel" dürfte hier in meiner Arbeit die erste eingehendere Betrachtung erfahren, welche auch zu wichtigen Konstruktionen führt.

Im Grundbüschel kommt eine doppelt überdeckte Kurve vor; sie zerfällt in den Kreis, der die Brennpunkte und Doppelpunkte enthält, und in die uneigentliche Gerade (§ 25). Die Existenz dieser Doppelkurve hat zur Folge, daß die quadratischen Involutionen, in denen die Seiten des Doppelpunktedreiecks das Büschel schneiden, symmetrisch sind. Dabei ergibt sich für jede einzelne Koppelkurve, daß sie mit den Seiten ihres Doppelpunktedreiecks Punktepaare gemein hat, deren Symmetralen im Höhenschnittpunkt des Brennpunktedreiecks zusammentreffen. Des weiteren gelingt es, alle Geraden und Kegelschnitte zu ermitteln, die von einem Grundbüschel quadratische Involutionen abschneiden. Hierunter befinden sich die Kreise durch je zwei Doppelpunkte. Sie liefern wieder symmetrische Involutionen (§ 26).

Werden in zwei quadratischen Involutionen diejenigen Punktepaare einander zugeordnet, die auf derselben Kurve des Grundbüschels liegen, so resultiert eine Projektivität zwischen den Involutionen (§ 28). Zur Bestimmung der Projektivität sind drei Punktepaare der einen Involution und die entsprechenden der anderen hinreichend, das heißt der Schnitt beider Involutionsträger mit drei beliebigen Kurven des Grundbüschels. Als eine der drei Kurven kann stets die zerfallende Doppelkurve gewählt werden. Ferner ziehen wir die dreispitzige Kurve heran, falls eine solche im Büschel vorhanden ist. Dann und nur dann enthält das Büschel auch eine aus drei Kreisen bestehende Koppelkurve (§ 27) und die Projektivitäten zwischen den Involutionen auf den Seiten des Doppelpunktedreiecks erweisen sich als kongruente Abbildungen (§ 28).

Die Projektivität zwischen zwei Involutionen beherrschen wir sogar dann, wenn zunächst bloß zwei Paare entsprechender Punktepaare bekannt sind. In diesem Falle hilft nämlich ein Kunstgriff weiter, welcher darauf beruht, daß jede der quadratischen Involutionen für sich allein schon durch zwei Elementenpaare festgelegt ist. Hier bietet sich ein Weg, um die Schnittpunkte einer dreispitzigen Koppelkurve mit einem beliebigen, durch zwei Spitzen gelegten Kreis aufzusuchen, ohne daß man die erzeugenden Koppelgetriebe überhaupt kennen müßte. Dabei bereiten auch konjugiert komplexe Schnittpunkte keine Schwierigkeit. Ich führe die Konstruktion am Beispiel der triangulär-symmetrischen dreispitzigen Koppelkurve vor (§ 29). Diese Kurve liegt in einem speziellen Grundbüschel, in dem ein Minimalgeraden-Sextupel als Büschelkurve auftritt. Das ergibt Vereinfachungen (§ 30).

Minimalgeraden-Sextupel sind ein charakteristischer Bestandteil jener Grundbüschel, die sich aus Koppelkurven zusammensetzen, deren Brennpunkte zugleich Doppelpunkte sind. Auch diese für die Getriebelehre bedeutsamen Kurven[2]) und zugehörige Grenzfälle[3]) sind der in den letzten Paragraphen entwickelten Konstruktionsmethode zugänglich, worauf ich des näheren zurückzukommen hoffe.

Übersicht.

Erster Teil:

Koppelkurven mit drei Spitzen.

Seite

§ 1. Bezeichnungen 393
§ 2. Einleitende Aufgabe 394
§ 3. Die Hauptstellung 396
§ 4. Eine Gruppe 396
§ 5. Kennzeichnung der Hauptstellung 397
§ 6. Eine Beziehung zwischen Koppel, Steg und Armen 398
§ 7. Brennpunkte und Spitzen. Das Hauptspiegelbild 399
§ 8. Dreifache Erzeugung der Koppelkurve 401
§ 9. Feuerbachsche Figur 402
§ 10. Koppelkurven mit demselben Spitzendreieck 403
§ 11. Zwölf Koppelgetriebe 405

---

[2]) H. Alt, Zur Synthese der ebenen Mechanismen, Zeitschr. angew. Math. u. Mechan. 1 (1921), S. 373—398 (bes. S. 377—380).

[3]) H. Alt, Koppelgetriebe als Rastgetriebe, Zeitschr. Ver. dtsch. Ing. 76 (1932), S. 456—462, 533—537; Derselbe, Zur Geometrie der Koppelrastgetriebe, Ing.-Archiv 3 (1932), S. 394—411.

§ 12. Orthologe Dreiecke 406
§ 13. Relationen zwischen Grundkreisbögen 406
§ 14. Winkelgegenpunkte 407
§ 15. Berührende Parabeln. Wallacegeraden 408
§ 16. Die Spitzentangenten 410
§ 17. Das Spitzenziel. Inversion der Koppelkurve 412
§ 18. Isogonalinvariante Gebietseinteilung 413
§ 19. Gegenstellung und Gegenspiegelbild 415
§ 20. Isogonalinvarianz der Koppelkurve 417
§ 21. Beschränkung dreispitziger Koppelkurven auf Gebiete 419
§ 22. Engere Gebietseinschränkungen 421
§ 23. Rationale dreispitzige Koppelkurven 423
§ 24. Ein Nomogramm 426

Zweiter Teil:

Spezielle Koppelkurven-Büschel.

§ 25. Grundbüschel 428
§ 26. Durch Grundbüschel hervorgerufene Involutionen 429
§ 27. Feuerbachbüschel 433
§ 28. Projektivitäten zwischen Involutionen 436
§ 29. Die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve 440
§ 30. Minimalgeraden als Teile von Koppelkurven 443

Sätze über allgemeine Koppelkurven oder Sätze über Büschel, in die nicht notwendigerweise eine dreispitzige Koppelkurve eingebettet ist, enthalten: §§ 13, 14, 15, 20, 21, 25, 26, 27, 30.

Erster Teil:

Koppelkurven mit drei Spitzen.

§ 1.

Bezeichnungen.

An einem *Gelenkviereck* bezeichnen wir mit f_1 die ruhend zu denkende Seite, den sogenannten *Steg*. Die Endpunkte F_2, F_3 des Steges sind die fixierten Drehpunkte der *Arme* m_2 und m_3. Der bewegliche Endpunkt B_2 des Armes m_2 ist mit dem Ende B_3 des Armes m_3 durch die Viereckseite b_1 verbunden, die *Koppel* heißt. (Fig. 1. Wenn in den Figuren Punkte als ruhende oder ortsveränderliche Gelenke gekennzeichnet werden sollen, deuten wir das so an, wie hier bei F_2 bzw. B_2.) Schließlich errichten wir über der Koppel als Basis ein Dreieck mit den Seiten b_2, b_3.

Dieses starre, jedoch in seiner Ebene bewegliche Dreieck ist das *Koppeldreieck*. Seine Eckpunkte und Innenwinkel mögen mit $\{B_i\}$ bzw. $\{\beta_i\}$ bezeichnet werden.

Bei dieser Gelegenheit setzen wir ein für allemal fest, daß i zyklisch gleich 1, 2, 3 sei, wohingegen die Klammer $\{\}$ besagen will, daß man dem Index i sämtliche drei Werte nebeneinander erteile. Die Buchstaben $f_1, m_2, \ldots$ stehen je nachdem für die *Stäbe* (= Strecken) des Getriebes, für deren Längen oder auch für die Verlängerungen der Strecken zu Geraden.

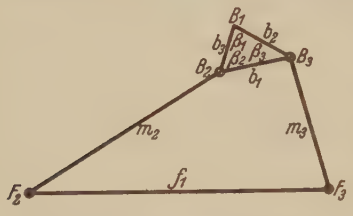


Fig. 1. Koppelgetriebe [4]). Bezeichnungen.

Der Punkt B_1, der *beschreibende Punkt*, erzeugt während der Bewegung des Gelenkvierecks und Koppeldreiecks, welche zusammen man ein *Koppelgetriebe* nennt, eine *Koppelkurve*, für die wir in der Regel Γ schreiben. Wird die Koppelkurve Γ von einem *nicht ausgearteten Koppelgetriebe* erzeugt, d. h. von einem, dessen sämtliche Stablängen endlich und > 0 sind, so sind alle drei Koppelgetriebe, die Γ erzeugen [5]), nicht ausgeartet. Ich betrachte nur derartige Getriebe. Trotzdem kann das Koppeldreieck ausarten, wenn nämlich der beschreibende Punkt B_1 ein von B_2, B_3 verschiedener Punkt der Geraden b_1 wird. In diesem Fall erzeugt B_1 eine sogenannte *Wattsche Kurve*.

§ 2.

Einleitende Aufgabe.

Wir greifen eine Stellung $\mathfrak{S}$ eines Koppelgetriebes heraus und alle von $\mathfrak{S}$ hinreichend wenig verschiedenen Stellungen. Die zugehörigen Lagen von B_1 bilden einen Teilbogen Γ^* der durch B_1 erzeugten Koppelkurve Γ (oder zwei Teilbögen, falls $\mathfrak{S}$ eine Verzweigungslage ist). Soll in der Stellung $\mathfrak{S}$ der beschreibende Punkt sich in einer Spitze S von Γ^* befinden, so ist es notwendig, daß S der *Momentanpol* sei für die Bewegung des Koppelgetriebes von der Stellung $\mathfrak{S}$ aus. Dann schneiden sich die Geraden der Arme m_2, m_3 in S oder, anders gesagt, die Geraden m_2 und b_3, sowie m_3 und b_2 fallen zusammen. Diese Inzidenzen

[4]) Fig. 1 bis 3, 6 bis 10, 12, 17, 21, 22 liegt dieselbe Annahme zugrunde.

[5]) Was die allgemein bekannten Eigenschaften der Koppelkurve, sowie die Grundtatsachen der kinematischen Geometrie anlangt, verweisen wir ein für allemal auf die Lehrbücher [z. B. Reinhold Müller, Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1932].

sind auch hinreichend dafür, daß S eine Spitze von Γ^* sei[6]), wofern Γ nicht eine Wattsche Kurve ist.

Wir versuchen nun, die Getriebeabmessungen so zu wählen, *daß Γ drei reelle Teilbögen $\{\Gamma_i^*\}$ mit je einer von den drei Spitzen $\{S_i\}$ besitzt.* Dabei mag es uns vorderhand nicht kümmern, ob der von Γ_i^* verschiedene Teil der Kurve Γ etwa noch einmal durch S_i hindurchgeht, was insbesondere dann eintreten könnte, wenn zwei von den Punkten $\{S_i\}$ übereinstimmten.

Es sollen also mindestens drei paarweise verschiedene Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ des Koppelgetriebes existieren, in denen die Geraden der Arme und der Seiten des Koppeldreiecks zur Deckung kommen. Um Folgerungen aus dieser Bedingung zu ziehen, wird zweckmäßigerweise die *umgekehrte Bewegung* ins Auge gefaßt. Jetzt (und in §§ 3, 4, 5; auch sonst noch bisweilen) werde das Koppeldreieck als ruhend angesehen und demgemäß im Gelenkviereck die Rollen von Steg und Koppel vertauscht. Das ändert nichts daran, daß in den Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ die Gerade m_2 auf die Gerade b_3 fallen muß und m_3 auf b_2. Nun entferne man den Stab f_1 für einen Augenblick. Dann kann m_2 durch Drehung um den Punkt B_2 auf zweierlei Art zur Inzidenz mit der Geraden b_2 gebracht werden. Hierbei gelangt der Punkt F_2 einmal nach F_2', das andere Mal nach F_2''. Der Mittelpunkt von F_2' und F_2'' ist B_2. Ebenso klappen wir F_3 in zweierlei Weise auf die Gerade b_2 und erhalten derart für F_3 die Lagen F_3' und F_3'', deren Mitte B_3 ist (Fig. 2). Sind etwa F_2' und F_3' gleichzeitige Lagen von F_2 bzw. F_3 bei der umgekehrten Bewegung, so ist die Strecke $F_2'F_3' = f_1$, und umgekehrt. Die Existenz der drei Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ ist demnach gleichbedeutend damit, daß drei von den vier Strecken $F_2'F_3'$, $F_2'F_3''$, $F_2''F_3'$, $F_2''F_3''$ die Länge f_1 haben.

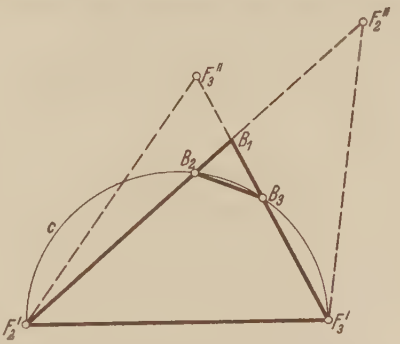


Fig. 2. Spitzenerzeugende Stellungen eines Koppelgetriebes (umgekehrte Bewegung).

Weil alle Stablängen positiv vorausgesetzt wurden, ist $B_1F_2' \neq B_1F_2''$ und $B_1F_3' \neq B_1F_3''$. Folglich haben die Spitzen verschiedene Abstandspaare von F_2, F_3. Mithin sind *die Spitzen $\{S_i\}$ paarweise verschieden.*

[6]) Über mögliche Besonderheiten der Spitze: Reinhold Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschr. Math. u. Phys. 42 (1897), S. 247—271 (bes. S. 269—271); W. Meyer zur Capellen, Der Momentanpol als Burmesterscher Punkt, Monatshefte Math. u. Phys. 41 (1934), S. 285—299.

Es wird sich auch zeigen (§ 20), daß die Punkte $\{S_i\}$ nicht bloß Spitzen auf Teilbögen der Koppelkurve Γ sind, sondern auch auf der ganzen Kurve Γ keine höhere Vielfachheit besitzen.

§ 3.

Die Hauptstellung.

Überzeugen wir uns zunächst davon, daß nicht alle vier Strecken $F_2'F_3'$, ... gleich groß sein können. In diesem Fall wäre nämlich $F_2'F_3'F_2''F_3''$ ein Rhombus. Die Mittelpunkte der Punktepaare F_2', F_2'' und F_3', F_3'' fielen also in die Mitte des Rhombus. Infolgedessen wäre $B_2 = B_3$, das heißt die Koppellänge $b_1 = 0$, was ausgeschlossen wurde. Es gibt *also höchstens drei Getriebestellungen* $\{\mathfrak{S}_i\}$, *für die der beschreibende Punkt* B_1 *in der Spitze eines Teilbogens von* Γ *liegt.* Daß tatsächlich drei solche Stellungen möglich sind, wird § 5 lehren. Wir nehmen dies hier vorweg und folgern aus der Unmöglichkeit einer vierten spitzenerzeugenden Stellung, daß eine der drei Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ ausgezeichnet ist.

Werden die Bezeichnungen so gewählt, daß $F_2''F_3'' \neq f_1$ ist, so sind F_2', F_3' die Enden des Stabes f_1 in einer Getriebestellung, etwa in der Stellung $\mathfrak{S}_1$. Ausgehend von $\mathfrak{S}_1$ erhält man einerseits durch Umwenden (Drehen um 180°) des Armes m_2 eine weitere von den Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$, sagen wir $\mathfrak{S}_2$, andererseits durch Umwendung von m_3 die Stellung $\mathfrak{S}_3$. Denn weder durch Umwenden von m_2, noch durch alleiniges Umwenden von m_3 entsteht die Stellung $\mathfrak{U}$, in der die Enden der Arme in F_2'', F_3'' liegen, und nach Ausscheiden von $\mathfrak{U}$ aus den vier Armstellungen, die für die Erzeugung einer Spitze überhaupt in Betracht kommen, bleiben ja die drei zulässigen Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ übrig.

Geht man hingegen von der Stellung $\mathfrak{S}_2$ aus und wendet auch hier einmal den einen, ein andermal den zweiten Arm um, so entsteht nur in einem der beiden Fälle eine solche Lage der Arme, daß der Stab f_1 sich einbauen läßt. Ebenso verhält sich $\mathfrak{S}_3$. Insofern also unterscheiden sich $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_1$, welche ich die *Hauptstellung* des Koppelgetriebes nenne.

§ 4.

Eine Gruppe.

Der Begriff der Hauptstellung spielt im folgenden eine große Rolle. Deshalb will ich noch einmal darlegen, in welcher Hinsicht die Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ abweicht, indem ich, was vielleicht auch an sich interessant ist, aus dem unterschiedlichen Verhalten der $\{\mathfrak{S}_i\}$ einen gruppentheoretischen Kern herausschäle.

Bezeichnen μ_2 und μ_3 das Umwenden von m_2 bzw. m_3 und wird unter dem Produkt von Umwendungsoperationen ihr Aufeinanderfolgen

verstanden, so erzeugen μ_2 und μ_3 offensichtlich eine Gruppe. Deren Einheitselement $\mu_2^2 = \mu_3^2$ ist das Belassen der Arme in ihrer Lage. (Weil $\mu_2 \mu_3 = \mu_3^{-1} \mu_2$ ist, handelt es sich um die *Vierergruppe*.)

Ausgehend von $\mathfrak{S}_1$ erhält man die „unmögliche Lage" $\mathfrak{U}$ durch Umwenden beider Arme: $\mu_2 \mu_3 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}$. Nehmen wir aber $\mathfrak{S}_2$ als Ausgangslage, üben also auf $\mathfrak{S}_2$ die Gruppenelemente aus, so läuft dies, da $\mathfrak{S}_2 = \mu_2 \mathfrak{S}_1$ ist, darauf hinaus, daß die (rechtsseitig) mit μ_2 multiplizierten Elemente auf $\mathfrak{S}_1$ angewendet werden. Die Multiplikation aller Gruppenelemente mit einem von der Einheit verschiedenen Element ist eine Permutation, die kein Element unverändert läßt. Folglich entsteht $\mathfrak{U}$ nicht durch Umwenden beider Arme aus $\mathfrak{S}_2$, sondern schon durch Umlegen eines Armes. Gleiches gilt für $\mathfrak{S}_3$.

§ 5.

Kennzeichnung der Hauptstellung.

Mit der eingehenden Untersuchung des Koppelgetriebes, das eine dreispitzige Koppelkurve erzeugt, beginnen wir in seiner Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ (Fig. 2). Umwenden des Armes m_2 um den Punkt B_2, wobei das andere Ende dieses Armes von F_2' nach F_2'' gelangt, führt aus der Hauptstellung, wie wir wissen, wieder zu einer für die umgekehrte Bewegung zulässigen Lage $\mathfrak{S}_2$ der Arme, das heißt, es muß die Strecke $F_2' F_3' = F_2'' F_3'$ sein. Mithin liegt F_3' auf der in B_2 errichteten Normalen zu m_2. Analog befindet sich F_2' auf der Geraden $\perp m_3$ durch B_3. Beides ergibt den

Kreislagensatz. *In der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ des Getriebes ist das Gelenkviereck einem Kreis c eingeschrieben, dessen Durchmesser der Steg f_1 ist, während die Geraden m_2 und b_3, m_3 und b_2 zusammenfallen.*

Wir beweisen nun, daß das Auftreten einer Kreislage im wesentlichen auch genügt, um drei Spitzen in der Koppelkurve zustande kommen zu lassen.

Befindet sich nämlich ein Koppelgetriebe in der eben beschriebenen Stellung $\mathfrak{S}_1$, so ist es klar, daß aus $\mathfrak{S}_1$ durch Umwenden je eines Armes wieder zulässige Armstellungen für die umgekehrte Bewegung hervorgehen: Die Existenz einer Kreislage ist auch hinreichend für das Bestehen der drei verschiedenen Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$, die wir in § 2 eingeführt haben. Wenn b_1 in der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ nicht Durchmesser des Kreises c wird, ist das Dreieck $\{B_i\}$ endlich und nicht ausgeartet, die erzeugte Koppelkurve Γ ist keine Wattsche Kurve und demgemäß (§ 2) liegt in jeder Stellung $\mathfrak{S}_i$ der beschreibende Punkt B_1 in der Spitze eines Teilbogens von Γ.

Der Fall, daß b_1 in der Kreislage ein Durchmesser von c ist, kann rasch erledigt werden. Wäre b_1 ein von f_1 verschiedener Durchmesser, so würde $b_2 \parallel b_3$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß alle Stab-

längen endliche positive Zahlen sind. Diese schließt hingegen nicht aus, daß b_1 mit f_1 inzidiert, und zwar so, daß $B_2 = F_3'$, $B_3 = F_2'$ wird. Dann ist das Gelenkviereck ein Rhombus. Nun zerfallen aber alle mittels eines Gelenkrhombus erzeugten Koppelkurven in drei Kreise. Hierüber wird noch zu sprechen sein (§ 27).

Zusammenfassend kann gesagt werden: *Es gibt keine dreispitzige Wattsche Kurve. Damit die durch ein Koppelgetriebe erzeugte Kurve Γ drei reelle Teilbögen mit je einer Spitze aufweise, ist notwendig und hinreichend, daß die Koppel und die Arme kürzer als der Steg seien und daß unter den Stellungen des Getriebes die im Kreislagensatz beschriebene vorkomme.*

Ist in einem Gelenkviereck der Steg f_1 länger als die Koppel b_1 und die Arme m_2, m_3 und liegt das Viereck so, daß b_1 eine Sehne des Kreises c ist, der f_1 zum Durchmesser hat, so muß man nur die Arme zum Schnitt bringen, um die Ecke B_1 eines Koppeldreiecks zu erhalten, das eine dreispitzige Kurve Γ erzeugt. Spiegelt man das Gelenkviereck an f_1, so resultiert eine zweite Stellung, in der b_1 eine Sehne von c ist. Dementsprechend beschreibt auch der zu B_1 bezüglich b_1 symmetrische Punkt eine dreispitzige Koppelkurve[7]). Weitere Punkte mit dieser Eigenschaft gibt es nicht, weil höchstens in zwei Stellungen eines Gelenkvierecks die Koppel eine Sehne des Kreises über dem Steg als Durchmesser ist[8]).

Da ein Koppelgetriebe, wenn es eine dreispitzige Koppelkurve Γ erzeugt, nur eine Hauptstellung besitzt, ist die Spitze S_1, in welcher der beschreibende Punkt in der Hauptstellung liegt, vor den beiden übrigen Spitzen hervorgehoben. Es ist zu vermuten, daß diese Ungleichmäßigkeit verschwinden wird, sobald wir die dreifache Erzeugung von Γ heranziehen werden. Zunächst leiten wir aber eine Relation zwischen den Stablängen eines Gelenkvierecks ab, das zur Erzeugung einer dreispitzigen Koppelkurve dient.

§ 6.

Eine Beziehung zwischen Koppel, Steg und Armen.

Messen wir in der Hauptstellung (Fig. 3, 4, 5) die Winkel, die bei den Ecken des Gelenkvierecks auftreten, mod π mittels positiv durchlaufener Bögen des umschriebenen Kreises c, so gilt:

(1) $$\text{Winkel } f_1 m_2 = \beta_3, \qquad \text{Winkel } m_3 f_1 = \beta_2.$$

---

[7]) Bezüglich der Koppel symmetrische Punkte erzeugen Koppelkurven, die in bezug auf den Steg symmetrisch sind [Bennett [1]), S. 62].

[8]) Jedes Gelenkviereck wird im Laufe seiner Bewegung das Sehnenviereck eines Kreises; es scheint angebracht, die verschiedenen Gelenkvierecke durch Eigenschaften ihres Sehnenvierecks zu kennzeichnen (wie oben im Kreislagensatz).

Mit r_2 und r_3 seien jene Radien des Kreises c bezeichnet, die nach B_2 bzw. B_3 führen. Dann lehrt die Gleichheit der Winkelsummen bei den Punkten B_2 und B_3 mit der Winkelsumme im Koppeldreieck, daß

(2) $$\text{Winkel } r_2 b_1 = \text{Winkel } b_1 r_3 = \beta_1$$

ist. Aus (1) und (2) folgt [9]), indem wir f_1 zur Längeneinheit machen,

(3) $$b_1 = \pm\cos\beta_1, \quad m_2 = \pm\cos\beta_3, \quad m_3 = \pm\cos\beta_2.$$

Das erste Vorzeichen ist negativ oder positiv, je nachdem die Arme sich schneiden (Fig. 5) oder nicht (Fig 3. 4). Die weiteren beiden Vorzeichen

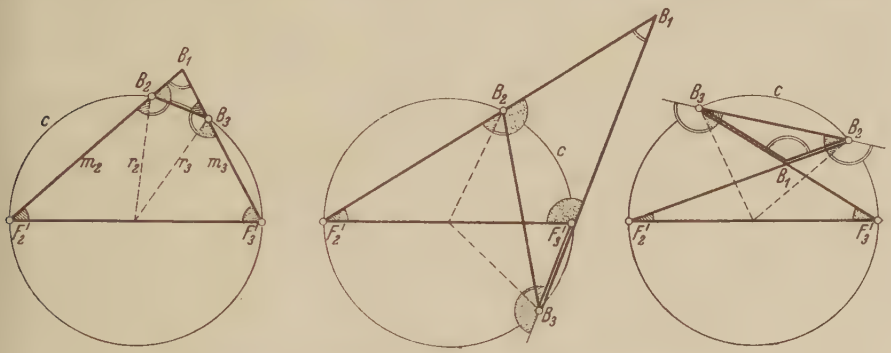


Fig. 3 bis 5. Winkelbeziehungen in der Hauptstellung.

sind gleich (und positiv), wenn Steg und Koppel sich nicht schneiden (Fig. 3, 5), sonst ungleich (Fig. 4).

Setzen wir in die einzige zwischen den Cosinus eines Dreiecks bestehende Gleichung, nämlich

(4) $$\Sigma\cos^2\beta_i + 2\Pi\cos\beta_i = 1,$$

aus (3) ein, so ergibt sich [10])

(5) $$\boxed{b_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \pm 2 b_1 m_2 m_3 = 1.}$$

Das Minuszeichen steht für Gelenkvierecke, die in der Hauptstellung überschlagen sind (Fig. 4, 5).

§ 7.

Brennpunkte und Spitzen. Das Hauptspiegelbild.

Jede Koppelkurve, also auch eine dreispitzige, ist eine trizirkulare Kurve sechster Ordnung. Die Tangenten in den absoluten Kreispunkten liefern drei reelle Schnittpunkte und von diesen (außerordentlichen) Brennpunkten liegen zwei in den Stegenden F_2, F_3. Um den restlichen Brennpunkt F_1 zu ermitteln, konstruiert man bekanntlich das Dreieck $\{F_i\}$

[9]) Vgl. etwa C. Beyel, 57 Sätze über das orthogonale Viereck, Zeitschr. Math. u. Phys. 34 (1889), S. 218—237, 290—302 (bes. S. 224).

[10]) Gleichung (3) und (5) im wesentlichen bei Cayley [1]), S. 556.

gleichsinnig ähnlich zum Koppeldreieck $\{B_i\}$. Bezeichnet wieder S_1 die Spitze, in der der beschreibende Punkt B_1 in der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ liegt, so folgt aus der für $\mathfrak{S}_1$ statthabenden Inzidenz der Geraden b_2, m_3 und b_3, m_2, ferner aus den Winkelgleichheiten (1), daß die Dreiecke $\{B_i\}$ und $S_1F_3F_2$ gegensinnig ähnlich, mithin $\{F_i\}$ *und* $S_1F_3F_2$ *in bezug auf die Mittelsenkrechte der Strecke* F_2F_3 *symmetrisch* sind. Diese Aussage formen wir auf zweierlei Art um.

Erstens werde das ganze Getriebe in seiner Hauptstellung an der Symmetralen des Steges gespiegelt. Die neue Figur nenne ich das *Hauptspiegelbild* des Getriebes. Nun ergibt die Symmetrie zwischen $\{F_i\}$ und $S_1F_3F_2$ im Verein mit dem Kreislagensatz den

Satz vom Hauptspiegelbild. *Eine Seite des Höhenfußpunktedreiecks* $\{H_i\}$ *im Brennpunktedreieck* $\{F_i\}$ *ist das Hauptspiegelbild der Koppel, und zwar die dem Steg gegenüberliegende Seite. Die Hauptspiegelbilder der übrigen Getriebestäbe fallen in die Geraden* $\{f_i\}$ *des Brennpunktedreiecks.*

Zweitens führen wir den Umkreis k des Dreiecks $\{F_i\}$ ein und nennen ihn wegen seiner später zutage tretenden Wichtigkeit den *Grundkreis*[11]) der Koppelkurve. Dann gilt der

Satz über Grundkreissehnen. *Die Spitze* S_1 *liegt auf dem Grundkreis* k *und auf einer durch* F_1 *laufenden Parallelen zu* f_1.

Wir ziehen nun wieder die umgekehrte Bewegung heran (Fig. 2) und hier außer der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$, in welcher F_2', F_3' die Enden des Stabes f_1 sind, auch eine andere spitzenerzeugende Stellung, etwa $\mathfrak{S}_2$, wo $F_2''F_3'$ die Lage von f_1 angibt. Wird die Figur $\mathfrak{S}_1$ so bewegt, daß F_2', F_3' mit den festen Punkten F_2 und F_3, den Stegendpunkten, zur Deckung kommen, so gelangt der beschreibende Punkt B_1 in die Spitze S_1. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{S}_2$ und die Spitze S_2.

Am einfachsten ist es, wir identifizieren F_2' mit F_2 und F_3' mit F_3. Dann ist die Bewegung, die F_2'', F_3' nach F_2 bzw. F_3 und B_1 nach S_2 befördert, eine bloße Drehung um F_3. Folglich ist die Strecke $S_2F_3 = S_1F_3$. Überdies liegt S_2 auf dem Grundkreis k. Zu Beginn der Drehung um F_3 gehen nämlich die Geraden b_3, b_2 durch F_2 bzw. F_3 und am Ende der Drehung, wenn also F_2'' nach F_2 gelangt ist, muß ja wieder b_3 mit F_2 inzidieren und selbstredend auch b_2 mit F_3. Es gibt nun in der Tat auf k einen einzigen von S_1 verschiedenen Punkt, für den $S_2F_3 = S_1F_3$ ist, denn S_1 kann nicht der Gegenpunkt zu F_3 auf k sein, weil sonst der Winkel $S_1F_2F_3$ ein rechter, also dem Kreislagensatz zufolge $m_2 = 0$ wäre.

Diese letzte Bemerkung halten wir in erweiterter Form folgendermaßen fest: *Das Brennpunktedreieck* $\{F_i\}$ *ist nicht rechtwinkelig.*

---

[11]) Name wie bei Morley[1]), S. 146.

Die Spitze S_2 kann schließlich auch als Restschnitt der Parallelen zu f_2 durch den Punkt F_2 und des Grundkreises k gefunden werden. Die Gerade F_2S_1 ist nämlich einerseits bezüglich der Mittelsenkrechten von f_1 symmetrisch zu f_2. Dreht man andererseits die Gerade F_2S_1 so lange um F_3, bis sie wieder durch F_2 geht, so sind Anfangs- und Endlage gleichfalls symmetrisch in bezug auf eine Gerade $\perp F_2F_3$. Hiermit ist bewiesen, daß der oben angegebene Satz über Grundkreissehnen auch für den Index 2 gilt; analog für den Index 3.

§ 8.

Dreifache Erzeugung der Koppelkurve.

Haben wir bisher die dreispitzige Koppelkurve mittels eines einzigen Koppelgetriebes erzeugt — es hatte f_1 zum Steg — so nehmen wir jetzt die weiteren beiden Getriebe hinzu, die dieselbe Kurve ergeben. Das eine von ihnen hat f_2, das andere f_3 zum Steg. Das über f_2 aufgebaute Getriebe besitzt natürlicherweise auch eine Hauptstellung und erzeugt in dieser Hauptstellung eine Spitze, die nach dem Satz über Grundkreissehnen auf einer Parallelen zum Steg durch den von den Stegenden verschiedenen Brennpunkt der Koppelkurve liegt, also auf der Parallelen zu f_2 durch F_2. Mithin ist S_2 diese Spitze. Entsprechendes gilt für das auf f_3 ruhende Getriebe. Wir können somit für alle drei Getriebe sagen:

Das Koppelgetriebe mit dem Steg f_i erzeugt in seiner Hauptstellung die Spitze S_i, womit die bisherige Sonderstellung der Spitze S_1 aufgehoben ist.

Auch der Satz vom Hauptspiegelbild, nunmehr auf drei erzeugende Getriebe angewendet, liefert eine regelmäßigere Figur:

Zeichnet man alle drei Hauptspiegelbilder übereinander, so resultiert das Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ samt dessen Höhenfußpunktedreieck $\{H_i\}$. Die Seiten des letzteren sind die Hauptspiegelbilder der Koppeln. (Hierbei ist zu beachten, daß aus der Hauptstellung jedes Getriebes das Hauptspiegelbild durch Spiegelung an der Symmetralen des betreffenden Steges hervorgeht.) Von welchen Stäben die Strecken herrühren, die in den drei übereinandergelegten Hauptspiegelbildern vorkommen, und wie sie zusammengehören, lehrt nachstehende Tabelle:

Tabelle 1. Vereinigung dreier Hauptspiegelbilder.

$F_{i-1}F_{i+1}$	$H_{i-1}H_{i+1}$	$F_{i-1}H_{i+1}$	$H_{i-1}F_{i+1}$	Im Getriebe, dessen in der Hauptstellung erzeugte Spitze:
ist Hauptspiegelbild eines Stabes von folgender Bedeutung:				
Steg	Koppel	Koppeldreieck-Seite Arm	Arm Koppeldreieck-Seite	S_{i-1} S_i S_{i+1}

§ 9.

Feuerbachsche Figur.

Unter a_i sei die durch F_i gelegte Parallele zur Geraden f_i verstanden, welche Parallele gemäß dem Satz über Grundkreissehnen (§ 7) auch die Spitze S_i enthält. Die Geraden $\{a_i\}$ bilden ein Dreieck mit den Ecken $\{A_i\}$, das sogenannte Außendreieck[12]) des Brennpunktedreiecks $\{F_i\}$. Es empfiehlt sich, diese Beziehung umzukehren und $\{A_i\}$ als Urdreieck aufzufassen; dann hat man nämlich folgenden Satz:

Feuerbachsche Relation. *Das Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ ist das Mittendreieck, dessen Umkreis k also der Feuerbachsche Kreis von $\{A_i\}$. Die*

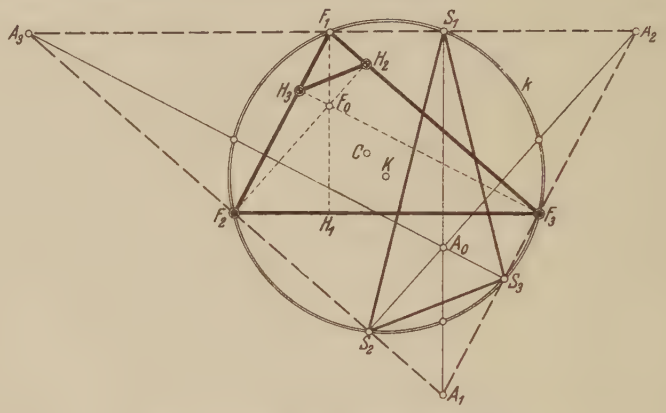


Fig. 6. Spitzen und Brennpunkte sind Punkte eines Feuerbachschen Kreises.

Restschnittpunkte $\{S_i\}$ des Grundkreises k mit den Urseiten $\{a_i\}$ bilden daher das Höhenfußpunktedreieck von $\{A_i\}$.

Das Urdreieck $\{A_i\}$ hat denselben Schwerpunkt C wie das Mittendreieck $\{F_i\}$. Aus $\{F_i\}$ geht $\{A_i\}$ hervor durch eine zentrisch ähnliche Vergrößerung mit dem Zentrum C im Verhältnis $-2:1$. Die Höhenfußpunktedreiecke von $\{F_i\}$ und $\{A_i\}$ stehen in der gleichen Beziehung. Mithin kann man aus der Feuerbachschen Relation und aus dem Satz vom Hauptspiegelbild (§ 7) schließen:

Das Getriebe, das in seiner Hauptstellung die Spitze S_i erzeugt, hat eine Koppel, die halb so lang ist wie die Entfernung der Spitzen S_{i-1}, S_{i+1}. Das Hauptspiegelbild der Koppel ist parallel zu $S_{i-1}\,S_{i+1}$ (Fig. 6).

Das Dreieck $\{F_i\}$ ist einer Bemerkung in § 7 zufolge nicht rechtwinkelig desgleichen $\{A_i\}$ als zu $\{F_i\}$ ähnliches Dreieck. Ist, umgekehrt,

[12]) Über hier und später verwendete Begriffe aus der Dreiecksgeometrie siehe G. Berkhan und W. F. Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, Encyklop. math. Wiss. III AB 10.

ein nicht ausgeartetes schiefwinkeliges Dreieck $\{F_i\}$ vorgegeben, so *existiert eine und nur eine dreispitzige Koppelkurve Γ, für die $\{F_i\}$ Brennpunkte sind.*

Wir konstruieren etwa über f_1 als Steg das Hauptspiegelbild eines Koppelgetriebes, das die im Satz vom Hauptspiegelbild (§ 7) angegebene Gestalt zeigt. Folglich besitzt dieses Getriebe eine Kreislage, erzeugt also nach § 5 eine dreispitzige Koppelkurve Γ, die eben dem Satz vom Hauptspiegelbild zufolge die Brennpunkte $\{F_i\}$ hat. Ginge man vom Steg f_2 bzw. f_3 aus, so erhielte man noch zwei Getriebe, die je eine dreispitzige Koppelkurve mit den Brennpunkten $\{F_i\}$ erzeugen. Aus § 8 ist ersichtlich, daß alle drei Getriebe dieselbe Kurve Γ ergeben. Weitere Getriebe läßt der Satz vom Hauptspiegelbild nicht zu. Hiermit ist bewiesen, daß Γ durch $\{F_i\}$ eindeutig bestimmt ist. Dann müssen auch die Spitzen $\{S_i\}$ eindeutig bestimmt sein. In der Tat erhält man $\{S_i\}$, wenn zum Mittendreieck $\{F_i\}$ das Urdreieck $\{A_i\}$ und dann in diesem das Höhenfußpunktedreieck gesucht wird.

Zu einem beliebigen, nicht ausgearteten Spitzendreieck $\{S_i\}$ existieren hingegen vier verschiedene Koppelkurven, wie wir nun zeigen wollen. Dabei wird auch der folgende Umstand aufgeklärt werden. Der Grundkreis k, als Neunpunktekreis von $\{A_i\}$ aufgefaßt, trägt nebst den Seitenmitten $\{F_i\}$ und den Höhenfußpunkten $\{S_i\}$ auch die Mitten der „oberen" Höhenabschnitte. Welche kinematische Bedeutung haben diese Punkte, die übrigens in Fig. 6 gleichfalls eingetragen sind?

§ 10.

Koppelkurven mit demselben Spitzendreieck.

Auch das dritte in der Feuerbachschen Figur auftretende Dreieck, nämlich $\{S_i\}$, könnte man zum Grunddreieck machen. Von diesem Standpunkt aus wären $\{A_i\}$ Mittelpunkte von Berührungskreisen. Wir fügen den vierten derartigen Punkt A_0 hinzu, der zugleich Höhenschnittpunkt für $\{A_i\}$ ist. Auch für $\{F_i\}$ werde der Höhenschnittpunkt F_0 bestimmt.

Jeder Punkt des Quadrupels A_0, $\{A_i\}$ ist Höhenschnittpunkt im Dreieck der übrigen Punkte und für dieses restliche Dreieck sind $\{S_i\}$ die Höhenfußpunkte. Überhaupt könnten die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen so geführt werden, daß die Punkte A_0, $\{A_i\}$ völlig gleichwertig erscheinen. Da wir aber später nicht werden umhin können, Inkreise und Ankreise auseinanderzuhalten, mag schon jetzt aus dem Quadrupel A_0, $\{A_i\}$ willkürlicherweise A_0 hervorgehoben werden. Wir verabreden, daß A_0 als Inkreismittelpunkt für $\{S_i\}$ bezeichnet werde — im Gegensatz hierzu $\{A_i\}$ als Ankreismittelpunkte — gleichgültig, ob A_0 der „Inkreismittelpunkt im engeren Sinne" ist, wie das Fig. 6 zeigt, oder nicht.

Jetzt fassen wir das Dreieck $A_0 A_2 A_3$ ins Auge, dessen Höhenschnittpunkt A_1 ist und nennen dessen Mittendreieck $F_1 F_2^* F_3^*$ (Fig. 7). Der Höhenschnittpunkt dieses letzten Dreiecks sei F_1^*. Das Quadrupel $F_1, \{F_i^*\}$ ist zu $A_0, \{A_i\}$ zentrisch ähnlich im Verhältnis $-1:2$. Das Ähnlichkeitszentrum ist der Schwerpunkt C_1 von $A_0 A_2 A_3$ (oder von $F_1 F_2^* F_3^*$). Da $F_0, \{F_i\}$ zu $A_0, \{A_i\}$ im selben Verhältnis zentrisch ähnlich war bezüglich des Schwerpunktes C von $\{A_i\}$, so sind $F_0, \{F_i\}$ und $F_1, \{F_i^*\}$ kongruent, und zwar parallel verschoben. Der Vektor der Schiebung $F_0, \{F_i\} \to F_1, \{F_i^*\}$ ist $F_0 F_1 = \frac{1}{2} A_1 A_0$. Bei dieser Schiebung gelangen die Seitenmittelpunkte F_2, F_3 des Dreiecks $\{A_i\}$ in die Mittelpunkte der

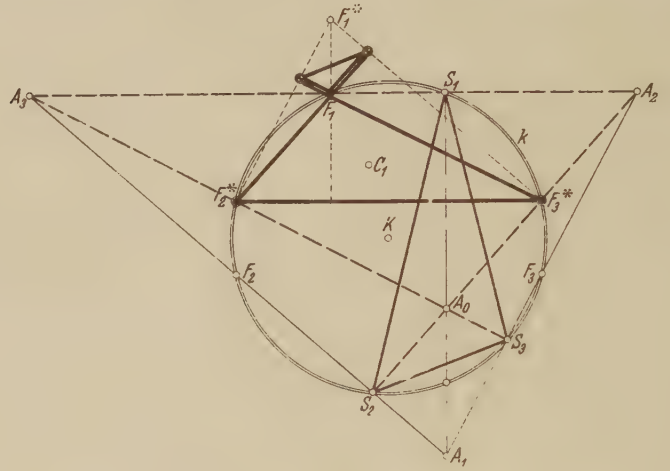


Fig. 7. Spitzendreieck und Brennpunktedreiecke.

oberen Höhenabschnitte desselben Dreiecks und F_2^*, F_3^* sind Gegenpunkte zu F_3, F_2 auf dem Feuerbachschen Kreis k. Analog zu der in § 9 beschriebenen Konstruktion einer Koppelkurve Γ mit den Brennpunkten $\{F_i\}$ und den Spitzen $\{S_i\}$ kann nun eine Koppelkurve Γ_1 mit denselben Spitzen $\{S_i\}$ ermittelt werden, deren Brennpunktedreieck $F_1 F_2^* F_3^*$ ist.

Wenn im vorangehenden Absatz unter Bevorzugung des Index 1 verfahren wurde, so war 1 nur Beispiel für einen beliebigen Index i. Werden alle Fälle zusammengefaßt, so besteht der Satz:

Es gibt vier Koppelkurven, deren Spitzen ein und dasselbe nicht ausgeartete, sonst beliebige Dreieck $\{S_i\}$ bilden. Die Brennpunkte sind die Mitten $\{F_i\}$ der Seiten und die Mitten der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks $\{A_i\}$ der Ankreismittelpunkte von $\{S_i\}$. Das Brennpunktetripel jeder Kurve enthält einen Punkt F_i und entweder noch die beiden Punkte F_{i-1}, F_{i+1} oder deren Gegenpunkte auf dem Grundkreis k. Mithin gilt für jedes von den sechs Paaren der vier Kurven: Die beiden Kurven haben

einen Brennpunkt gemeinsam, während die restlichen Brennpunkte der einen Kurve den restlichen Brennpunkten der anderen Kurve auf k gegenüberliegen. Insbesondere sind die vier Kurven paarweise verschieden.

§ 11.

Zwölf Koppelgetriebe.

Interessierte an den Brennpunktedreiecken der vier Koppelkurven mit gemeinsamen Spitzen mehr ihre Verschiedenheit, so soll jetzt bei den erzeugenden Getrieben mehr das Übereinstimmende herausgearbeitet werden. Es liegt nahe, zu diesem Zweck das Quadrupel F_1, $\{F_i^*\}$ mit F_0, $\{F_i\}$

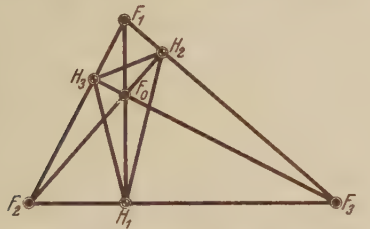


Fig. 8. Übereinandergelegte Hauptspiegelbilder von zwölf Getrieben.

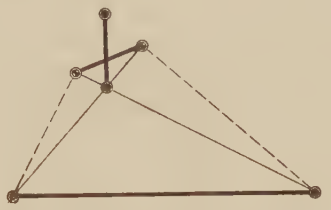


Fig. 9. Getriebepaar mit gleichen Stegen und gleichen Koppeln. (Ausschnitt aus Fig. 8.)

durch Translation zur Deckung zu bringen, ebenso die weiteren drei analogen Quadrupel. Sind in allen vier Brennpunktedreiecken die Hauptspiegelbilder je dreier Getriebe eingetragen worden (vgl. § 8), so überdecken nach dem Zusammenschieben der Quadrupel die Bilder der Koppeln die Seiten des Höhenfußpunktedreiecks $\{H_i\}$ von $\{F_i\}$, und zwar vierfach, während die Winkelsymmetralen von $\{H_i\}$ durch die Bilder der übrigen Stäbe ebenfalls vierfach bedeckt werden (Fig. 8). Welche Rollen die Strecken zwischen den bezeichneten Punkten der Figur als Getriebestäbe spielen, könnte man folgendermaßen herausfinden. Man ermittle für eine vorgegebene Strecke zunächst, in welchen von den vier Teilfiguren, deren Zusammenschieben Fig. 8 ergab, sie vorkommt. In jeder Teilfigur findet man sich dann an Hand der Tabelle 1 zurecht.

Wir wollen hier nicht in alle Einzelheiten eindringen, begnügen uns vielmehr mit dieser Feststellung: *Läßt man bei den zwölf Getrieben, deren jedes eine Koppelkurve mit den Spitzen $\{S_i\}$ erzeugt, für den Augenblick die Arme fort, betrachtet also bloß Stege und Koppeln, so können die zwölf Getriebe derart in sechs Paare eingeteilt werden, daß für die beiden Getriebe jedes Paares die Hauptspiegelbilder und daher auch die Hauptstellungen kongruent sind.*

Greifen wir das gemeinsame Bild von vier Koppeln heraus (Fig. 9), so gehören die betreffenden Koppeln vier Getrieben an, die in ihren

Hauptstellungen dieselbe Spitze erzeugen, nämlich zufolge § 9 jene Spitze, deren Gegenseite im Spitzendreieck zum gemeinsamen Bild der vier Koppeln parallel ist. Die Bilder der dazugehörigen Stege sind Strecken, deren Geraden die Enden des Koppelbildes nicht treffen. Entscheidet man sich für eines der Stegbilder (etwa die unterste Strecke in Fig. 9), so gibt dieses zusammen mit dem Koppelbild die gemeinsame Darstellung eines der oben erwähnten kongruenten Getriebepaare. Die Kongruenz verliert sich allerdings, sobald die Arme eingezeichnet werden (dünne Linien). Ein solches Getriebepaar zeigen auch Fig. 6 und 7.

§ 12.

Orthologe Dreiecke.

Wir kehren zur Untersuchung einer einzigen dreispitzigen Koppelkurve zurück und dementsprechend werde wieder $\{A_i\}$ als Urdreieck angesehen. Aus der Feuerbachschen Relation, welche besagt, daß $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ die Seitenmitten bzw. Höhenfußpunkte von $\{A_i\}$ sind (§ 9), folgen zahlreiche Beziehungen zwischen den Dreiecken $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$, denen wir uns jetzt zuwenden.

Die aus den Punkten $\{F_i\}$ auf die Seiten $\{s_i\}$ des Dreiecks $\{S_i\}$ gefällten Lote, das heißt die Geraden $\{F_i \perp s_i\}$ gehen durch einen Punkt, ebenso die Geraden $\{S_i \perp f_i\}$; mit anderen Worten: *Die Dreiecke* $\{F_i\}$ *und* $\{S_i\}$ *sind ortholog*. Das ist bekannt und kann leicht aus allgemeinen Sätzen über orthologe Dreiecke geschlossen werden[13]). Ein unmittelbarer Beweis ist jedoch nicht schwierig.

Weil der Kreis mit dem Durchmesser $A_{i-1}A_{i+1}$, der also F_i zum Mittelpunkt hat, die übrigen Seiten des Urdreiecks in den Höhenfußpunkten S_{i-1}, S_{i+1} schneidet, ist die Entfernung $F_iS_{i-1} = F_iS_{i+1}$ (vgl. auch § 7). Weil ferner F_i, S_{i-1}, S_{i+1} auf dem Grundkreis k liegen, geht die Gerade $F_i \perp s_i$ durch den Grundkreismittelpunkt K.

Die Gerade $S_i \perp f_i$ geht durch den Höhenschnittpunkt A_0 von $\{A_i\}$, denn $S_i \perp f_i$ ist ja auch $\perp a_i$, also die von A_i ausgehende Höhe.

Die beiden Orthologiezentren sind demnach der Mittelpunkt K *des Grundkreises und der Höhenschnittpunkt* A_0.

§ 13.

Relationen zwischen Grundkreisbögen.

Mit $\{\varphi_i\}$ und $\{\sigma_i\}$ seien die Innenwinkel von $\{F_i\}$ bzw. $\{S_i\}$ bezeichnet[14]). Wir messen die Winkel mod π mittels Bögen des Grund-

[13]) Vgl. Berkhan und Meyer[12]), S. 1223.

[14]) Weil $\{F_i\}$ und $\{B_i\}$ gleichsinnig ähnlich sind (§ 7), ist $\varphi_i = \beta_i$.

kreises k und setzen fest, daß alle im folgenden auftretenden Bögen von k im positiven Sinn zu durchlaufen sind.

Weil $a_{i-1} \| f_{i-1}$ und $a_{i+1} \| f_{i+1}$ gelten folgende Gleichungen:

(6) Bogen $F_{i+1}F_{i-1} = S_{i-1}F_i$, Bogen $F_{i+1}F_{i-1} = F_iS_{i+1}$.

Somit ist $2\,F_{i+1}F_{i-1} = S_{i-1}S_{i+1}$ oder

$$2\,\varphi_i + \sigma_i = 0. \tag{7}$$

Nun beweisen wir den

Satz von der Grundkreisbögen-Summe. *Werden die Bögen von einem beliebigen Grundkreispunkt P aus gemessen, so ist, abgesehen von Vielfachen des Umfanges, $\Sigma PF_i = \Sigma PS_i$.*

Es genügt offenbar, den Beweis für eine besondere Lage von P zu führen, etwa für $P = F_1$. Dann ist mit Rücksicht auf (6) die Summe von Bögen

$$\Sigma PF_i = F_1F_2 + F_1F_3 = F_1F_2 + F_2S_1 = F_1S_1 + (F_2F_3 - F_2F_3)$$
$$= F_1S_1 + F_1S_2 + F_1S_3,$$

wie behauptet wurde.

Der Satz von der Grundkreisbögen-Summe gilt für beliebige, nicht bloß für dreispitzige Koppelkurven[15]), wenn unter $\{S_i\}$ die Doppelpunkte der Koppelkurve verstanden werden, welche auf dem Kreis k durch die Brennpunkte liegen (wie hier indessen nicht bewiesen werden soll). Hingegen ist das Bestehen von (7) und die Orthologie zwischen $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ auf spezielle Klassen von Koppelkurven beschränkt. Diese beiden Beziehungen setzen ja eine Zuordnung zwischen den Punkten $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ voraus. Nun sind bei allgemeinen Koppelkurven die Brennpunkte $\{F_i\}$ nicht auf natürliche Weise mit den Doppelpunkten $\{S_i\}$ gepaart, während dies für dreispitzige Koppelkurven die Feuerbachsche Relation leistet.

§ 14.

Winkelgegenpunkte.

Aus dem Satz über die Summe von Grundkreisbögen können mehrere einigermaßen beachtliche Sätze hergeleitet werden, die demnach gleichfalls für beliebige Koppelkurven richtig sind.

Die Punkte des Umkreises eines Dreiecks besitzen unendlich ferne Winkelgegenpunkte bezüglich dieses Dreiecks. Ich behaupte:

Jedem Grundkreispunkt P entspricht als Winkelgegenpunkt in bezug auf $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ ein und derselbe Fernpunkt.

Zum Beweis verbinden wir den zu P bezüglich $\{F_i\}$ isogonalen Punkt mit F_1; die Verbindungsgerade schneide den Grundkreis k in dem Rest-

---

[15]) Cayley[1]), S. 553; Bennett[1]), S. 82; Morley[1]), S. 146; Haarbleicher[1]), dort Gleichung (12).

punkt P_f. Analog werde der Winkelgegenpunkt zu P bezüglich $\{S_i\}$ aus S_1 in den Punkt P_s von k projiziert. Mithin ist

$$\text{Bogen } P_f F_2 = F_3 P, \quad \text{Bogen } P_s S_2 = S_3 P.$$

Daher ist der Bogen

$$(8) \qquad \begin{aligned} P_f P_s &= P_f F_2 + F_2 P + P S_1 + S_1 F_1 + F_1 P + P S_2 + S_2 P_s \\ &= (\Sigma F_i P + \Sigma P S_i) + S_1 F_1. \end{aligned}$$

Weil der Klammerausdruck nach dem Satz über die Grundkreisbögen-Summe verschwindet, sind die Geraden $F_1 P_f$ und $S_1 P_s$ parallel, was zu beweisen war.

Die besonderen Lagen $P = F_i$ und $P = S_i$ liefern das Ergebnis:

Jede Ecke von $\{F_i\}$ oder $\{S_i\}$ und der Fernpunkt ihrer Gegenseite sind Winkelgegenpunkte des anderen Dreiecks[16]).

Stimmt die Korrespondenz zwischen dem Grundkreis und der uneigentlichen Geraden, die die isogonale Verwandtschaft von $\{F_i\}$ erzeugt, auch nur in einem Paar entsprechender nicht absoluter Punkte mit der analogen, durch $\{S_i\}$ hervorgerufenen Korrespondenz überein, so stimmen beide Korrespondenzen im ganzen überein. Somit läßt sich aus dem letzten, speziellen Satz der vorhergehende, allgemeinere Satz zurückgewinnen.

§ 15.

Berührende Parabeln. Wallacegeraden.

Die Brennpunkte aller Inkegelschnitte eines Dreiecks sind Winkelgegenpunkte und umgekehrt. Hieraus folgt, daß die Brennpunkte der Inparabeln die Punkte des Umkreises sind, weiter im Hinblick auf § 14:

Berührende Parabeln an $\{f_i\}$ und $\{s_i\}$ haben denselben Brennpunkt und parallele Achsen oder keines von beiden[17]).

Wenn also die Inparabeln konfokal sind, so sind auch die Scheiteltangenten parallel. Dies kann man, weil die Scheiteltangente einer Inparabel die Wallacegerade ihres Brennpunktes ist, auch so ausdrücken:

Für jeden Grundkreispunkt P sind seine Wallacegeraden bezüglich $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ parallel[17]).

Die beiden letzten Sätze gelten mutatis mutandis auch dann, wenn die Parabeln als Klassenkegelschnitte in einen Grundkreispunkt und den uneigentlichen Winkelgegenpunkt zerfallen. Tritt dies ein, so ist immer die durch den eigentlichen und normal zum uneigentlichen Punkt gehende Gerade als Scheiteltangente und zugleich Leitlinie einer Parabel anzusehen.

Wenn der Brennpunkt P z. B. nach S_i rückt, degeneriert jedenfalls die $\{s_i\}$ berührende Parabel. Die Wallacegerade zu S_i im Dreieck $\{S_i\}$

[16]) Haarbleicher[1]), S. 22; z. T. Bennett[1]), S. 78.

[17]) Haarbleicher[1]), S. 22.

ist die Höhe durch S_i. Zu ihr parallel ist nach dem letzten Satz auch die Wallacegerade von S_i bezüglich $\{F_i\}$. Da diese Gerade die Scheiteltangente der $\{f_i\}$ berührenden Parabel mit dem Brennpunkt S_i ist, gilt dasselbe für die Leitlinie der Parabel; also:

Die Spiegelbilder des Punktes S_i an den Seiten $\{f_i\}$ liegen auf einer Parallelen zur Höhe im Punkte S_i. Auf dieser Parallelen liegt F_0, weil die Leitlinie jeder Parabel die Höhenschnittpunkte aller Tangentendreiseite enthält. Weil ferner die Scheiteltangente mitten zwischen Brennpunkt und Leitlinie verläuft, hat sich ergeben: Die Wallacegerade von S_i in bezug auf $\{F_i\}$ geht durch den Mittelpunkt der Höhenschnittpunkte[18]) von $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$, ebenso die Wallacegerade zu F_i bezüglich $\{S_i\}$. Der gemeinsame Schnittpunkt der Wallacegeraden kann auch als *Lotpunkt* jeder der sechs Geraden $\{f_i\}$, $\{s_i\}$ in bezug auf das Dreieck $\{S_i\}$ bzw. $\{F_i\}$ gedeutet werden[19]).

Jede Gerade durch den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ist Leitlinie einer Inparabel. Wählt man die Verbindungsgerade l der Höhenschnittpunkte von $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ zur Leitlinie für Inparabeln dieser Dreiecke, so haben die Parabeln parallele Achsen, sind daher nach dem ersten Satz des laufenden Paragraphen konfokal, also identisch. Mit anderen Worten: Es besteht der

Schließungssatz. *Die dem Grundkreis eingeschriebenen Dreiecke $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ sind einer Parabel p umschrieben*[20]).

Deren Brennpunkt Q kann als gemeinsamer Schnittpunkt der Spiegelbilder von l bezüglich aller sechs Dreieckseiten konstruiert werden[21]).

Sind, umgekehrt, zwei dem Grundkreis eingeschriebene Dreiecke $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ einer einzigen Parabel p umschrieben, so folgt aus der § 15 einleitenden Bemerkung, zusammen mit der Überlegung, die den Schluß des § 14 bildet, daß für $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ die Sätze des § 14 gelten. Aus diesen Sätzen resultiert mittels (8) der Satz von der Grundkreisbögen-Summe. Der letztere Satz ist also mit den Ergebnissen von § 14 und mit dem Schließungssatz äquivalent[22]) und, wie man auf ähnliche Weise zeigen könnte, mit den übrigen drei Lehrsätzen von § 15.

Die bisher abgeleiteten Konsequenzen des Satzes von der Grundkreisbögen-Summe gelten, wie bereits erwähnt, für beliebige Koppelkurven;

---

[18]) R. L. Hippisley, Note on the nodes of the 3-bar sextic, Proceed. London math. Soc. (2) 21 (1923), S. 410—412; Haarbleicher[1]), S. 22.

[19]) Hippisley[18]).

[20]) Cayley[1]), S. 575; Bennett[1]), S. 79; Haarbleicher[1]), S. 22.

[21]) Außerdem ist $\Pi Q F_i = \Pi Q S_i$, wo beiderseits Produkte dreier Grundkreissehnen stehen [Cayley[1]), S. 577; Bennett[1]), S. 82, dort noch andere Relationen].

[22]) Z. T. Cayley[1]), S. 577; Bennett[1]), S. 78.

bei dreispitzigen sind $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ Teile der Feuerbachschen Figur, was viele Besonderheiten erwarten läßt. In der Tat: Die Inparabeln von $\{F_i\}$ sind Polparabeln[23]) des Urdreiecks $\{A_i\}$. Der Höhenschnittpunkt F_0 von $\{F_i\}$ ist Umkreismittelpunkt. Seine Verbindungsstrecke mit dem Höhenschnittpunkt des Höhenfußpunktedreiecks $\{S_i\}$ hat denselben Mittelpunkt M wie der Taylorsche Kreis[24]); die Strecke liegt auf dem Brocardschen Durchmesser. Diese Gerade ist demnach Leitlinie der $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ eingeschriebenen Parabel p, welche die Kiepertsche Parabel von $\{F_i\}$ ist[25]). Ihr Brennpunkt Q ist der Lotpunkt des Brocardschen Durchmessers, das ist der Komplementpunkt des Steinerschen Punktes[26]) (Steinerscher Punkt ür $\{F_i\}$). Die Achse von p ist die Parallele durch Q zur Lemoineschen Geraden[27]).

§ 16.

Die Spitzentangenten.

Nachdem wir bei den Getrieben, die dreispitzige Koppelkurven erzeugen, verweilt haben und bei den Brennpunkten, die mit den Getrieben in innigem, mit den Kurven aber in nicht augenfälligem Zusammenhang stehen, so wollen wir uns endlich der Erscheinung der Kurven selbst zuwenden. Wir bleiben zunächst bei der Untersuchung einer einzigen dreispitzigen Koppelkurve und beginnen mit ihren Spitzen. Da über das Spitzendreieck selbst nichts weiter zu berichten ist, betrachten wir die Spitzentangenten und beweisen:

Die Spitzentangenten gehen durch einen Punkt.

Dieser Satz gilt, anders als bei Quartiken, keineswegs für alle Kurven sechster Ordnung mit drei Spitzen, nicht einmal für jede drei-

---

[23]) Vgl. Berkhan und Meyer[12]), S. 1252.

[24]) Vgl. A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891, S. 65—67; V. Thébault, Sur les cercles de Tucker, Mathesis (2) 48 (1934), S. 84. Für spitzwinkeliges $\{F_i\}$ ist M der Umfangsschwerpunkt von $\{S_i\}$; sind ferner $M f_i$ und $M s_i$ Normalabstände, so gilt: $\Pi M f_i = \Pi M s_i$ [V. Thébault, Géométrie de l'orthopôle, Mathesis (2) 47 (1933), Suppl.]. — Die Fußnoten [24]) bis [27]), sowie [30]) hat Herr J. Mahrenholz, Cottbus, liebenswürdigerweise beigesteuert.

[25]) A. Mineur, Sur les droites de Simson, Mathesis (2) 43 (1929), S. 332; V. Thébault, Sur le point de Feuerbach, ebenda S. 360; R. Goormaghtigh, Droite de Simson commune aux triangles orthique et complémentaire, Mathesis (2) 44 (1930), S. 333; V. Thébault, Sur les points de Feuerbach, Mathesis (2) 47 (1933), Suppl.

[26]) Goormaghtigh[25]); Thébault[25]). Die unter [24]) für M angeführte Abstandsrelation gilt auch für Q; siehe ferner [21]) [R. Deaux, Sur les triangles autopolaires, Mathesis (2) 47 (1933), S. 274].

[27]) Die Achse schneidet f_i und s_i in F_i^0 bzw. S_i^0, so daß $\Pi Q F_i^0 = \Pi Q S_i^0$ ist [V. Thébault, Mathesis (2) 48 (1934), S. 450, Aufgabe 2811].

spitzige Sextik mit zwei dreifachen Punkten. Das soll weiter unten durch ein Beispiel belegt werden (§ 17).

Ist etwa in S_1 die Spitzentangente t_1 zu suchen, so benützen wir die Hauptstellung des Getriebes, das in eben dieser Hauptstellung S_1 erzeugt (Fig. 10). Nun ist für die Bewegung der Koppel b_1 die Spitze S_1 Momentanpol (vgl. § 2). Somit ist t_1 senkrecht zur Polbahntangente u_1 im Punkte S_1. Wir ermitteln u_1 mit Hilfe der Bobillierschen Konstruktion: Die Gerade u_1^*, welche S_1 mit dem Schnittpunkt des Steges f_1 und der Koppel b_1 verbindet, ergibt als Spiegelbild an einer Symmetralen für den Winkel $b_2\,b_3$ des Koppeldreiecks (oder, kurz gesagt, durch Spiegelung am Winkel $b_2\,b_3$) die Polbahntangente u_1.

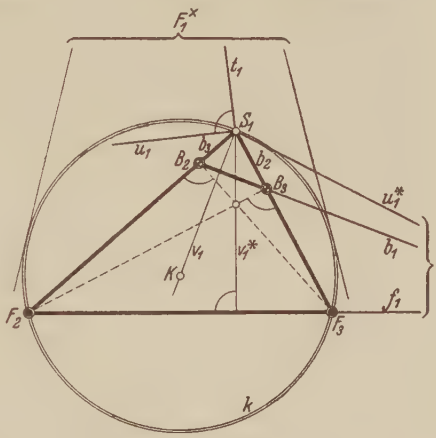


Fig. 10. Zur Konstruktion der Spitzentangente t_1.

Es ist vorteilhaft, die Gerade v_1^* hinzuzufügen, die zu u_1^* bezüglich b_2, b_3 harmonisch ist. Für das vollständige Viereck $F_2\,F_3\,B_2\,B_3$ ist S_1 ein Punkt des Diagonaldreiecks, u_1^* eine Seite desselben. Daher ist v_1^* die andere durch S_1 gehende Seite des Diagonaldreiecks, mithin die Verbindungsgerade von S_1 mit dem Schnittpunkt der Geraden $F_2\,B_3$ und $F_3\,B_2$ Da letztere Geraden, dem Kreislagensatz (§ 5) zufolge, Höhen im Dreieck $S_1\,F_2\,F_3$ sind, ist $v_1^* \perp f_1$.

Man spiegle b_2, b_3, u_1^*, v_1^* am Winkel $b_2\,b_3$. Dabei werden b_2 und b_3 bloß vertauscht; folglich sind die Spiegelbilder u_1, v_1 der Geraden u_1^*, v_1^* wieder harmonisch in bezug auf b_2, b_3. Bei der Spiegelung am Winkel $b_2\,b_3$ geht die Höhe v_1^* des Dreiecks $S_1\,F_2\,F_3$ bekanntlich in den durch denselben Eckpunkt S_1 verlaufenden Umkreisradius über. Somit ist v_1 ein Radius des Grundkreises k.

Jetzt drehen wir den harmonischen Strahlwurf $b_2\,b_3\,u_1\,v_1$ um S_1 durch einen rechten Winkel. Dabei entsteht aus u_1 die Spitzentangente t_1, aus dem Grundkreisradius v_1 die Tangente an k in S_1. Wir haben daher als vorläufiges Ergebnis: Die Spitzentangente t_1 ist zur Grundkreistangente bezüglich der Normalen zu b_2 und b_3 harmonisch. Um die vierte Harmonische t_1 wirklich zu konstruieren, verwenden wir k als Steinerschen Kreis. Die Normalen zu b_2 und b_3 schneiden ihn in den Gegenpunkten von F_2 bzw. F_3, die Grundkreistangente in S_1 selbst. Die Ermittlung der Harmonischen verläuft nun so: Die Tangenten an k in den Gegen-

punkten von F_2, F_3 schneiden sich in einem Punkt $F_1^\times$, dessen Verbindungsgerade mit S_1 den Grundkreis im Schnittpunkt der gesuchten Geraden t_1 trifft. Hieraus ist zu ersehen:

Die Tangente t_i in der Spitze S_i enthält $F_i^\times$, den Antipol zu f_i in bezug auf k.

Der Grundkreisradius nach F_i hin ist gemäß § 12 eine Normale zu s_i. Daher ist die F_i in der Antipolarität von k entsprechende Gerade $f_i^\times \| s_i$. Somit gehen die Verbindungsstrahlen analoger Ecken der Dreiseite $\{f_i^\times\}$, $\{s_i\}$, also die Spitzentangenten $\{t_i\}$, durch einen Punkt T, das Ähnlichkeitszentrum der Dreiecke $\{S_i\}$, $\{F_i^\times\}$. Ich will T das *Spitzenziel* nennen.

§ 17.

Das Spitzenziel. Inversion der Koppelkurve.

Die Lage des Spitzenziels T soll nun genauer beschrieben werden, seine Lage in bezug auf das Dreieck $\{S_i\}$, das ja schon in § 10 als Urdreieck verwendet wurde. Diese Auffassung wird fortan beibehalten. Ich erinnere auch an die zu Beginn von § 10 getroffene Verabredung über die Bezeichnungen „Inkreis" und „Ankreise". Sie besagt, daß die Ecken des $\{F_i\}$ umschriebenen Außendreiecks $\{A_i\}$ als *Ankreismittelpunkte* angesehen werden.

Der Antipol $F_i^\times$ zur Strecke f_i liegt auf deren Mittelsenkrechten, welche durch den Grundkreismittelpunkt K geht. Da $f_i \| a_i \perp A_0 S_i$ war, ist $K F_i^\times \| A_0 S_i$. In der zentrischen Ähnlichkeit $\{S_i\} \to \{F_i^\times\}$ entspricht somit K dem Punkt A_0 oder: Dem Inkreis entspricht in der zentrischen Ähnlichkeit der Grundkreis k (und kein anderer Berührungskreis von $\{F_i^\times\}$). Zur Geraden $K F_i^\times$, die eine Symmetrale des Winkels bei $F_i^\times$ ist, liegen auch die Punkte F_i, S_i symmetrisch; das hat uns ja zur Einführung der Hauptspiegelbilder veranlaßt. Folglich ist die Gerade $F_i^\times F_i$ Winkelgegengerade zu $F_i^\times S_i = t_i$ im Dreieck $\{F_i^\times\}$. Da die drei Geraden $\{t_i\}$ sich in T schneiden, laufen auch die Geraden $\{F_i^\times F_i\}$ in einem Punkt N zusammen, dem Winkelgegenpunkt zu T im Dreieck $\{F_i^\times\}$. Wir werden sogleich sehen, daß N der Nagelsche Punkt von $\{F_i^\times\}$ ist; damit wird, umgekehrt, dargelegt sein, daß T der Winkelgegenpunkt des Nagelschen Punktes ist, und hieraus folgt, weil die Geraden $\{t_i\}$ sich selbst in der zentrischen Ähnlichkeit $\{F_i^\times\} \to \{S_i\}$ entsprechen, der

Satz vom Spitzenziel. *T ist der Winkelgegenpunkt im Spitzendreieck $\{S_i\}$ zu dessen Nagelschem Punkt.*

Um nun den Beweis für die Behauptung nachzutragen, daß N der Nagelsche Punkt von $\{F_i^\times\}$ ist, bemerken wir vorerst, daß infolge der Antipolarität F_i auf k dem Punkt gegenüberliegt, in dem $f_i^\times$ den Grund-

kreis berührt. Die Behauptung läuft also auf folgenden Hilfssatz hinaus: *Die Ecktransversalen nach den Gegenpunkten der Berührungspunkte des Inkreises gehen durch den Nagelschen Punkt*[28]).

Beweis: Das Berührungsbüschel von Kegelschnitten, dem der Inkreis k des Dreiecks $\{F_i^\times\}$ und das Paar $f_{i-1}^\times, f_{i+1}^\times$ von Dreieckseiten angehören, schneidet der Kreisdurchmesser d durch den Berührungspunkt der dritten Seite $f_i^\times$ in einer Involution, von der ein Doppelpunkt auf der Berührungssehne des Büschels liegt. Die Polare dieses Doppelpunktes bezüglich jedes Büschelkegelschnittes trifft d im anderen Doppelpunkt, mithin auch die Polare bezüglich k, welche zu $f_i^\times$ parallel ist und durch $F_i^\times$ geht. Also wird die Involution auf d aus $F_i^\times$ in eine symmetrische Involution auf $f_i^\times$ projiziert. Die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises und deren Gegenpunkten projizieren daher Seitengegenpunkte. Das ist der Inhalt des Hilfssatzes.

Durch *Inversion* entstehen aus Koppelkurven, weil sie trizirkulare Sextiken sind, wieder trizirkulare Sextiken[29]). Unterwerfen wir eine dreispitzige Koppelkurve Γ der Inversion am Grundkreis, so hat die inverse Kurve Γ^* dieselben Spitzen $\{S_i\}$. Da die Inversion gegensinnig konform ist, geht die Γ^* in S_i berührende Spitzentangente t_i^* aus t_i durch Spiegelung an dem S_i enthaltenden Grundkreisradius hervor. Die Geraden $\{t_i^*\}$ laufen im allgemeinen nicht durch einen Punkt. Hiermit haben wir trizirkulare dreispitzige Sextiken ohne Spitzenziel konstruiert, deren Existenz zu Beginn von § 16 angekündigt worden war.

§ 18.

Isogonalinvariante Gebietseinteilung.

Der Grundkreis k, also der Umkreis des Dreiecks $\{S_i\}$, und sein Inkreis sind, wie festgestellt wurde, entsprechende Kreise in einer Ähnlichkeit mit T als Zentrum. Daher ist das Spitzenziel ein Ähnlichkeitspunkt zwischen Um- und Inkreis, und zwar, wie eine nähere Untersuchung ergeben würde, der äußere Ähnlichkeitspunkt für den Fall des Inkreises im engeren Sinn, sonst der innere[30]). Folglich liegt T innerhalb des Inkreises, denn der Umkreis eines Dreiecks umschließt den Inkreis im

---

[28]) Chr. Nagel, Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise, Leipzig 1836, S. 31, 33.

[29]) Roberts[1]). Dort findet man auch Inversionen, die eine Wattsche Kurve wieder in eine Wattsche Kurve überführen.

[30]) Zum äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt zwischen Umkreis und Inkreis im engeren Sinn ist der Nagelsche bzw. Gergonnesche Punkt isogonal [V. Thébault, Sur les centres de similitude des cercles inscrit et circonscrit au triangle, Mathesis (2) 46 (1932), S. 368].

engeren Sinn und trifft die übrigen Berührungskreise. Wir werden später folgende schwächere Aussage benötigen:

Von den vier Gebieten der projektiven Ebene, die durch die Geraden $\{s_i\}$ begrenzt werden, enthält eines das Spitzenziel T und zugleich den Inkreismittelpunkt A_0 als innere Punkte.

Dies kann ohne lästige Fallunterscheidungen zwischen Inkreis und Ankreisen, äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkten folgendermaßen bewiesen werden. Für jeden berührenden Kegelschnitt eines nicht ausgearteten Dreiecks liegt der Brianchonpunkt im Innengebiet des Kegelschnitts. Um zu T zu gelangen, muß auf den Brianchonpunkt des Inkreises die isotome und hierauf die isogonale Verwandtschaft des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ ausgeübt werden. Nun, diese beiden Transformationen führen jeden der projektiven Quadranten in sich über. Das ergibt sich leicht daraus, daß jeder projektive Quadrant der Durchschnitt von projektiven Gebieten ist, die durch je zwei Dreieckseiten begrenzt werden. Jedes dieser sechs projektiven Winkelgebiete wird durch die isotome und ebenso durch die isogonale Verwandtschaft offenkundig auf sich selbst oder auf einen Teil von sich abgebildet. Abbildung auf einen Teil widerspräche aber dem involutorischen Charakter der beiden Transformationen.

Bei dieser Gelegenheit geben wir noch eine weiterhin nützliche Gebietseinteilung der projektiven Quadranten eines Dreiecks in euklidische Gebiete an, die durch die isogonale Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ des Dreiecks untereinander vertauscht werden. *Als Begrenzungen der Gebiete können die Geraden des Dreiecks, die uneigentliche Gerade und der Umkreis gewählt werden.*

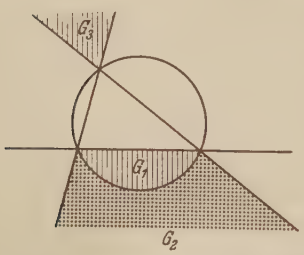


Fig. 11. Die isogonale Verwandtschaft bildet die schraffierten Gebiete aufeinander ab, das punktierte auf sich selbst.

Das läßt sich nachweisen, ohne daß man sich in die Eigenschaften von $\mathfrak{W}$ vertiefen müßte. Das Innere des Dreiecks ist, wie soeben für alle projektiven Quadranten erklärt wurde, selbstentsprechend. Es kommt also bloß auf die (euklidisch) nicht beschränkten projektiven Quadranten des Dreiecks an. Wir bezeichnen in einem dieser unbeschränkten Quadranten mit G_1 die Menge der außerhalb des Dreiecks, aber innerhalb des Umkreises gelegenen Punkte, nennen G_2 das benachbarte Gebiet und G_3 das restliche Gebiet des Quadranten (Fig. 11).

Wenn man von den Punkten der Begrenzungen absieht, ist $\mathfrak{W}$ eine topologische Abbildung, führt also G_i in ein Gebiet $\mathfrak{W}(G_i)$ über. Punkte

aus zweien der drei Gebiete $\{G_i\}$ kann $\mathfrak{W}(G_i)$ nicht enthalten, sonst wäre ja $\mathfrak{W}(G_i)$ nicht zusammenhängend. Nun kann nicht $\mathfrak{W}(G_1) \subseteq G_1$ sein. Punkte von G_1, die nahe dem Umkreis liegen, haben nämlich weit entfernte Winkelgegenpunkte, die mithin nicht im beschränkten Gebiet G_1 liegen können. Findet sich in G_i ein Fixpunkt der Abbildung $\mathfrak{W}$ vor, so ist $\mathfrak{W}(G_i) \subseteq G_i$. Die Fixpunkte sind die Mittelpunkte der Berührungskreise; ein solcher kommt in einem der Gebiete $\{G_i\}$ vor, aber sicherlich nicht in G_3. Aus all dem folgt:

$$\mathfrak{W}(G_2) \subseteq G_2, \qquad \mathfrak{W}(G_1) \subseteq G_3, \qquad \mathfrak{W}(G_3) \subseteq G_1.$$

Wäre $\mathfrak{W}(G_2) \subset G_2$, so ergäbe nochmalige Anwendung der isogonalen Verwandtschaft: $\mathfrak{W}^2(G_2) \subseteq \mathfrak{W}(G_2) \subset G_2$. Ähnlich schließt man aus $\mathfrak{W}(G_3) \subset G_1$ auf $\mathfrak{W}^2(G_1) \subset G_1$ und aus $\mathfrak{W}(G_1) \subset G_3$ auf $\mathfrak{W}^2(G_3) \subset G_3$. Das sind Widersprüche dazu, daß $\mathfrak{W}$ eine Involution ist. Somit ergibt sich, daß *die isogonale Verwandtschaft G_2 auf sich selbst abbildet, G_1 und G_3 aufeinander.* Bei der isotomen Verwandtschaft liegen übrigens die Dinge fast genau so, nur spielt die Steinersche Umellipse die Rolle des Umkreises.

§ 19.

Gegenstellung und Gegenspiegelbild.

Wir betrachten nebst der Hauptstellung eines Getriebes, das eine dreispitzige Koppelkurve erzeugt, noch diejenige Stellung des Getriebes, in der das Gelenkviereck zum Gelenkviereck in der Hauptstellung bezüglich des Steges spiegelbildlich ist; sie heiße die *Gegenstellung.* Wird das ganze Getriebe in seiner Hauptstellung am Steg gespiegelt, so erhalten wir eine Figur, die das *Gegenspiegelbild* heißen möge. Das Gegenspiegelbild des Koppeldreiecks ist nicht etwa die Lage des Koppeldreiecks in der Gegenstellung. Um diese Lage zu erhalten, muß vielmehr das Koppeldreieck an die Koppel der Gegenstellung so angesetzt werden, daß es zum Koppeldreieck der Hauptstellung gleichsinnig kongruent ist. Mit anderen Worten: *Wird, ausgehend von der Gegenstellung, das Koppeldreieck an der Koppel gespiegelt, so erhält man das Gegenspiegelbild.* Dies veranschaulicht Fig. 12 an dem Getriebe, das in seiner Hauptstellung S_1 erzeugt. Auch im nächstfolgenden exemplifizieren wir an demselben Getriebe.

Hauptspiegelbild und Gegenspiegelbild sind zueinander symmetrisch in bezug auf den Stegmittelpunkt, denn die beiden Spiegelbilder wurden ja durch Spiegelung an der Symmetralen des Steges bzw. am Steg selbst hergestellt.

Ich verweise darauf, daß aus dem Hauptspiegelbild des in Rede stehenden Getriebes durch eine zentrische Ähnlichkeit die Figur des Drei-

ecks $\{A_i\}$ mitsamt der Strecke s_1 hervorgeht. Das Ähnlichkeitszentrum ist der Schwerpunkt C von $\{F_i\}$, das Verzerrungsverhältnis $-2:1$ (vgl. § 9). Aus der zentrischen Symmetrie von Haupt- und Gegenspiegelbild folgt daher, daß auch aus dem Gegenspiegelbild durch zentrische Ähnlichkeit das Dreieck $\{A_i\}$ vermehrt um die Strecke s_1 entsteht. Zentrum ist nunmehr A_1, weil dieser Punkt bei Spiegelung an der Stegmitte in F_1 übergeht und F_1 durch die Ähnlichkeit $\{F_i\} \to \{A_i\}$ nach A_1 zurückkehrt; das Ähnlichkeitsverhältnis ist $2:1$, weil das Punktepaar F_2, F_3 vermöge

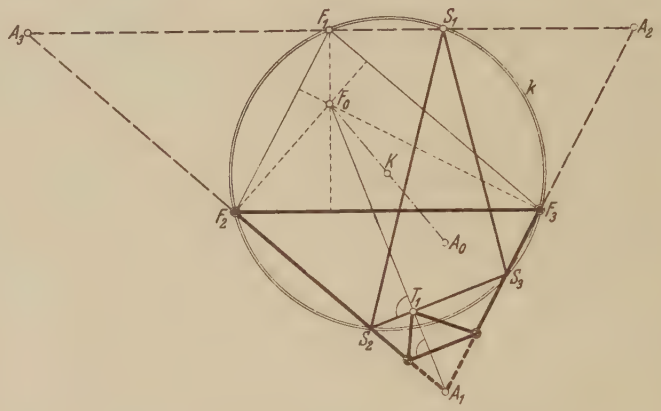


Fig. 12. Gegenstellung und Gegenspiegelbild.

der soeben genannten beiden Operationen in A_3, A_2 transformiert wird. Mithin ist die Gegenstellung (und das Gegenspiegelbild) der Koppel zu s_1 parallel und halbiert den Abstand zwischen A_1 und s_1. Daher fällt der zu A_1 bezüglich der Koppel in der Gegenstellung symmetrische Punkt T_1, den wir vorhin als die Lage des beschreibenden Punktes in der Gegenstellung erkannt hatten, auf die Gerade s_1. Noch mehr! Als Schnittpunkt der Arme ist A_1 Momentanpol für die Gegenstellung. Demnach ist in T_1 die Tangente an die Koppelkurve $\perp A_1 T_1$, inzidiert also mit s_1. Das heißt, die Koppelkurve berührt in T_1 das Spitzendreieck.

Die Gerade $A_1 T_1$ geht durch F_0, den Höhenschnittpunkt von $\{F_i\}$. Gemäß § 12 ist ja der Grundkreisdurchmesser $F_1 K \perp s_1$, also $F_1 K \parallel A_1 T_1$. Aus der Ähnlichkeit $\{F_i\} \to \{A_i\}$ folgt somit, daß die Gerade $A_1 T_1$ durch den Umkreismittelpunkt von $\{A_i\}$ oder, was dasselbe ist, durch den Höhenschnittpunkt in $\{F_i\}$ geht, wie behauptet wurde. Wir haben als Ergebnis das

Berührungstheorem. *Die dreispitzige Koppelkurve berührt die Seiten $\{s_i\}$ des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ in den Fußpunkten $\{T'_i\}$ der Lote, die aus dem Höhenschnittpunkt F_0 des Brennpunktedreiecks $\{F_i\}$ gefällt werden.*

Da A_i ein Ankreismittelpunkt für $\{S_i\}$ ist, wird s_i in T_i auch von einem Ankreis berührt, wobei gilt:

In bezug auf die Mitte der Strecke s_i liegt T_i zum Berührungspunkt des Inkreises symmetrisch.

Die erwähnten Punkte sind nämlich die Normalprojektionen auf s_i von den Punkten K, F_0, A_0, und auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks $\{A_i\}$ gilt $F_0 K = K A_0$.

§ 20.

Isogonalinvarianz der Koppelkurve.

Zwischen dem Berührungstheorem und dem Satz vom Spitzenziel (§ 17) besteht eine tiefliegende Verbindung.

Zunächst erkennt man aus dem Berührungstheorem und dem darauffolgenden Zusatz mit Rücksicht auf die Ordnung Sechs der Koppelkurve Γ, daß $\{S_i\}$ nicht bloß Spitzen auf Teilbögen von Γ sind, sondern, daß Γ auch *im großen nur einmal durch jede Spitze S_i hindurchgeht*, ferner, daß die Berührung in T_i zweipunktig ist.

Wir üben jetzt auf Γ die isogonale Transformation $\mathfrak{W}$ bezüglich des Dreiecks $\{S_i\}$ aus. Die so entstehende Kurve $\mathfrak{W}(\Gamma)$ ist ersichtlicherweise wieder eine trizirkulare Sextik. Weil zwischen Γ und s_i in T_i eine Berührung erster Ordnung stattfindet, hat $\mathfrak{W}(\Gamma)$ in S_i eine Spitze, deren Tangente aus der Geraden $S_i T_i$ durch Spiegelung am Winkel $s_{i-1} s_{i+1}$ hervorgeht. Nun ergibt die ergänzende Bemerkung zum Berührungstheorem zusammen mit dem Satz vom Spitzenziel, daß die Geraden $\{t_i\}$ Spitzentangenten auch von $\mathfrak{W}(\Gamma)$ sind. Umgekehrt liefern die Spitzen $\{S_i\}$ von Γ Berührungen zwischen $\mathfrak{W}(\Gamma)$ und den Seiten $\{s_i\}$, und zwar in den Punkten $\{T_i\}$. Also treffen Γ und $\mathfrak{W}(\Gamma)$ einander in den Kreispunkten, sowie in $\{S_i\}$ und $\{T_i\}$. Die Kreispunkte zählen mindestens je neunfach als Schnittpunkte, weil beide Kurven trizirkular sind. In den Spitzen $\{S_i\}$ und in den Punkten $\{T_i\}$ haben Γ und $\mathfrak{W}(\Gamma)$ gemeinsame Tangenten; daher sind die Punkte $\{S_i\}$ sechsfach, die Punkte $\{T_i\}$ doppelt zu zählen. Insgesamt wurden 42 Schnittpunkte der Sextiken Γ, $\mathfrak{W}(\Gamma)$ nachgewiesen und damit die

Isogonalinvarianz der Koppelkurve. *Sie entspricht sich selbst in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ des Dreiecks $\{S_i\}$.*

Dieser sehr bemerkenswerte Satz *gilt auch für jede beliebige Koppelkurve*[31]) (was hier bloß referiert sei), wenn $\{S_i\}$ deren Doppelpunkte sind, die auf dem Grundkreis (Kreis durch die Brennpunkte) liegen.

---

[31]) Bennett[1]), S. 73; Morley[1]), S. 146; Haarbleicher[1]), S. 19; für den Sonderfall $\{F_i\} = \{S_i\}$ vgl. Alt[2]).

Hierzu ist zu bemerken: Bei Wattschen Kurven degeneriert der Grundkreis, der Satz wird selbstverständlich und beinhaltet bloß die Symmetrie der Kurve bezüglich des Steges. Sehen wir demgemäß von Wattschen Kurven ab. Eine nicht zerfallende Koppelkurve ist elliptisch oder rational. Im ersten Fall besitzt sie genau drei Doppelpunkte, welche der Grundkreis enthält. Zu diesen, den *gewöhnlichen Doppelpunkten*, gesellt sich im Falle rationaler Kurven ein vierter, *außerordentlicher Doppelpunkt* und die Vereinigung mehrerer Doppelpunkte ist möglich. Kommt zu den gewöhnlichen Doppelpunkten mehr als ein außerordentlicher Doppelpunkt hinzu, so zerfällt die Koppelkurve[32]).

Wenn im weiteren Verlauf von allgemeinen, also nicht notwendig dreispitzigen Koppelkurven die Rede sein wird, so sei ein für allemal angenommen, daß es sich nicht um Wattsche Kurven handle und daß die gewöhnlichen Doppelpunkte reell seien (wenn auch möglicherweise isolierte Doppelpunkte) und auf dem Grundkreis getrennt liegen.

Der Satz von der Isogonalinvarianz der Koppelkurve wird ergänzt durch den (hier ohne Beweis mitgeteilten)

Satz über zugeordnete Getriebestellungen. *Winkelgegenpunkte P und $\mathfrak{W}(P)$ von Γ sind dann und nur dann zwei Lagen des beschreibenden Punktes eines erzeugenden Getriebes, wenn die Gelenkvierecke der betreffenden Getriebestellungen bezüglich des Steges symmetrisch sind*[33]). Beispiele solch zugeordneter Stellungen bieten Haupt- und Gegenstellung jedes erzeugenden Getriebes einer dreispitzigen Koppelkurve.

Mit Hilfe der letzten Sätze soll folgendes Seitenstück zum Berührungstheorem bewiesen werden:

Berührt eine Koppelkurve Γ eine Seite s_i des Dreiecks $\{S_i\}$ ihrer gewöhnlichen Doppelpunkte, so geht die Normale im Berührungspunkt T_i durch den Höhenschnittpunkt im Brennpunktedreieck.

Wenn T_i von S_{i-1} und S_{i+1} verschieden ist, so ist die Berührung wegen der Ordnung von Γ zweipunktig. Hiermit übereinstimmend wird die Berührung dreipunktig, falls T_i in eine der Ecken von $\{S_i\}$ hineinrückt. In beiden Fällen entspricht der Berührung mit s_i vermöge der

[32]) Eine ausführliche Diskussion der elliptischen, rationalen und zerfallenden Koppelkurve (nebst Darstellung mittels elliptischer Parameter) gibt Morley[1]). Siehe ferner Haarbleicher[1]), S. 26, 34.

[33]) Die Korrespondenz, die $\mathfrak{W}$ auf Γ hervorruft, betrachtete zum erstenmal (allerdings außer Zusammenhang mit $\mathfrak{W}$) R. L. Hippisley, A new method of describing a three-bar curve, Proceed. London math. Soc. (2) 18 (1920), S. 136—140. Dort erscheinen P und $\mathfrak{W}(P)$ als Punkte von Γ, deren Projektionen auf f_i von der Mitte des Punktepaares P, $\mathfrak{W}(P)$ gleiche und konstante Abstände haben. Die Einführung der zugeordneten Getriebestellungen verdankt man Bennett[1]), S. 62. Vgl. auch Morley[1]), S. 144; Haarbleicher[1]), S. 24.

isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ bezüglich $\{S_i\}$ eine Spitze in der s_i gegenüberliegenden Ecke S_i. Wir greifen ein beliebiges der drei Getriebe heraus, die Γ erzeugen. Befindet sich das Getriebe in jener Stellung, bei der der beschreibende Punkt in die Spitze S_i fällt, so muß für diese Getriebestellung S_i Momentanpol sein (vgl. § 2). Also schneiden die Arme einander in S_i. In der zugeordneten Stellung gelangt der beschreibende Punkt nach T_i, wobei der zu S_i in bezug auf den Steg symmetrische Punkt S^* Momentanpol wird, weil ja die Gelenkvierecke zugeordneter Getriebestellungen Spiegelbilder bezüglich des Steges sind. Folglich ist T_i der Fußpunkt des aus S^* auf s_i gefällten Lotes. Dieses Lot geht, wie in § 15 für beliebige Koppelkurven festgestellt wurde, durch den Höhenschnittpunkt im Brennpunktedreieck.

§ 21.

Beschränkung dreispitziger Koppelkurven auf Gebiete.

Jede dreispitzige Koppelkurve Γ berührt, wie am Anfang des § 20 ausdrücklich bemerkt wurde, die Seiten ihres Spitzendreiecks $\{S_i\}$ zweipunktig, und zwar in den von den Ecken verschiedenen Punkten $\{T_i\}$. Mithin tritt Γ in der Nähe von T_i nicht aus einem durch die Geraden $\{s_i\}$ begrenzten Quadranten der projektiven Ebene in einen anderen über. Ein solcher Gebietswechsel findet auch nicht bei den Spitzen statt, da die Spitzentangenten nach § 18 von den $\{s_i\}$ verschieden sind. Außerhalb der Spitzen und Berührungspunkte kann Γ die Seiten $\{s_i\}$ nicht treffen; sonst hätte ja Γ eine höhere als die sechste Ordnung. Mithin haben wir als Zwischenresultat: Jeder Zug der Kurve Γ verläuft innerhalb eines der projektiven Quadranten von $\{S_i\}$, innerhalb, wenn hier und bei verwandten Aussagen im folgenden die Punkte $\{S_i\}$, $\{T_i\}$ vernachlässigt werden.

Wir erwähnten schon, daß die nicht zerfallenden Koppelkurven elliptisch oder rational sind. Die elliptische Koppelkurve besitzt, falls überhaupt, einen oder zwei reelle Züge, je nachdem nämlich, ob das Gelenkviereck eines erzeugenden Getriebes aus jeder Stellung durch kontinuierliche Bewegung in die am Steg gespiegelte Lage gebracht werden kann, oder nicht. Deshalb gilt im Hinblick auf den Satz über zugeordnete Getriebestellungen:

Die beiden Züge einer zweiteiligen Koppelkurve sind zueinander isogonal[84]) *bezüglich* $\{S_i\}$.

Hat insbesondere eine dreispitzige Koppelkurve zwei reelle Züge, so entsprechen sie sich also wechselseitig in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ von $\{S_i\}$; da nun jeder Zug in einem Quadranten liegt und wir außerdem

[84]) Morley[1]), S. 153.

wissen, daß die Quadranten durch $\mathfrak{W}$ auf sich selbst abgebildet werden (§ 18), können wir sagen:

Jede zweiteilige und umsomehr jede einteilige Koppelkurve mit drei Spitzen liegt in einem einzigen der projektiven Quadranten ihres Spitzendreiecks.

In welchem? Das kann mittels der Spitzentangenten $\{t_i\}$ entschieden werden, weil in der Nähe der Spitze S_i auf der Kurve Γ und auf t_i Punkte existieren, die demselben Quadranten angehören.

Es sei Q_i der den Ankreismittelpunkt A_i von $\{S_i\}$ enthaltende projektive Quadrant, Q_0 der den Inkreismittelpunkt A_0 enthaltende. Da das Spitzenziel sich in Q_0 befindet (§ 18), tritt t_i bei S_i aus Q_0 nach Q_i

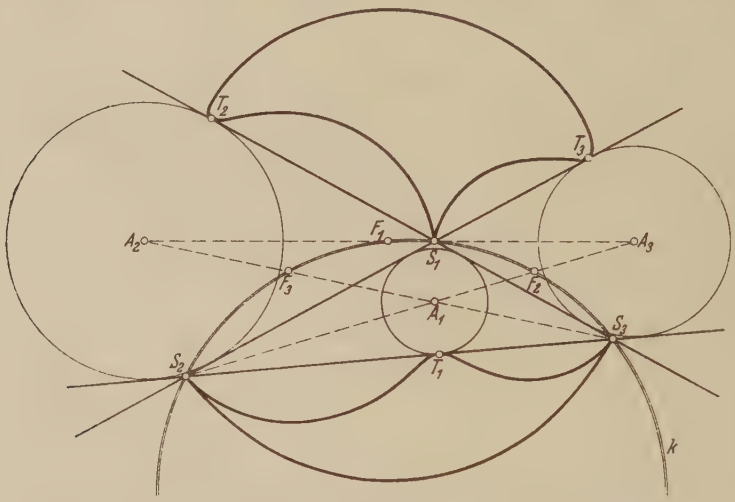


Fig. 13. Dreispitzige Koppelkurve und Berührungskreise des Spitzendreiecks.

über; denn A_0 und A_i fallen in eines der beiden von S_i ausstrahlenden projektiven Winkelgebiete. Mithin gehört Γ entweder Q_0 oder Q_i an. Stellen wir diese Alternative für $i = 1, 2, 3$ auf, so lassen die drei Alternativen nur eine gemeinsame Lösung zu, nämlich:

Die reellen Züge einer dreispitzigen Koppelkurve liegen in demselben Quadranten Q_0 des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ wie der Inkreis.

Aus diesem Satz kann, gestützt auf das Berührungstheorem und die anschließende Ergänzung (§ 19), gefolgert werden:

Die dreispitzige Koppelkurve berührt die in den übrigen Quadranten $\{Q_i\}$ des Spitzendreiecks befindlichen eingeschriebenen Kreise von außen, was Fig. 13 für eine zweiteilige Kurve mit stumpfwinkligem Brennpunktedreieck illustriert.

Nunmehr richten wir unser Augenmerk wieder darauf, daß zu einem vorgegebenen, nicht ausgearteten Spitzendreieck $\{S_i\}$ vier dreispitzige Koppelkurven existieren (§ 10). Jede dieser Kurven ist eindeutig bestimmt, sobald ein beliebiger $\{s_i\}$ berührender Kreis als Inkreis angesehen wird. Eines der obenstehenden Ergebnisse kann jetzt auch so formuliert werden:

In jedem Quadranten des Spitzendreiecks liegt genau eine dreispitzige Koppelkurve.

§ 22.

Engere Gebietseinschränkungen.

Die letzte Aussage läßt sich verschärfen, wenn diejenige Einteilung der Ebene in zehn Gebiete herangezogen wird, für welche die Geraden $\{s_i\}$, die uneigentliche Gerade und der Grundkreis k die Begrenzungen liefern (vgl. § 18).

Als trizirkulare Sextik trifft jede dreispitzige Koppelkurve die uneigentliche Gerade bloß in den Kreispunkten. Mit k hat sie außer den Kreispunkten nur die Spitzen selbst gemein. In ihnen durchsetzt sie k nicht. Andernfalls wäre ja mindestens in einem Punkt S_i die Tangente t_i zugleich Grundkreistangente und dann entspräche S_i in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ bezüglich $\{S_i\}$ eine unendlich ferne Berührung mit s_i, was soeben ausgeschlossen wurde. Dies alles ergibt im Verein mit der Unüberschreitbarkeit der $\{s_i\}$, daß jeder Zweig der Kurve in einem der angegebenen zehn Gebiete enthalten ist. Befassen wir uns zuerst mit der Koppelkurve, die in einem der ins Unendliche reichenden projektiven Quadranten liegt, und übernehmen wir die Bezeichnung seiner Teile aus Fig. 11. Kein Zweig dieser Kurve kann sich in G_2 befinden. Ein solcher könnte nämlich nicht an jene Spitze herankommen, die zur Begrenzung von G_3 gehört und ein allenfalls vorhandener zweiter Zug müßte dem ersten vermittels $\mathfrak{W}$ entsprechen, demnach in $\mathfrak{W}(G_2) = G_2$ liegen, könnte also ebensowenig zu dieser Spitze gelangen. Hiermit erhalten wir den

Anordnungssatz. *Von den vier Koppelkurven mit denselben drei Spitzen sind mindestens drei zweiteilig: In den Gebieten außerhalb des Spitzendreiecks, aber innerhalb des Grundkreises, liegt je ein Kurvenzug; der zugehörige zweite Kurvenzug befindet sich immer in dem nicht benachbarten Gebiet desselben projektiven Quadranten, außerhalb des Dreiecks* (Fig. 13). *Die restlichen drei unbeschränkten Gebiete* (analog G_2 in Fig. 11) *bleiben leer. Im Inneren des Spitzendreiecks verläuft eine zweiteilige* (Fig. 14) *oder einteilige Koppelkurve* (Fig. 16); *den Übergang bilden rationale Kurven* (Fig. 15).

Man kann die Gebiete, auf die eine Koppelkurve Γ gemäß dem Anordnungssatz beschränkt ist, in folgender Weise noch mehr einengen.

Kommt der beschreibende Punkt eines der erzeugenden Getriebe mit einer Spitze S_i zur Deckung, so haben sich, wie wir wissen, die Seiten b_2, b_3 des Koppeldreiecks derart bewegt, daß sie in die Geraden der Arme m_3 und m_2 fallen. Daher erreicht der Abstand eines auf Γ wandernden Punktes von einem beliebigen Stegendpunkt in S_i ein absolutes Extrem.

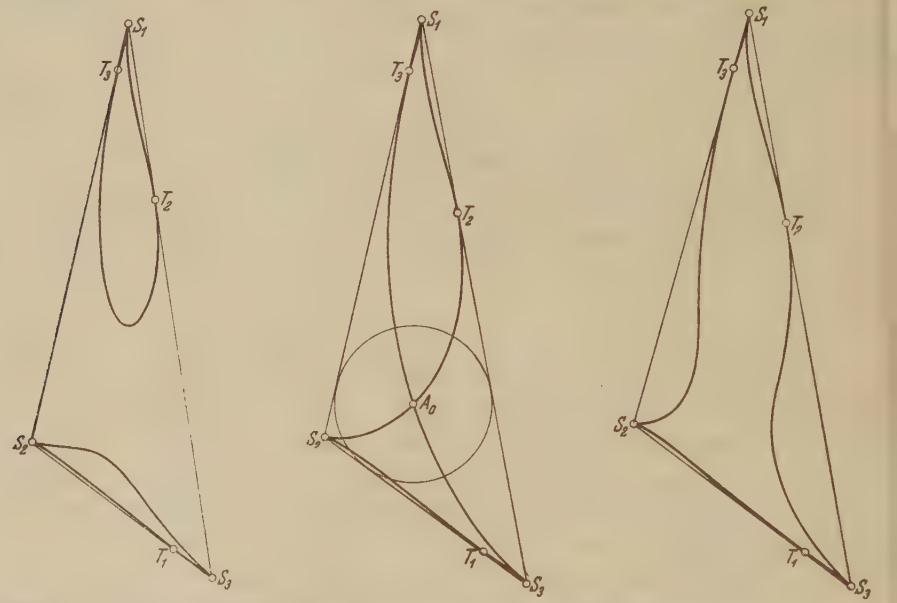


Fig. 14 bis 16. Zweiteilige bzw. rationale bzw. einteilige Koppelkurve innerhalb ihres Spitzendreiecks.

Also *liegen die reellen, nicht isolierten Punkte von Γ entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises e_i, dessen Mittelpunkt F_i ist und der zugleich S_{i-1} und S_{i+1} trifft. Dasselbe gilt für den konzentrischen Kreis e_i^*, der durch S_i geht.*

Weil die reellen Züge von Γ zu allen drei Spitzen hingelangen, entscheidet für jeden einzelnen der Kreise $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ die Lage einer mit ihm nicht inzidenten Spitze auch die Seite, auf welcher Γ verläuft. Jedenfalls kann man sagen:

Die reellen Züge von Γ finden im Ringstreifen zwischen e_i und e_i^* Platz.

Diese Regel gestattet fast immer, von den Γ im Anordnungssatz zugewiesenen Gebieten einen Teil fortzunehmen. Sie würde bloß dann versagen, wenn $\{S_i\}$ gleichseitig und Γ die Kurve innerhalb $\{S_i\}$ wäre.

Angenommen, e_i^* sei kein Nullkreis ($F_i \neq S_i$). Dann ist nicht schwer zu sehen:

An e_i^* tritt Γ außer in der Spitze S_i noch einmal heran, und zwar in einem Punkte T_i^* berührend.

Zeichnen wir das Koppelgetriebe mit dem Steg f_1 etwa in der Stellung, wenn der beschreibende Punkt nach S_2 kommt (Fig. 17). Dies ist also nicht die Hauptstellung des Getriebes (sondern die Stellung $\mathfrak{S}_2$ aus § 3). Wir lösen nun die gelenkige Verbindung bei B_3 und drehen den Arm m_3 in die bezüglich f_1 spiegelbildliche Lage m_3^*. Hierauf drehen wir das Koppeldreieck und den Arm m_2 gemeinsam um F_2 so lange, bis die Ecke B_3 des Koppeldreiecks das freie Ende von m_3^* trifft, worauf die Gelenkverbindung wiederhergestellt werden kann. Damit ist eine neue Stellung des Koppelgetriebes erreicht, in welcher der beschreibende Punkt eine von S_2 verschiedene Lage T_2^* auf e_2^* einnimmt. Denn nur für $F_2 = S_2$ fiele m_3^* mit m_3 zusammen, nämlich in die Gerade f_1. Weil e_2^* einzig die Spitze S_2 enthält, ist T_2^* keine Spitze, und da Γ den Kreis e_2^* nicht überschreiten kann, liegt in T_2^* Berührung vor.

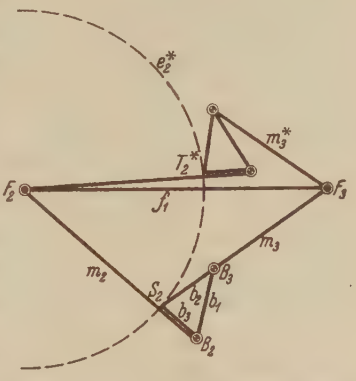


Fig. 17. Zwei Getriebestellungen; der beschreibende Punkt kommt in ihnen F_2 am nächsten.

§ 23.

Rationale dreispitzige Koppelkurven.

Wie der Anordnungssatz besagt, liegt eine rationale Koppelkurve mit drei Spitzen notwendig im Inneren ihres Spitzendreiecks $\{S_i\}$. Also ist A_0 Inkreismittelpunkt im engeren Sinn, befindet sich daher im Inneren des Dreiecks $\{A_i\}$ der Ankreismittelpunkte von $\{S_i\}$ und da A_0 der Höhenschnittpunkt in $\{A_i\}$ ist, muß $\{A_i\}$ und infolgedessen auch das zu $\{A_i\}$ ähnliche Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ *spitzwinkelig* sein. Mithin ist auch das zu $\{F_i\}$ symmetrische Dreieck $S_1F_3F_2$ spitzwinkelig. Folglich hat das erzeugende Getriebe mit dem Steg f_1 (und ebenso jedes erzeugende Getriebe) in der Hauptstellung ein nicht überschlagenes Gelenkviereck (vgl. Fig. 3). Demnach gilt hier Gleichung (5) mit dem Pluszeichen.

Ändern wir bei einem solchen Gelenkviereck die Stablängen derart, daß die Längen der Koppel und eines Armes vertauscht werden[35]), so ist das neue Gelenkviereck ersichtlicherweise auch in einem Getriebe mit einer Kreislage (§ 5) enthalten. Die zugehörigen Dreiecke $S_1F_3F_2$ und $\{F_i\}$ sind zu den entsprechenden Dreiecken des ursprünglichen Getriebes ungleichsinnig ähnlich, weil in diesen Dreiecken durch Vertauschung zweier

[35]) Über diese Vertauschung bei allgemeinen Koppelgetrieben vgl. G. Kœnigs, Leçons de cinématique. Cinématique théorique, Paris 1897, S. 266.

Stablängen des Gelenkvierecks bloß die Reihenfolge der Winkel umgekehrt wird. Das geht aus den Gleichungen (1) und (3) in § 6 mit Rücksicht auf die Spitzwinkeligkeit hervor. Da eine dreispitzige Koppelkurve durch ihr Brennpunktedreieck eindeutig bestimmt ist (§ 9), bedeutet es somit keine wesentliche Einschränkung, wenn wir nun bei der Ermittlung rationaler Koppelkurven mit drei Spitzen voraussetzen, die Koppel sei nicht länger als die Arme.

Eine rationale Koppelkurve entsteht dann, wenn das erzeugende Getriebe eine *Verzweigungslage* einnehmen kann, d. h. eine Lage, in der die Arme und die Koppel mit der Geraden des Steges gleichzeitig inzidieren. Wird die Steglänge gleich Eins gesetzt (wie in § 6), so liefert die Verzweigungslage eine Gleichung von folgender Art für die Stablängen:

$$\pm b_1 \pm m_2 \pm m_3 = 1. \tag{9}$$

Umgekehrt reicht das Bestehen einer solchen Gleichung für das Zustandekommen einer Verzweigungslage hin.

Im Falle dreispitziger Koppelkurven ist der Steg die längste Seite des Gelenkvierecks (§ 5); bei rationalen Kurven ist daher gemäß unserer Annahme die Koppel die kürzeste oder eine kürzeste Viereckseite. Demnach kann (9) nur mit dieser Vorzeichenkombination[36]) bestehen:

$$\boxed{-b_1 + m_2 + m_3 = 1.} \tag{10}$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst dazu verwenden, um die Konstruktion von Koppelgetrieben, die rationale dreispitzige Koppelkurven erzeugen, vollständig durchzuführen. Gegeben sei der Steg f_1 und der Koppelendpunkt B_2 in der Hauptstellung, also auf dem Kreis c mit f_1 als Durchmesser. Das andere Koppelende B_3 werde gesucht.

Wie (10) lehrt, muß $B_3F_3 - B_3B_2 = F_2F_3 - F_2B_2$ sein. Daher befindet sich B_3 auf der Hyperbel h, von der F_2 ein Punkt und B_2, F_3 die Brennpunkte sind; B_3 ist ein Restschnittpunkt des Kreises c mit dem F_2 enthaltenden Hyperbelast (Fig. 18). Weil c durch die Brennpunkte von h geht, sind *alle Schnittpunkte von c und h stets reell.*

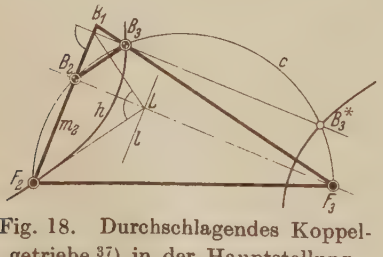


Fig. 18. Durchschlagendes Koppelgetriebe[37]) in der Hauptstellung.

Um nun B_3 zu finden, ziehe ich das Kreisbüschel heran, dessen Grundpunkte die Hyperbelbrennpunkte B_2, F_3 sind. Die Kreise des Büschels schneiden h nach je vier Punkten, die paarweise auf Parallelen zu B_2F_3 liegen. Somit sind diese parallelen Hyperbelsehnen einander durch

[36]) Die gleiche Normierung bei Morley[1]), S. 154.

[37]) Die zugehörige Koppelkurve zeigt Fig. 15 (im doppelten Maßstab).

eine algebraische Konstruktion zugeordnet, offenkundig in umkehrbar eindeutiger und involutorischer Weise. Sie bilden also[38]) eine quadratische Parallelstrahlinvolution i, welche auf der zum Brennpunkt B_2 polaren Leitlinie l der Hyperbel eine Punktinvolution I abschneidet, und zwar *die Involution bezüglich h konjugierter Punkte.* Die Minimalstrahlen durch B_2 berühren nämlich h in den konjugiert komplexen Schnittpunkten L', L'' von h und l. Jeder Minimalstrahl durch B_2 samt dem nicht parallelen Minimalstrahl durch F_3 ist ein zerfallener Kegelschnitt, der dem Kreisbüschel angehört. Daher sind L', L'' die Doppelpunkte von I, was mit der Behauptung gleichwertig ist.

Aus B_2 wird I durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert. Mit deren Hilfe wäre es ein leichtes, zur Geraden $\| B_2F_3$ durch F_2 die in i zugeordnete Gerade, welche durch B_3 geht, zu zeichnen. Man kann aber noch eine kleine Vereinfachung mittels des Punktes L erzielen, in dem die Leitlinie l die Achse B_2F_3 trifft. Dieser Punkt ergibt sich als Schnitt von B_2F_3 mit der Tangente an h in F_2. Die Gerade des Armes m_2 wird von i nach einer zu I kongruenten Involution geschnitten, welche demnach aus L durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert wird Hiermit sind wir zu folgender Konstruktion gelangt:

Von den Halbierenden des Winkels $B_2F_2F_3$ schneidet eine die Strecke B_2F_3, und zwar in L. Dort errichte man auf F_2L die Senkrechte und ziehe durch deren Schnittpunkt mit m_2 die Parallele zu B_2F_3. Sie trifft den Kreis c in B_3 und B_3^*, wobei der näher an B_2 gelegene Punkt B_3 auf dem Hyperbelast durch F_2 liegt. Zu dem einen Koppelende B_2 hat sich somit *eindeutig* das andere ergeben. (Der Punkt B_3^* liefert ein Gelenkviereck, das aus dem eben ermittelten durch Festhalten der Stäbe f_1, m_2 und Vertauschen der übrigen entsteht. Dies führt, wie vorhin angemerkt wurde, zu nichts Neuem.)

Bei rationalen dreispitzigen Koppelkurven tritt zu den Spitzen ein weiterer, der außerordentliche Doppelpunkt hinzu. Weil der Steg jedes erzeugenden Getriebes, wie ebenfalls bereits erwähnt wurde, länger als die übrigen Seiten des Gelenkvierecks ist, kann dieses weder Parallelogramm, noch Deltoid, noch weniger Rhombus sein. Daher zerfällt die Koppelkurve nicht; sie enthält nebst den Spitzen und dem außerordentlichen Doppelpunkt keinen Doppelpunkt mehr.

In der Verzweigungslage des Gelenkvierecks, wenn es also in die Gerade f_1 zusammenklappt, trennen einander zufolge (10) die Gegeneckenpaare B_2, F_3 und B_3, F_2 des Gelenkvierecks nicht. Daher sind die Momentanpole für die Verzweigungslage, nämlich das zu beiden Gegen-

[38]) Vgl. L. Berzolari, Algebraische Transformationen und Korrespondenzen, Encyklop. math. Wiss. III C 11, S. 1803.

eckenpaaren harmonische Punktepaar, reell. Somit sind die Getriebe, die eine rationale dreispitzige Koppelkurve Γ erzeugen, beweglich und Γ besitzt einen reellen Teil. In der Verzweigungslage befindet sich der beschreibende Punkt im außerordentlichen Doppelpunkt. Jetzt ergibt der Satz über zugeordnete Getriebestellungen (§ 20), daß der außerordentliche Doppelpunkt ein Fixpunkt der isogonalen Verwandtschaft bezüglich des Spitzendreiecks $\{S_i\}$, also der Mittelpunkt eines Berührungskreises von $\{S_i\}$ ist[39]). Die Kurvennormalen in ihm gehen durch die Momentanpole für die Verzweigungslage und sind folglich reell. Der außerordentliche Doppelpunkt ist demnach nicht isoliert, woraus wir schließen, daß er, wie der ganze reelle Kurvenzug, im Inneren von $\{S_i\}$ liegt:

Der außerordentliche Doppelpunkt ist für $\{S_i\}$ der Inkreismittelpunkt im engeren Sinn (Fig. 15).

§ 24.

Ein Nomogramm.

Wir verschaffen uns nun eine Übersicht über die Gelenkvierecke aller Koppelgetriebe, die rationale dreispitzige Koppelkurven erzeugen.

Auch weiterhin sei die Steglänge $f_1 = 1$. Setzt man

$$-b_1 = x_1, \quad m_2 = x_2, \quad m_3 = x_3, \tag{11}$$

so nimmt die Gleichung (5), welche, wie bereits gesagt, im Falle rationaler Kurven mit dem Pluszeichen zu lesen ist, folgende Gestalt an:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\,x_1 x_2 x_3 = 1. \tag{12}$$

An Stelle von (10) tritt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{13}$$

Werden die $\{x_i\}$ als Abstände eines Punktes von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe Eins gedeutet, so ist (13) stets erfüllt und (12) ist die Gleichung einer Kubik Ξ. Diese hat, homogen geschrieben, die Form:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\,(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{14}$$

Die Konstante der Hesseschen Normalform der Kubik Ξ ist $\dfrac{5 + \sqrt[3]{100}}{5 - 2\sqrt[3]{100}}$; das Doppelverhältnis der Tangenten aus jedem ihrer Punkte hat u. a. den Wert $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$.

Die Transformation $\{y_i = x_i + 1\}$ führt (14) in die Cayleysche Normalform

$$(y_1 + y_2 + y_3)^3 - 32\,y_1 y_2 y_3 = 0$$

---

[39]) Morley[1]), S. 156.

über, welche leicht erkennen läßt, daß Ξ eine „Dreieckskurve" ist, die innerhalb des Dreiecks $y_1 y_2 y_3 = 0$ der Wendeasymptoten einen ovalen Kurvenzug Ω besitzt, außerhalb einen aus drei hyperbelähnlichen Ästen bestehenden Kurvenzug[40]) (Fig. 19).

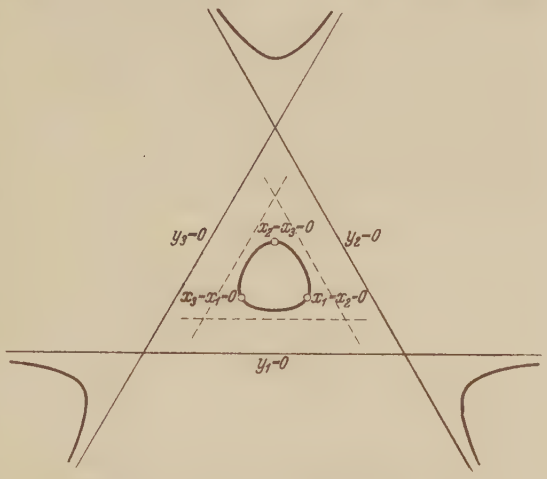


Fig. 19. Kubik nach Gleichung (14). (Gestrichelt: Inflexionsachsen.)

Mittels (11) ist also jedes erzeugende Getriebe einer rationalen dreispitzigen Koppelkurve auf einen Punkt von Ξ abgebildet. Weil aber b_1, m_2, m_3 als Stablängen positive Zahlen sind, kommt von der Kubik Ξ zunächst nur jener Bogen $\overset{c}{\Omega}$ des Ovals Ω in Betracht, der die Punkte $x_1 = x_2 = 0$ und $x_1 = x_3 = 0$ verbindet und $x_2 = x_3 = 0$ nicht enthält. Da für die in Rede stehenden Getriebe beispielsweise m_2 beliebig zwischen 0 und 1 gewählt werden kann, gilt umgekehrt:

Die Abstände eines jeden Punktes des Bogens $\overset{c}{\Omega}$ von den Koordinatenachsen $\{x_i = 0\}$ sind die Längen der Arme bzw. der Koppel des erzeugenden Gelenkvierecks einer dreispitzigen rationalen Koppelkurve, während die Steglänge gleich der Höhe des Koordinatendreiecks ist (Fig. 20).

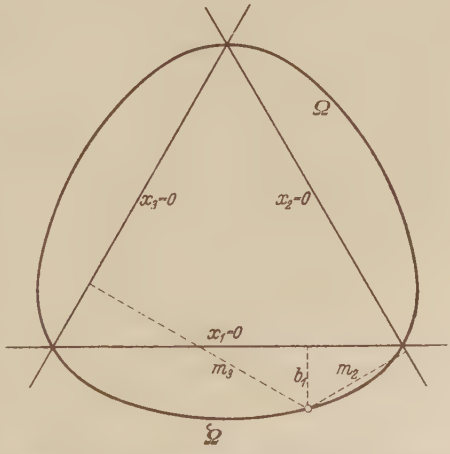


Fig. 20. Nomogramm der Gelenkvierecke aller erzeugenden Getriebe rationaler dreispitziger Koppelkurven. (Das Ablesebeispiel entspricht Fig. 18.)

Dabei ist die Reihenfolge, in der die ersten drei Längen den Armen und der Koppel zugewiesen werden, unerheblich, wie in § 23 auseinandergesetzt wurde. Aus Gründen der Symmetrie darf man von jedem Punkt des Ovals Ω ausgehen; Beschränkung auf den Teilbogen $\overset{c}{\Omega}$ ist bei der Anwendung

[40]) Vgl. H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung (Sammlung Schubert 43), Leipzig 1905, S. 246.

obiger Regel überflüssig. Zum Zeichnen von Ω zieht man mit Vorteil die sextaktischen Kegelschnitte in den Ecken des Koordinatendreiecks $\{x_i = 0\}$ heran. Diese Kegelschnitte sind Parabeln[41]), deren Scheitel die Ecken des Koordinatendreiecks sind und die je zwei Seiten des Dreiecks $\{x_i = -\frac{1}{4}\}$ berühren; sie bieten eine vorzügliche Annäherung an Ω. Nebst den Ecken des Koordinatendreiecks hat Ω noch drei Scheitel mit den Koordinaten $\{x_i = 2 - \sqrt{5},\ x_{i-1} = x_{i+1} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\}$. Die Krümmungsmittelpunkte dieser Scheitel fallen beinahe in die Ecken des Koordinatendreiecks.

Zweiter Teil:

Spezielle Koppelkurven-Büschel.

§ 25.

Grundbüschel.

Weitere Aufschlüsse über dreispitzige, ja über allgemeine Koppelkurven gewinnen wir durch deren Einbettung in besondere Koppelkurven-Büschel.

Wir betrachten ein System von Koppelkurven, die die außerordentlichen Brennpunkte $\{F_i\}$ und die gewöhnlichen Doppelpunkte $\{S_i\}$ gemein haben. Ich setze auch hier wieder voraus, daß es sich nicht um Wattsche Kurven handle und daß die Doppelpunkte reell und getrennt seien. Dann sind $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ Punktetripel auf dem Grundkreis k, zwischen denen die in §§ 13, 14 und 15 angegebenen Beziehungen bestehen. In jedem der absoluten Kreispunkte I, J berührt jede beliebige Systemkurve alle drei hindurchgehenden Äste einer willkürlich ausgezeichneten Systemkurve. In I und J vereinigen sich demnach je 12 Schnittpunkte beider Kurven; die Doppelpunkte $\{S_i\}$ zählen als vierfache Schnittpunkte. Mithin sind die 36 Schnittpunkte aller Paare von Kurven des Systems an feste Punkte, nämlich $\{S_i\}$, I und J gebunden und wir haben den

Hauptsatz über Koppelkurven-Büschel. *Die Koppelkurven mit übereinstimmenden Brennpunkten* $\{F_i\}$ *und Doppelpunkten* $\{S_i\}$ *bilden ein Büschel*[42]), das ich *Grundbüschel* nenne, weil alle seine Kurven denselben Grundkreis haben und auf ihm dasselbe charakteristische Sextupel.

---

[41]) Die Kubik Ξ besitzt also die projektive Eigenschaft, daß drei ihrer sextaktischen Kegelschnitte eine gemeinsame Tangente haben (welche überdies Inflexionsachse ist).

[42]) Roberts[1]); Cayley[1]), S. 555; Bennett[1]), S. 83; Morley[1]), S. 147; Haarbleicher[1]), S. 23. Umgekehrt: Wenn die Punktetripel $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ dem Schließungssatz (§ 15) entsprechen, so besteht das Büschel trizirkularer Sextiken mit den gemeinsamen Doppelpunkten $\{S_i\}$ und außerordentlichen Brennpunkten $\{F_i\}$ aus Koppelkurven [Roberts[1]); Cayley[1]), S. 568: Haarbleicher[1]), S. 23].

Koppelgetriebe, die etwa den Steg f_1 gemeinsam haben und deren Koppeldreiecke untereinander gleichsinnig ähnlich sind, erzeugen Koppelkurven mit gemeinsamem Brennpunktedreieck $\{F_i\}$. Damit alle erzeugten Koppelkurven auch noch dieselben gewöhnlichen Doppelpunkte $\{S_i\}$ besitzen und demnach einem Grundbüschel angehören, ist, wie gezeigt werden könnte, notwendig und hinreichend, daß für die verschiedenen Getriebe

(15) $\qquad b_2^2 - m_3^2 = \text{const.}, \qquad b_3^2 - m_2^2 = \text{const.}$

sei[43]), was übrigens für die Konstruktion der Punkte $\{S_i\}$ von Bedeutung ist[44]).

Die Gleichung jeder Koppelkurve Γ (als Punktort) in einem projektiven Koordinatensystem läßt sich auf folgende Gestalt[45]) bringen:

(16) $\Theta_1 (I_{F_1} J_{F_2} J_{F_3} \{S_i\}) (J_{F_1} I_{F_2} I_{F_3} \{S_i\}) + (I\,J)^2 (I\,J\,\{F_i\}\,\{S_i\})^2 = 0.$

Hierin ist Θ_1 eine Konstante. Die erste Klammer ist das Symbol für eine Form, deren Verschwinden die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung ergibt, die I, J und die Punkte $\{S_i\}$ enthält, in I eine durch F_1 gehende Tangente und in J einen Doppelpunkt hat, dessen Tangenten mit F_2 bzw. F_3 inzidieren. Analog ist der zweite Klammerausdruck zu verstehen; er liefert die konjugiert komplexe Kubik. Ferner stellt $(I\,J) = 0$ die uneigentliche Gerade g_∞, schließlich $(I\,J\,\{F_i\}\,\{S_i\}) = 0$ den Grundkreis k dar. Aus (16) erhält man weitere zwei Gleichungen für Γ durch zyklisches Vertauschen von 1, 2, 3.

Bei Änderung von Θ_1 behält Γ die Brennpunkte $\{F_i\}$ und die Doppelpunkte $\{S_i\}$ bei. Folglich ist (16) auch die Gleichung eines Grundbüschels mit Θ_1 als linearem Parameter. Wird nun $\Theta_1 = 0$ gewählt, so erhält man aus (16) den

Doppelkurven-Satz. *Jedes Grundbüschel von Koppelkurven enthält*[46]) *eine doppelt überdeckte Kurve* Δ; *sie zerfällt in den Grundkreis* k *und die Ferngerade* g_∞.

Angemerkt sei hier die Folgerung, daß jeder reelle Zug einer Koppelkurve ganz im Endlichen verläuft und k bloß in den Doppelpunkten trifft (vgl. § 22).

§ 26.

Durch Grundbüschel hervorgerufene Involutionen.

In einem Grundbüschel ist eine Koppelkurve eindeutig bestimmt, wenn für den Doppelpunkt S_i eine der beiden Tangenten angegeben wird. Dann ist auch die zweite Tangente in S_i bekannt. Also sind die Tangenten

[43]) Roberts[1]); Cayley[1]), S. 555.

[44]) L. Eckhart, Konstruktion der Doppelpunkte einer Koppelkurve, Reuleaux-Mitteilungen. Archiv Getriebetechn. 4 (1936), S. 697—698.

[45]) Cayley[1]), S. 568; Haarbleicher[1]), S. 15.

[46]) Roberts[1]).

in S_i einander gegenseitig auf eindeutige Weise zugeordnet, und zwar, wie man leicht sieht, durch eine algebraische Korrespondenz. Die Tangentenpaare erzeugen somit[38]) eine quadratische Strahlinvolution $\mathfrak{t}_i$.

Dem Doppelkurvensatz zufolge ist *der eine Doppelstrahl der Involution* $\mathfrak{t}_i$ *die Grundkreistangente. Der andere Doppelstrahl ist die Spitzentangente derjenigen Büschelkurve, die in* S_i *eine Spitze hat.* Solcher Kurven kann es demnach nicht mehr als eine geben.

Durch Spiegelung von $\mathfrak{t}_i$ am Winkel $s_{i-1}\, s_{i+1}$ entsteht die Strahlinvolution $\mathfrak{t}_i^*$, deren Schnitt mit der Geraden s_i die Punktinvolution $\mathfrak{s}_i$ sei. Wegen der Isogonalinvarianz (§ 20) jeder einzelnen Kurve des Grundbüschels ist $\mathfrak{s}_i$ auch der Schnitt der Geraden s_i mit dem Grundbüschel; jede Büschelkurve trifft s_i außer in den festen Punkten S_{i-1}, S_{i+1} noch in zwei Punkten, eben in einem Punktepaar aus $\mathfrak{s}_i$.

Gemäß dem Doppelkurvensatz ist der eine Doppelpunkt von $\mathfrak{s}_i$ unendlich fern. Hieraus folgt der

Symmetriesatz. *Die Involution* $\mathfrak{s}_i$ *ist symmetrisch. Im endlichen Doppelpunkt* T_i *von* $\mathfrak{s}_i$ *berührt eine Büschelkurve die Gerade* s_i.

Wir haben früher bewiesen, daß T_i der Fußpunkt des Lotes ist, das auf s_i aus dem Höhenschnittpunkt F_0 des Brennpunktedreiecks $\{F_i\}$ gefällt wird (§ 20). Daher können wir sagen, wenn die Koppelkurven einen Augenblick lang nicht als Individuen eines Grundbüschels betrachtet werden, sondern wieder jede für sich:

Die Koppelkurve schneidet die Verbindungsgerade s_i *zweier ihrer gewöhnlichen Doppelpunkte, abgesehen von diesen Punkten selbst, nach einer Sehne, deren Mittelsenkrechte durch den Höhenschnittpunkt im Brennpunktedreieck geht.*

Ein zweiter Beweis für dieses Äquivalent des Symmetriesatzes wird vielleicht erwünscht sein, zumal eine anders lautende Behauptung[47]) vorliegt. Dabei berufen wir uns auf den folgenden (ohne Beweis wiedergegebenen) Satz über Punkte P, $\mathfrak{W}(P)$ einer vorgegebenen Koppelkurve, die einander in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ des Doppelpunktedreiecks $\{S_i\}$ entsprechen.

Potenzsatz. *P und $\mathfrak{W}(P)$ haben entgegengesetzt gleiche Potenz in bezug auf einen festen Kreis* k_ϑ *mit dem Radius* ϑ *um* F_0 *als Mittelpunkt*[48]), oder:

$$\overline{F_0 P}^2 + \overline{F_0 \mathfrak{W}(P)}^2 = 2\,\vartheta^2.$$

[47]) Morley[1]), S. 147, gibt an, die beiden Schnittpunkte der Koppelkurve mit s_i seien spiegelbildlich zur Wallacegeraden von S_i. Diese Gerade liegt jedoch mitten zwischen den aus F_0 und S_i auf s_i gefällten Loten (§ 15).

[48]) Bennett[1]), S. 76; Morley[1]), S. 147; Haarbleicher[1]), S. 27.

Sind P und $\mathfrak{W}(P)$ gleichweit von F_0 entfernt, so liegen sie auf k_ϑ und sind daher ein Schnittpunktepaar dieses Kreises mit der zirkularen Quartik $\mathfrak{W}(k_\vartheta)$. Es gibt drei solche Schnittpunktepaare[49]).

Die Konstante $2\vartheta^2$ ist ein linearer Parameter für das durch $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ bestimmte Grundbüschel[49]). Aus ihm greifen wir nun die Koppelkurve Γ derart heraus, daß der Γ vermöge des Potenzsatzes zugeordnete Wert von $\vartheta = F_0 S_i$ ist, also k_ϑ durch S_i geht. Dann spaltet sich von $\mathfrak{W}(k_\vartheta)$ die Gerade s_i ab. Folglich gehört das Schnittpunktepaar von k_ϑ und s_i, dessen Symmetrale F_0 enthält, der Kurve Γ an. Dem Symmetriesatz zufolge wird s_i von allen Kurven des Grundbüschels nach Sehnen mit ein und derselben Symmetralen geschnitten, welche daher durch F_0 verläuft.

Wir suchen jetzt alle Geraden, die ein vorgelegtes Grundbüschel nach einer quadratischen Involution schneiden. Jede derartige Gerade n muß so durch einen Teil der fünf Grundpunkte des Büschels hindurchgehen, daß vier von den sechs Schnittpunkten jeder Büschelkurve mit n in die auf n liegenden Grundpunkte fallen und somit fixiert sind. Die beiden übrigen Schnittpunkte sind dann variabel und bilden eine Involution zweiten Grades. Ginge n durch S_i, so zählte dieser Punkt zweifach als Schnittpunkt mit jeder Büschelkurve, aber nicht höher, da verschiedene Koppelkurven in S_i auch verschiedene Tangenten haben. Jeder Kreispunkt muß vierfach oder dreifach gezählt werden, je nachdem, ob n im Kreispunkt einen Ast jeder Büschelkurve berührt, das heißt durch einen der Punkte $\{F_i\}$ geht oder nicht. Nun kann die Anzahl 4 der zu fixierenden Schnittpunkte nur auf zweierlei Weise in die Summanden 2, 3, 4 zerlegt werden, wenn diese auch beliebig oft vorkommen, nämlich in die Summe $2+2$ sowie in die Zahl 4 selbst.

Daher schneiden die Seiten $\{s_i\}$ des Doppelpunktedreiecks und die Minimalgeraden durch die Brennpunkte $\{F_i\}$, und bloß diese neun Geraden, das Grundbüschel nach quadratischen Involutionen.

Eine Ausnahme tritt dann und nur dann ein, wenn eine der in Rede stehenden Geraden Teil einer Büschelkurve ist. Bei den Minimalgeraden kann dies tatsächlich vorkommen (vgl. § 30). Die Involutionen $\{s_i\}$ auf den Geraden $\{s_i\}$ haben wir schon untersucht; die übrigen Involutionen wollen wir hier übergehen, da für konstruktive Anwendungen in erster Linie Involutionen auf reellen Trägern in Betracht kommen.

Die Methode, mit deren Hilfe wir die Geraden aufgefunden haben, die ein Grundbüschel nach quadratischen Involutionen schneiden, kann mit geringer Änderung auch zur Ermittlung der analogen reellen und

[49]) Morley [1]), S. 147.

nullteiligen Kegelschnitte dienen. Wenn ein solcher Kegelschnitt u den Punkt S_i enthält, so vereinigen sich dort zwei Schnittpunkte mit jeder Büschelkurve. Als reeller oder nullteiliger Kegelschnitt kann u nur durch die beiden absoluten Kreispunkte I, J oder durch keinen von ihnen gehen. Im ersteren Fall ist u ein Kreis und I, J absorbieren insgesamt sechs oder acht Schnittpunkte mit den Büschelkurven, nämlich dann, wenn der Mittelpunkt des Kreises u von den Punkten $\{F_i\}$ verschieden ist bzw. mit einem übereinstimmt.

Falls das Grundbüschel den Kegelschnitt u in Punktepaaren einer Involution zweiten Grades treffen soll, so müssen von den zwölf Punkten, die u mit jeder Büschelkurve gemein hat, zehn in den Grundpunkten des Büschels festgelegt sein. Demgemäß benötigen wir die Zerlegung der Zahl 10 in die Summanden 2, 2, 2, 6, 8. Hier gibt es wieder zwei Fälle: $2 + 2 + 6$ und $2 + 8$. Mithin haben wir folgenden Satz:

Soll ein reeller oder nullteiliger Kegelschnitt u ein Grundbüschel in Punktepaaren einer quadratischen Involution schneiden, so ist es notwendig und hinreichend, daß u ein Kreis sei, der entweder durch zwei der Punkte $\{S_i\}$ geht und einen nicht im Tripel $\{F_i\}$ enthaltenen Mittelpunkt hat, oder daß u ein Kreis (nicht Nullkreis) um einen von den Punkten $\{F_i\}$ sei, der einen einzigen der Punkte $\{S_i\}$ trifft.

Die Kreise durch je zwei der Punkte $\{S_i\}$ bilden drei Büschel. Sie sind besonders wichtig, weil mit ihrer Hilfe alle Punkte einer Koppelkurve erfaßt werden können. Das werde ich im folgenden an einem Beispiel darlegen (§ 29).

Der oben im Symmetriesatz formulierte Sachverhalt ist ein Grenzfall des nachstehenden:

Allgemeiner Symmetriesatz. *Läuft der Kreis u durch S_{i-1}, S_{i+1} und schneidet er die Kurven des Grundbüschels in Punktepaaren einer Involution* u, *so ist* u *symmetrisch.*

Zum Beweis entnehmen wir dem Grundbüschel die zerfallende Doppelkurve Δ, bestehend aus dem Grundkreis k und der Ferngeraden g_∞ (§ 25). Die Schnittpunkte von u und Δ sind S_{i-1}, S_{i+1} und die Kreispunkte I, J. Erstere zählen doppelt, letztere vierfach, eben weil Δ doppelt überdeckt ist. Nun ist zu beachten, daß man ein Punktepaar von u ja dadurch erhält, daß die zwölf Schnittpunkte zwischen u und einer Büschelkurve um die doppelt gezählten Punkte S_{i-1}, S_{i+1} und um die dreifach gezählten Kreispunkte vermindert werden. Reduziert man in dieser Weise die Schnittpunkte von u und Δ, so bleibt I, J als Punktepaar von u übrig. Mithin ist u symmetrisch.

Schließlich betrachten wir noch die Schnittinvolution e^* des Grundbüschels mit einem Kreis e^*, der einen der Punkte $\{F_i\}$ als Mittelpunkt

besitzt und der durch S_i, aber durch keinen anderen von den Punkten $\{S_i\}$ geht. Es gibt mindestens drei und höchstens neun Kreise dieser Art. Angenommen, e^* sei kein Nullkreis (wegen der gegenteiligen Annahme vgl. § 30). Wir schneiden e^* mit der Doppelkurve Δ des Büschels. Die so wie vorhin vierfach als Schnittpunkte zählenden absoluten Kreispunkte sind nunmehr bei der Erzeugung der Involution e^* auch vierfach zu tilgen. Desgleichen scheidet S_i aus und somit ergibt sich, daß *der restliche Schnittpunkt von e^* und k einer der beiden Doppelpunkte der Involution e^* ist.*

In Hinkunft werden wir Reduktionen der Schnittpunktesysteme, ähnlich den soeben ausgeführten, stillschweigend vornehmen und bloß die übrigbleibenden Schnittpunkte angeben.

§ 27.

Feuerbachbüschel.

Zwischen den Involutionen, die wir untersucht haben, existieren Zusammenhänge. Wir wollen sie an gewissen ausgezeichneten Grundbüscheln studieren, mit denen wir uns jetzt befassen.

Am Beginn des § 26 wurde vermerkt, daß in jedem Grundbüschel eine Koppelkurve vorkommt, die in S_i eine Spitze hat. Im allgemeinen sind die Punkte $\{S_i\}$ Spitzen von drei verschiedenen Koppelkurven des Grundbüschels. Es kann aber der Fall eintreten, daß $\{S_i\}$ die Spitzen einer einzigen, also dreispitzigen Büschelkurve sind. Dann besteht zwischen den Punkten $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ die Feuerbachsche Relation (§ 9). Deshalb sollen Grundbüschel, die eine dreispitzige Koppelkurve enthalten, *Feuerbachbüschel* heißen. Sind, umgekehrt, $\{F_i\}$ die Seitenmitten, $\{S_i\}$ die Höhenfußpunkte eines Dreiecks $\{A_i\}$, so gibt es genau eine Koppelkurve mit den Brennpunkten $\{F_i\}$ und den Spitzen $\{S_i\}$, also eine dreispitzige Koppelkurve in dem durch $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ bestimmten Grundbüschel.

Bei Feuerbachbüscheln zeigen die drei Involutionen $\{t_i\}$, deren Elemente die Kurventangenten in den Punkten $\{S_i\}$ sind (§ 26), eine Besonderheit: *Die von den Grundkreistangenten verschiedenen Doppelstrahlen der Involutionen $\{t_i\}$ schneiden sich in einem Punkt.* Diese Doppelstrahlen sind nämlich die Spitzentangenten der dreispitzigen Kurve, laufen also durch das Spitzenziel (§ 16).

Die eben bewiesene Beziehung zwischen den Involutionen $\{t_i\}$ gilt freilich nicht bloß für Feuerbachbüschel; sie gilt immer dann, wenn der Höhenschnittpunkt F_0 des Dreiecks $\{F_i\}$ auf der sogenannten Kubik von Darboux für das Dreieck $\{S_i\}$ liegt. In diesem Fall gehen nämlich im Dreieck $\{S_i\}$ die Ecktransversalen nach den Fußpunkten der aus F_0 auf

die Seiten $\{s_i\}$ gefällten Lote durch einen Punkt[50]), woraus mittels des letzten Satzes aus § 20 und vermöge der Isogonalinvarianz der Koppelkurven die Behauptung folgt.

Für die Fortführung der Untersuchung empfiehlt es sich, neben der von uns schon verwendeten zerfallenden Doppelkurve Δ, die nach dem

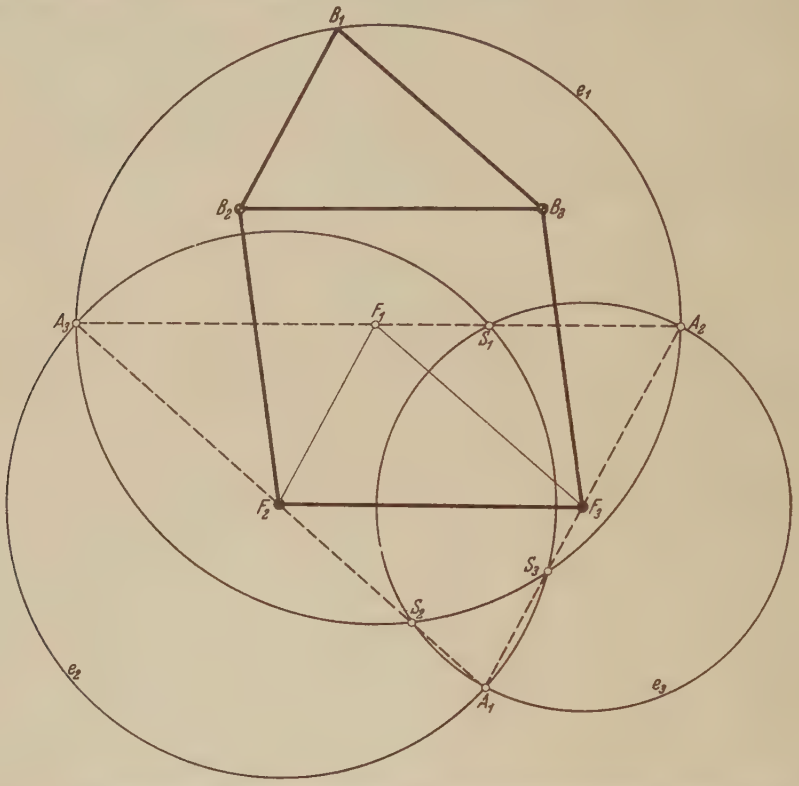


Fig. 21. Koppelgetriebe mit rhombischem Gelenkviereck; die Koppelkurve zerfällt in die Kreise e_1, e_2, e_3.

Doppelkurvensatz (§ 25) in jedem Grundbüschel enthalten ist, noch eine andere zerfallende Kurve heranzuziehen, welche in Feuerbachbüscheln vorkommt.

Man gelangt zu ihr durch die Frage nach den Koppelkurven, die von einem Koppelgetriebe erzeugt werden, dessen *Gelenkviereck ein Rhombus* ist. Verschiebt man aus einer allgemeinen Stellung eines solchen Getriebes das Koppeldreieck $\{B_i\}$ in der Richtung der parallelen Arme, bis die Koppel b_1 den Steg f_1 deckt, so geht der beschreibende Punkt B_1 in

[50]) Vgl. R. Deaux, Sur les cubiques de Darboux et de Lucas, Mathesis (2) 38 (1924), S. 395—399, 430—435.

einen festen Punkt F_1 über (Fig. 21). Daher erzeugt das Getriebe den Kreis e_1 um F_1 als Mittelpunkt, der $m_2 = m_3 = b_1 = f_1$ zum Radius hat. Wenn der Gelenkrhombus sich so bewegt hat, daß der Arm m_2 mit dem Steg f_1 zusammenfällt, so kann aus dieser Verzweigungslage heraus das Koppeldreieck sich auch um F_3 drehen, wobei B_1 den Kreis e_3 um F_3 durchläuft, dessen Radius $b_3 = f_3$ ist. In analoger Weise kann B_1 den Kreis e_2 beschreiben, der den Mittelpunkt F_2 und den Radius $b_2 = f_2$ besitzt.

Also zerfällt die von einem Koppelgetriebe mit rhombischem Gelenkviereck erzeugte Kurve in drei Kreise $\{e_i\}$ um die Mittelpunkte $\{F_i\}$. Der Radius von e_i ist der Strecke f_i gleich[51]).

Nun sei $\{F_i\}$ ein nicht ausgeartetes und auch nicht rechtwinkeliges Dreieck, $\{A_i\}$ das Außendreieck zu $\{F_i\}$. Die Seiten von $\{A_i\}$ sind ersichtlicherweise Durchmesser der Kreise $\{e_i\}$, welche daher einander in den Punkten $\{A_i\}$ schneiden, sowie in den Höhenfußpunkten $\{S_i\}$ des Dreiecks $\{A_i\}$. Die Schnittpunkte $\{S_i\}$ und die Kreismittelpunkte $\{F_i\}$ befinden sich auf dem Feuerbachschen Kreis von $\{A_i\}$. Hieraus folgt der

Kreistripelsatz. *Jedes Feuerbachbüschel enthält eine in drei reelle (einteilige) Kreise $\{e_i\}$ zerfallende Kurve* E, *wobei e_i durch S_{i-1}, S_{i+1} hindurchgeht und F_i zum Mittelpunkt hat*[52]). *Liegt, umgekehrt, in einem Grundbüschel eine in drei reelle Kreise zerfallende Koppelkurve, so ist das Grundbüschel ein Feuerbachbüschel.*

Die Umkehrung ergibt sich daraus, daß für eine in reelle Kreise mit positiven Radien zerfallende Koppelkurve die erzeugenden Koppelgetriebe notwendigerweise rhombische Gelenkvierecke haben.

Dem soeben Bewiesenen kann man entnehmen, daß im Reellen alle Büschelkurven die Kreise $\{e_i\}$ nur in den Grundpunkten $\{S_i\}$ des Feuerbachbüschels treffen. Daher darf e_i von keinem Zug der dreispitzigen Büschelkurve überschritten werden, wofür uns andere Gründe bereits bekannt sind (§ 22).

Daß in einem Grundbüschel zugleich eine dreispitzige Koppelkurve Γ und eine in drei Kreise zerfallende Kurve E vorkommen, kann auch durch Verifizieren der Formeln (15) bewiesen werden.

---

[51]) Morley [1]), S. 160; Haarbleicher [1]), S. 35. An beiden Stellen findet sich auch die Beziehung zur Feuerbachschen Figur.

[52]) Die vier Koppelkurven mit den Spitzen $\{S_i\}$ gehören vier Feuerbachbüscheln an. Diese Büschel enthalten Kreistripel, die paarweise einen Kreis gemein haben. Es handelt sich um die sechs bezüglich $\{S_i\}$ isogonalinvarianten Kreise von F. Bücking [vgl. Berkhan und Meyer [12]), S. 1210].

Vom Hauptspiegelbild eines Γ erzeugenden Getriebes (Fig. 6) liest man nämlich ohne weiteres ab:

$$b_2^2 - m_3^2 = (f_2^2 - \overline{F_3 H_3}^2) - (f_1^2 - \overline{F_3 H_3}^2) = f_2^2 - f_1^2,$$
$$b_3^2 - m_2^2 = (f_3^2 - \overline{F_2 H_2}^2) - (f_1^2 - \overline{F_2 H_2}^2) = f_3^2 - f_1^2.$$

Andererseits ist für eines der Getriebe, die E erzeugen, $b_2 = f_2$, $b_3 = f_3$, $m_2 = m_3 = f_1$ und somit

$$b_2^2 - m_3^2 = f_2^2 - f_1^2, \quad b_3^2 - m_2^2 = f_3^2 - f_1^2.$$

Falls Γ und E dasselbe Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ besitzen, erfüllen also die Abmessungen der erzeugenden Getriebe von Γ und E die Gleichungen (15).

§ 28.

Projektivitäten zwischen Involutionen.

Von den verschiedenen Involutionen, die wir an Grundbüscheln untersucht haben (§ 26), fassen wir nun gleichzeitig zwei Punktinvolutionen ins Auge und *ordnen die Punktepaare beider Involutionen einander so zu, daß je zwei entsprechende Punktepaare auf ein und derselben Koppelkurve des Grundbüschels liegen.* Dadurch entsteht eine algebraische, eineindeutige Korrespondenz zwischen den Elementenpaaren zweier Involutionen, eine Projektivität zwischen den Involutionen. Analoge Projektivitäten bestehen zwischen den Tangenteninvolutionen $\{t_i\}$, sowie zwischen den Punktinvolutionen und den $\{\mathfrak{t}_i\}$.

Wir wollen diese Zusammenhänge bei Feuerbachbüscheln im einzelnen darlegen und beweisen zuerst folgenden Satz:

Mittels der Kurven eines Feuerbachbüschels als Bezugslinien sind die symmetrischen Involutionen $\{\mathfrak{s}_i\}$, welche das Büschel auf den Seiten $\{s_i\}$ des Doppelpunktedreiecks abschneidet, aufeinander kongruent bezogen.

Auch für beliebige Grundbüschel sind die Schnittinvolutionen $\{\mathfrak{s}_i\}$, wie wir gezeigt haben, symmetrisch und können daher durch Bewegung zur Deckung gebracht werden. Dabei kommen aber im allgemeinen solche Punktepaare der Involutionen zur Deckung, die auf verschiedenen Koppelkurven des Grundbüschels liegen. Das Wesentliche des eben formulierten Satzes über Feuerbachbüschel ist nun, daß geeignete kongruente Abbildungen $s_1 \cong s_2 \cong s_3$ immer diejenigen Punktepaare der $\{\mathfrak{s}_i\}$ einander zuordnen, die auf derselben Büschelkurve liegen. (Oder mit anderen Worten: *Jede einzelne Koppelkurve eines Feuerbachbüschels schneidet die Geraden $\{s_i\}$ nach drei gleichlangen Sehnen, deren Mitten die Punkte $\{T_i\}$ sind.* Dies kann als Verallgemeinerung des Berührungstheorems aus § 19 angesehen werden.)

Zum Beweis werden wir für drei spezielle Punktepaare etwa von $\mathfrak{s}_1$ zeigen, daß sie vermöge einer kongruenten Abbildung $s_1 \cong s_2$ in solche

Punktepaare von $\mathfrak{s}_2$ übergeführt werden, die den herausgegriffenen Paaren von $\mathfrak{s}_1$ auch in der durch die Kurven des Feuerbachbüschels vermittelten projektiven Zuordnung $\mathfrak{s}_1 \overline{\wedge} \mathfrak{s}_2$ entsprechen. Hiermit wird unser Satz bewiesen sein, weil die Projektivität durch drei Elemente (hier: Punktepaare) und die ihnen entsprechenden eindeutig gegeben ist.

Die Kongruenz $s_1 \cong s_2$ ordne dem Punkte T_1, in welchem s_1 den Ankreis von $\{S_i\}$ berührt, dessen Mittelpunkt A_1 ist, den analogen

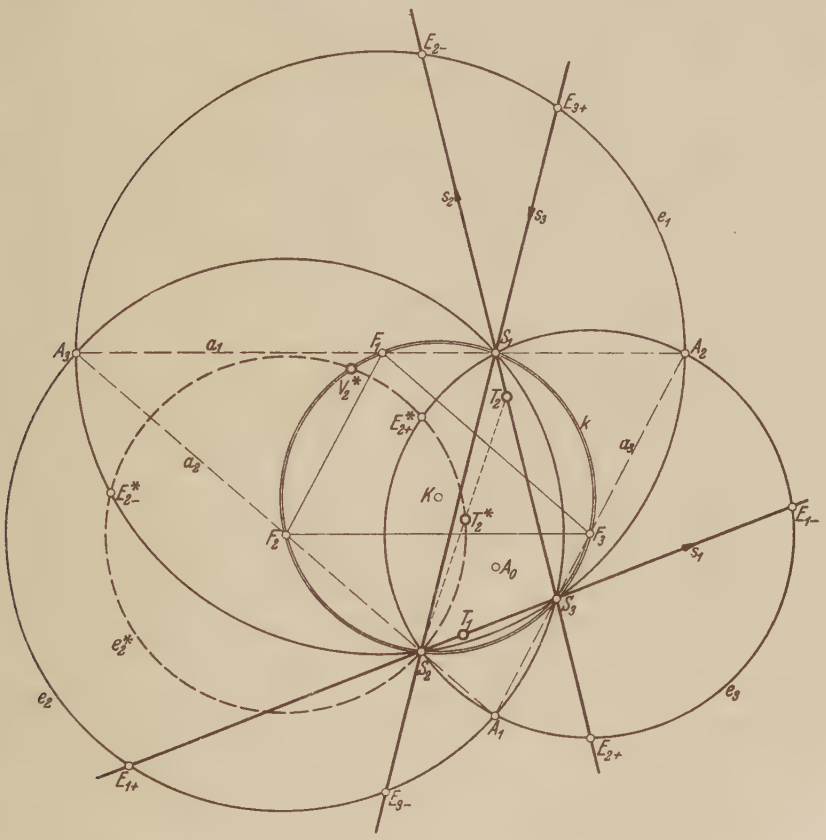


Fig. 22. Beziehungen zwischen Involutionen an einem Feuerbachbüschel.

Punkt T_2 auf s_2 zu. Die dreispitzige Kurve des Feuerbachbüschels berührt auch in T_1 und T_2 (vgl. § 21 und Fig. 13). Daher sind die Punkte T_1 und T_2 Doppelpunkte von $\mathfrak{s}_1$ bzw. $\mathfrak{s}_2$ und zugleich ausgeartete Punktepaare, die einander gemäß der Projektivität $\mathfrak{s}_1 \overline{\wedge} \mathfrak{s}_2$ zugeordnet werden. Das zweite der benötigten Paare von Punktepaaren liefern die wiederum doppelt zählenden uneigentlichen Punkte von s_1 und s_2, da sie einander

sowohl in der Kongruenz $s_1 \simeq s_2$ als auch in der Projektivität $\mathfrak{s}_1 \overline{\wedge} \mathfrak{s}_2$ entsprechen, letzteres, weil sie auf der Doppelkurve Δ des Büschels (§ 25) liegen.

Nun zum dritten Schritt! Hier verwenden wir die im Kreistripelsatz (§ 27) beschriebene Kurve E des Feuerbachbüschels. Es kommt offenbar auf den Nachweis dafür an, daß — von den Punkten $\{S_i\}$ immer abgesehen — die Gerade s_1 das Kreispaar e_2, e_3 nach einem Punktepaar schneidet, dessen Strecke so lang ist wie die Strecke zwischen den Schnittpunkten von s_2 mit e_3 und e_1 (Fig. 22). Um zu zeigen, daß die Strecken gleichlang sind, bezeichnen wir die von S_{i-1}, S_{i+1} verschiedenen Schnittpunkte der Geraden s_i mit den Kreisen e_{i-1}, e_{i+1} durch E_{i-} bzw. E_{i+} und orientieren die Geraden derart, daß die dabei entstehenden Speere im positiven Sinn um den Inkreismittelpunkt A_0 drehen.

Dann ist, auch mit Rücksicht auf Vorzeichen, $E_{i+} S_{i+1} = S_i S_{i+1}$, weil durch Spiegelung an dem Durchmesser a_{i+1} des Kreises e_{i+1} der Speer s_i in den Speer s_{i-1} übergeht. Analog ist $S_{i-1} E_{i-} = S_{i-1} S_i$. Folglich wird

$$E_{i+} E_{i-} = E_{i+} S_{i+1} + S_{i+1} S_{i-1} + S_{i-1} E_{i-}$$
$$= S_i S_{i+1} + S_{i+1} S_{i-1} + S_{i-1} S_i,$$

also unabhängig vom Index i, was zu beweisen war. (Im Falle eines spitzwinkeligen Dreiecks $\{F_i\}$ ist $E_{i+} E_{i-}$ gleich dem Umfang von $\{S_i\}$.)

Von dem eingangs dieses Paragraphen formulierten Satz gilt die Umkehrung:

Sind die symmetrischen Involutionen $\{\mathfrak{s}_i\}$, welche ein Grundbüschel auf den Geraden $\{s_i\}$ abschneidet, mittels der Büschelkurven aufeinander kongruent bezogen, so ist das Grundbüschel ein Feuerbachbüschel.

Aus der Voraussetzung ergibt sich nämlich, daß die endlichen Doppelpunkte der Involutionen $\{\mathfrak{s}_i\}$ die Berührungspunkte einer und derselben Büschelkurve Γ mit den Seiten $\{s_i\}$ des Doppelpunktedreiecks sein müssen. Der Isogonalinvarianz zufolge ist Γ eine dreispitzige Koppelkurve und befindet sich somit in einem Feuerbachbüschel.

Ich setze die Erörterung der Beziehungen zwischen zwei Involutionen fort und zeige jetzt:

Jede Kurve eines Feuerbachbüschels schneidet einerseits die Gerade s_i in einem Punktepaar der Involution $\mathfrak{s}_i$ und schneidet andererseits — vorausgesetzt, daß $F_i \neq S_i$ sei — *den Kreis e_i^*, welcher um den Mittelpunkt F_i durch S_i gezogen wird, in einem Punktepaar der Involution $\mathfrak{e}_i^*$ derart, daß die beiden Punktepaare auf einem Strahlenpaar durch S_i liegen,* also auf einem Strahlenpaar der zu $\mathfrak{t}_i$ spiegelbildlichen Involution $\mathfrak{t}_i^*$.

Dies muß wieder bloß für drei dem Feuerbachbüschel angehörige Kurven bewiesen werden; dann gilt es für alle.

Als erste Kurve nehmen wir die in k und g_∞ zerfallende Doppelkurve Δ. Gemäß § 26 (Ende) schneidet k aus e_i^* einen Doppelpunkt V_i^* von $\mathfrak{e}_i^*$ heraus (in Fig. 22 für $i = 2$ eingezeichnet), während g_∞ im Schnitt mit s_i den Ferndoppelpunkt von $\mathfrak{s}_i$ ergibt. Wir haben zu zeigen, daß die Gerade $S_i V_i^* \parallel s_i$ ist. Nun, $S_i V_i^*$ ist normal zur Verbindung der Mittelpunkte von k und e_i^*, und diese Zentrale ist nach § 12 zu s_i senkrecht.

Die zweite Büschelkurve bestehe aus den Kreisen $\{e_i\}$. Wir nennen E_{i-}^*, E_{i+}^* die von S_i verschiedenen Schnittpunkte des Kreises e_i^* mit e_{i-1} bzw. e_{i+1}. Offensichtlich besteht unsere Aufgabe darin, klarzulegen, daß das Punktepaar E_{i-}, E_{i+} aus S_i in das Punktepaar E_{i-}^*, E_{i+}^* projiziert wird. Vorhin wurde gezeigt, daß E_{i+} aus S_i durch Spiegelung an a_{i+1} hervorgeht. Ähnlich entsteht E_{i-}^* durch Spiegelung von S_i an der Zentralen der Kreise e_i^* und e_{i-1}, also an der Geraden f_{i+1}. Weil $f_{i+1} \parallel a_{i+1}$ ist, befinden sich E_{i+} und E_{i-}^* auf einer Geraden durch den Punkt S_i. Dasselbe gilt für E_{i-} und E_{i+}^*.

Bisher wurde die behauptete Lagenbeziehung zwischen $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{e}_i^*$ bloß für je zwei Punktepaare bewiesen. Immerhin folgt hieraus bereits für jedes Paar von $\mathfrak{s}_i$, daß dessen Projektion aus S_i auf e_i^* ein Punktepaar von $\mathfrak{e}_i^*$ liefert, denn die Involutionen $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{e}_i^*$ sind ja durch die bereits als perspektiv erkannten Paare eindeutig bestimmt. Also liegt insbesondere der endliche Doppelpunkt T_i der Involution $\mathfrak{s}_i$ mit dem von V_i^* verschiedenen Doppelpunkt T_i^* der Involution $\mathfrak{e}_i^*$ auf einer Geraden durch S_i. Es ist bloß die Frage, ob T_i und T_i^* durch eine einzige Kurve des Feuerbachbüschels aus den Involutionen $\mathfrak{s}_i$ bzw. $\mathfrak{e}_i^*$ herausgeschnitten werden. Um diese Ungewißheit zu beseitigen und damit den Beweis zu vollenden, erinnern wir uns einer Eigenschaft der dreispitzigen Büschelkurve Γ. Sie berührt einerseits s_i in T_i; sie berührt andererseits auch e_i^* (§ 22, Schluß), wobei der Berührungspunkt ein Doppelpunkt von $\mathfrak{e}_i^*$, und zwar der Doppelpunkt T_i^* sein muß, weil V_i^* bereits für den Schnitt mit dem Grundkreis vergeben ist.

Wir halten das letzte Teilergebnis noch gesondert fest als

Zweites Berührungstheorem. *Für jede dreispitzige Koppelkurve liegen die Spitze S_i, der Berührungspunkt T_i mit der Geraden s_i und der Berührungspunkt T_i^* mit dem Kreis e_i^* auf einer Geraden.*

Da die zu S_i symmetrischen Punkte bezüglich f_{i-1}, f_{i+1} die Punkte E_{i+}^*, E_{i-}^* sind, so geht § 15 zufolge die Gerade $E_{i-}^* E_{i+}^*$ normal zu s_i durch den Höhenschnittpunkt F_0 von $\{F_i\}$. Also ist sie, wie das Berührungstheorem (§ 19) besagt, die Normale von Γ im Punkte T_i. Mithin kann das Involutionszentrum für $\mathfrak{e}_i^*$ als Schnitt dieser Kurvennormalen mit der Tangente im Punkt T_i^* konstruiert werden.

Der vorhin durchgeführte Beweis hat — um hier noch das Grundsätzliche herauszuarbeiten — uns in diese Lage versetzt: Zur Bestimmung der Projektivität zwischen den Involutionen $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{e}_i^*$ sind drei Paare entsprechender Punktepaare erforderlich. Zwei waren leicht zu beschaffen; über ein drittes wußten wir aber anfänglich nicht völlig Bescheid. Es gelang schließlich, unsere Kenntnis zu ergänzen, und zwar darum, weil für die Bestimmung der beiden Involutionen bereits je zwei Punktepaare ausreichen. Eine Abwandlung des skizzierten Gedankenganges kehrt im folgenden wieder.

§ 29.

Die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve.

Weiteres über Zusammenhänge zwischen Involutionen, namentlich auch deren konstruktive Verwertung, will ich am Beispiel der besonderen dreispitzigen Koppelkurve Γ aufzeigen, welche in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $\{S_i\}$ Spitzen hat und nicht außerhalb des Spitzendreiecks liegt. In diesem Fall sind die stets mit $\{A_i\}$ bezeichneten Ankreismittelpunkte von $\{S_i\}$ die Mitten der Ankreise im engeren Sinn (vgl. § 21). Folglich inzidiert das Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ mit dem Spitzendreieck $\{S_i\}$, wobei $F_i = S_i$ ist[53]). Da eine dreispitzige Koppelkurve durch ihr Brennpunktedreieck eindeutig bestimmt ist, hat Γ die Symmetrie von $\{S_i\}$. Deshalb mag Γ als *gleichseitige dreispitzige Koppelkurve* bezeichnet werden.

Die Längen der Stäbe eines Getriebes, das Γ erzeugt, sind[53]): $m_2 = m_3 = b_i = \frac{1}{2} f_1$. Alle drei erzeugenden Getriebe sind kongruent.

Aus dem Büschel der Kreise, die durch S_2 und S_3 laufen, greifen wir einen beliebigen Kreis u heraus; wir werden seine Schnittpunkte mit Γ bestimmen.

Im folgenden sind Abstände (Abszissen) von der Geraden $f_1 = s_1$ zu messen, wobei es ein wenig einfacher ist, wenn wir nicht mehr f_1 zur Längeneinheit machen, sondern die Abszisse von S_1 gleich $+1$ setzen. Die in diesem Sinn gemessene Abszisse des Mittelpunktes von u sei x.

Dem Γ enthaltenden Feuerbachbüschel oder, wie wir sagen wollen, dem *gleichseitigen Feuerbachbüschel* entnehmen wir noch diese besonderen Kurven: Die Doppelkurve Δ, das Kreistripel E und die Koppelkurve Z, die den von S_3 verschiedenen Schnittpunkt Z der Geraden s_2 mit dem Kreis u enthält (Fig. 23). Die Büschelkurven Γ, Δ, E, Z treffen s_2 in Punktepaaren der symmetrischen Involution $\mathfrak{s}_2$, und zwar der Reihe nach im Doppelpunkt T_2, im unendlichfernen Doppelpunkt,

[53]) Mit dieser Eigenschaft erscheint Γ bei Cayley[1]), S. 556.

im Punktepaar E_{2-}, E_{2+}, schließlich im Punkt Z und in seinem Spiegelbild Z^* in bezug auf T_2.

Um nun *das Doppelverhältnis der vier angegebenen Punktepaare von* $\mathfrak{s}_2$ zu berechnen, projizieren wir sie aus einem Punkt eines Kegelschnittes p auf p selbst. Dadurch erhält man vier Punktepaare einer Involution

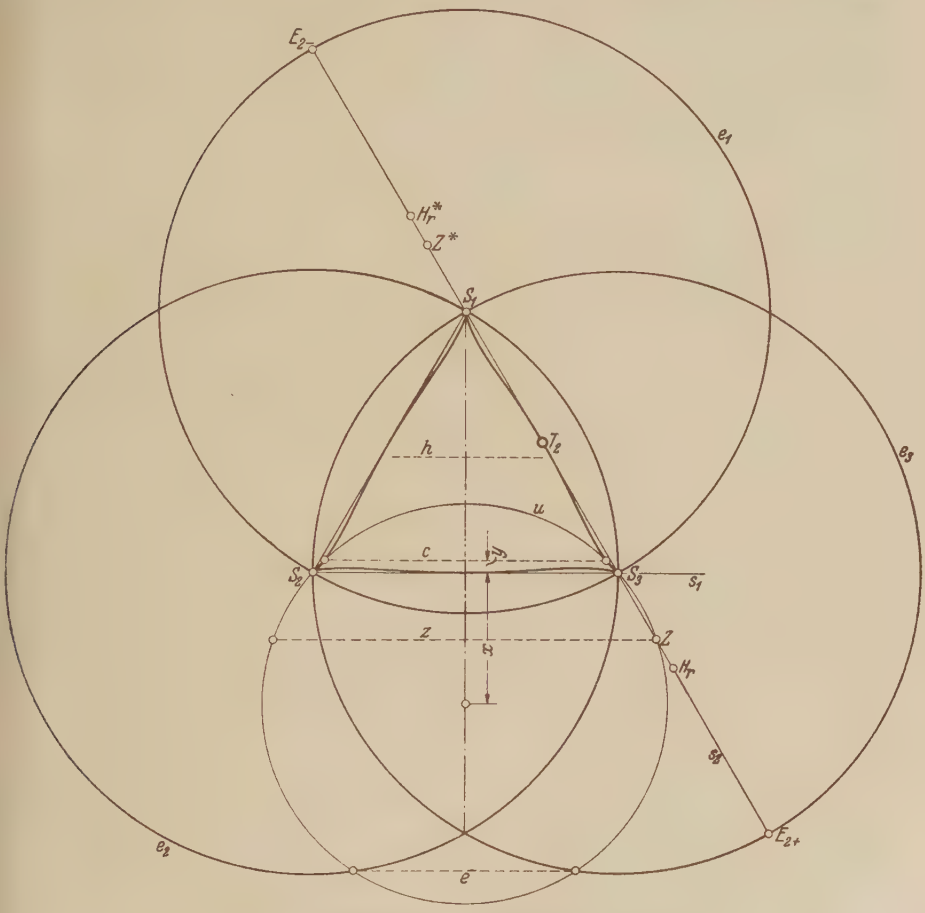


Fig. 23. Gleichseitige dreispitzige Koppelkurve.

auf p, so daß also die Verbindungsgeraden der beiden Punkte jedes Paares vier Strahlen eines Büschels bilden. Deren Doppelverhältnis ist das gesuchte[54]).

[54]) Nach M. Chasles hätten wir das Dv von vier Punkten zu ermitteln, deren jeder zu einem beliebigen festen Punkt von s_2 harmonisch bezüglich eines der vier Punktepaare aus $\mathfrak{s}_2$ ist [vgl. A. Schoenflies, Projektive Geometrie, Encyklop. math. Wiss. III A B 5, S. 433]. Man überzeugt sich leicht davon, daß dieses Dv dem im Text angegebenen gleicht.

Der Kegelschnitt p wird in unserem Fall zweckmäßigerweise als Parabel mit dem Scheitel T_2 und der Scheiteltangente s_2 angenommen; zum Projektionszentrum auf p wählen wir den uneigentlichen Punkt. Dann bleibt das in T_2 koinzidierende Punktepaar bei der Projektion auf p unverändert und ergibt als Verbindung wieder die Scheiteltangente s_2, während der doppelt gezählte uneigentliche Punkt von s_2 die Gerade g_∞ liefert. Mithin ist das verlangte Doppelverhältnis das Teilverhältnis der Scheiteltangente s_2 der Parabel p bezüglich jener beiden Parabelsehnen, deren Orthogonalprojektionen auf s_2 die Strecken $E_{2-}E_{2+}$ und ZZ^* sind. Ein Wert dieses Teilverhältnisses ist

$$\left(\frac{T_2Z}{T_2E_{2-}}\right)^2 = x^2, \tag{17}$$

wie man leicht berechnet.

Jetzt stellen wir in der Schnittinvolution u des Kreises u mit dem gleichseitigen Feuerbachbüschel diejenigen Punktepaare fest, die sich auf Γ, Δ, E, Z befinden und ermitteln *das Doppelverhältnis der vier Punktepaare von* u, indem wir die Sehne jedes Paares aufsuchen und nach dem Doppelverhältnis der vier Sehnen fragen, welche übrigens, dem allgemeinen Symmetriesatz (§ 26) zufolge, parallel sind.

Die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve Γ hat mit u ein vorläufig unbekanntes Punktepaar gemeinsam, dessen Verbindungsgerade wir c nennen. Gelegentlich des Beweises für den allgemeinen Symmetriesatz trat zutage, daß g_∞ die bei der Untersuchung von u allein in Betracht kommende gemeinsame Sehne von u und Δ ist. Sei ferner e die Schnittsehne zwischen u und E, nämlich die Verbindungsgerade der nach Tilgung von S_2, S_3 verbleibenden Schnittpunkte des Kreises u mit dem Kreispaar e_2, e_3. Wird schließlich durch Z die Gerade $z \parallel e$ gelegt, so muß sie u in einem Punktepaar aus u treffen, also in dem auf der Koppelkurve Z gelegenen Punktepaar.

Nach all dem ist das Doppelverhältnis der vier in Rede stehenden Punktepaare aus u gleich dem Teilverhältnis von c in bezug auf e und z. Bezeichnet y die Abszisse der Geraden c, so ergibt sich für das Teilverhältnis auf elementarem Wege ohne Schwierigkeit

$$\left(\frac{3x+1}{2} - y\right) : \left(\frac{4x}{3x^2+1} - y\right). \tag{18}$$

Beim Aufbau dieses Teilverhältnisses aus Entfernungen wurde dieselbe Reihenfolge eingehalten wie bei (17).

Wenn man jedem Punktepaar der Involution s_2 das auf derselben Kurve des gleichseitigen Feuerbachbüschels befindliche Punktepaar von u zuordnet, so wird hierdurch eine Projektivität zwischen s_2 und u definiert (s. § 28, Beginn). Dann ist das Doppelverhältnis von vier Punktepaaren

aus s_2 gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punktepaare von u. Insbesondere sind die in (17) und (18) angeschriebenen Doppelverhältnisse gleich und wir haben daher

$$(19) \qquad (x+1)^3 + 2(x-1)(3x^2+1)y = 0.$$

Lassen wir nunmehr u im Kreisbüschel $\{u\}$ durch die Grundpunkte S_3, S_3 variieren, so erzeugt die u und Γ gemeinsame Sehne c ein Parallelstrahlbüschel $\{c\}$ und (19) lehrt, daß zwischen $\{u\}$ und $\{c\}$ eine 1—3-Korrespondenz besteht. Hierin kommt zum Ausdruck, daß u mit Γ, von den Grundpunkten des gleichseitigen Feuerbachbüschels abgesehen, genau eine Sehne gemein hat, während, umgekehrt, jede Gerade $c \| s_1$ die Kurve Γ in sechs Punkten trifft, die zu Paaren auf Kreisen aus $\{u\}$ liegen. Soll c eine Doppeltangente sein, so muß (19), als Gleichung in x betrachtet, eine Doppelwurzel haben, also die mit y als Konstanter berechnete Diskriminante von (19) verschwinden, das heißt

$$(20) \qquad 64y(48y^3 - 96y^2 + 56y - 1) = 0$$

sein. Die reellen Lösungen von (20) sind $y = 0$ und $y = 0{,}0184$. Demzufolge kann man sagen:

Die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve Γ besitzt eine einzige von s_i verschiedene reelle Doppeltangente $\| s_i$. Ihr Abstand von s_i beträgt weniger als 2 % der Höhe des Dreiecks $\{S_i\}$. Dies ist auch die Abweichung zwischen Γ und dem Spitzendreieck.

Auf der Doppeltangente werden die Berührungspunkte von einem Kreis abgeschnitten, für dessen Mittelpunktsabszisse x gilt:

$$3x^3 + 9x^2 - 7x + 3 = 0; \quad x = -3{,}7030.$$

Die Entfernung der Berührungspunkte berechnet sich zu 0,8865.

§ 30.

Minimalgeraden als Teile von Koppelkurven.

Bisher haben wir die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve Γ nach einer Methode behandelt, die ohne wesentliche Änderung auf jede dreispitzige Koppelkurve anwendbar wäre. Nunmehr soll die Besonderheit von Γ, daß $\{F_i\} = \{S_i\}$ ist, zu einer Vereinfachung ausgenützt werden.

Wir kehren zurück zur symbolischen Gleichung (16) eines Grundbüschels, das durch die Punkte $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ gegeben ist. Für den Parameterwert $1/\Theta_1 = 0$ zerfällt die Büschelkurve in die beiden Kurven dritter Ordnung [55])

$$21) \qquad (I_{F_1} J_{F_2} J_{F_3} \{S_i\})(J_{F_1} I_{F_2} I_{F_3} \{S_i\}) = 0.$$

---

[55]) Roberts [1]); Haarbleicher [1]), S. 37.

(Vgl. die Erklärung der Klammerausdrücke auf Seite 429.) Die anderen zwei Darstellungen des Grundbüschels, welche aus (16) durch Permutieren der Indizes entstehen, liefern in gleicher Weise die zerfallenden Büschelkurven

$$(22) \qquad (I_{F_2} J_{F_3} J_{F_1} \{S_i\})(J_{F_2} I_{F_3} I_{F_1} \{S_i\}) = 0,$$

$$(23) \qquad (I_{F_3} J_{F_1} J_{F_2} \{S_i\})(J_{F_3} I_{F_1} I_{F_2} \{S_i\}) = 0.$$

Sei jetzt etwa $F_1 = S_1$. Dann kommt es zu einem weiter gehenden Zerfall: Die erste der in (22) angeschriebenen Kubiken wird von der Minimalgeraden $J S_1$ im Doppelpunkt J berührt und außerdem in S_1 getroffen; also hat die Minimalgerade mit der Kubik vier Schnittpunkte gemein, was nur möglich ist, wenn $J S_1$ sich von der Kubik abspaltet. Analog erkennt man $I S_1$ als Teil jener Kubik, die in (22) an zweiter Stelle steht. Für $F_1 = S_1$ nimmt somit (22) die folgende Gestalt an:

$$(24) \qquad (J S_1)(I_{F_2} J_{F_3} S_2 S_3)(I S_1)(J_{F_2} I_{F_3} S_2 S_3) = 0,$$

wo die längeren Klammersymbole komplexe Kreise, die kürzeren Minimalgeraden bedeuten. Ganz entsprechend tritt an Stelle von (23) die Gleichung

$$(J S_1)(I_{F_3} J_{F_2} S_2 S_3)(I S_1)(J_{F_3} I_{F_2} S_2 S_3) = 0,$$

welche aber nichts anderes als (24) beinhaltet.

Weil in einem allgemeinen Grundbüschel von vornherein keine Zuordnung zwischen den Punkten $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ existiert, ist bei der Koinzidenz der Punkte F_1 und S_1 die Übereinstimmung der Indizes bloß eine Frage der Bezeichnung und wir haben daher den

Minimalgeraden-Satz. *Falls S_i im Tripel $\{F_i\}$ vorkommt, enthält eine Kurve des durch $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ bestimmten Grundbüschels das Minimalgeradenpaar des Punktes S_i.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial. Ist nebst $F_1 = S_1$ noch $F_2 = S_2$, so spaltet (24) weiter auf in das Minimalgeraden-Sextupel

$$(25) \qquad \mathsf{H} \equiv (J S_1)(I S_2)(J S_3)(I S_1)(J S_2)(I S_3) = 0.$$

Zu demselben Resultat gelangt man auch von (21) oder von (23) aus. Mittels der Umkehrung des Minimalgeraden-Satzes folgt aus (25), daß ganz von selbst $F_3 = S_3$ ist, sobald $F_1 = S_1$ und $F_2 = S_2$. Dies[56]) ergibt sich auch aus dem Satz von der Grundkreisbögen-Summe (§ 13).

Die in § 29 durchgeführte Ermittlung der gemeinsamen Sehne c des Kreises u und der gleichseitigen dreispitzigen Koppelkurve Γ wiederholen wir nun, ersetzen dabei aber die dort verwendete Koppelkurve Z des gleichseitigen Feuerbachbüschels durch das Minimalgeraden-Sextupel H

[56]) Roberts [1]); Cayley [1]), S. 555.

der Punkte $\{F_i\} = \{S_i\}$, von dem soeben gezeigt wurde, daß es gleichfalls eine Büschelkurve ist.

Dann treten an Stelle des Punktepaares Z, Z^* die Schnittpunkte H, H^* von s_2 mit dem Minimalgeradenpaar des Punktes S_2. (In Fig. 23 sind die reellen Vertreter H_r, H_r^* eingezeichnet.) Wird wieder die Höhe des Dreiecks $\{S_i\}$ zur Längeneinheit gemacht, so ist die Entfernung

$$T_2H = T_2H^* = \sqrt{-1}.$$

Daher erhält man statt des Teilverhältnisses (17) jetzt das Teilverhältnis $-\frac{1}{3}$. Daß dieser Wert von u nicht mehr abhängt, wird eine bequeme Konstruktion der Sehne c ermöglichen.

Die früher benutzte Sehne z zwischen u und Z ist sinngemäß gegen die Chordale h des Kreises u und des Nullkreises S_1 (= Minimalgeradenpaar durch S_1) auszutauschen. Die Chordale h verläuft mitten zwischen S_1 und der Polaren dieses Punktes in bezug auf u. Denn h ist der Ort der Mittelpunkte aller zu u und zum Nullkreis S_1 orthogonalen Kreise, also der Kreise durch S_1 und den inversen Punkt bezüglich u.

Wird schließlich beachtet, daß das Teilverhältnis der Geraden c in bezug auf e und h wegen der Projektivität von s_2 und u notwendigerweise gleich $-\frac{1}{3}$ ist, so haben wir folgende Konstruktionsvorschrift:

Man halfte mittels der Geraden h den Abstand zwischen dem Punkt S_1 und seiner Polaren bezüglich u; hierauf bestimme man die Schnittsehne e von u und dem Kreispaar e_2, e_3; endlich viertle man den Streifen zwischen h und e durch die näher bei h gelegene Gerade c: Dann ist c die gemeinsame Sehne des Kreises u und der gleichseitigen dreispitzigen Koppelkurve Γ.

(Eingegangen am 19. April 1937.)

Nachtrag zu §§ 5 und 6 während der Drucklegung (26. Sept. 1937): Sehnenvierecke von der im Kreislagensatz beschriebenen Art heißen bei M. d'Ocagne „quadrilatères semi-inscriptibles". Siehe Revue Math. spéc. **44** (1934), S. 217–219, 245, wo eine Beziehung zwischen den Viereckseiten untersucht wird [zitiert nach Jahrbuch Fortschr. Math 60_{II} (1937), S. 1246].

Eine neue Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems*).

Von

Gottfried Weiss in München.

Inhalt.

Seite

§ 1. Übersicht über die bisherigen Ergebnisse 446
§ 2. Die Gleichungen für die Librationspunkte. 448
§ 3. Einige Vorbemerkungen 450
§ 4. Aufstellung und Lösung der charakteristischen Gleichung . . . 454
§ 5. Berechnung der allgemeinen Lösungen U und V für $\lambda = 0$ . . 457
§ 6. Integrale U und V für $\lambda = 0$ mit besonderen Anfangsbedingungen 460
§ 7. Periodische Integrale U und V für $\lambda \neq 0$ 461
§ 8. Berechnung der Funktionaldeterminante 464
§ 9. Diskussion der gefundenen periodischen Bahnen 465
§ 10. Ein weiterer Ansatz für periodische Lösungen 467

§ 1.

Übersicht über die bisherigen Ergebnisse.

Seit Lagrange, der in seiner berühmten Arbeit des Jahres 1772[1]) die ersten partikulären Lösungen des ebenen Dreikörperproblems angeben konnte, ist den periodischen Bahnkurven ein besonderes Augenmerk zugewendet worden.

Bei diesem Problem handelt es sich bekanntlich um drei Körper mit den Massen m_1, m_2, m_3, die sich unter dem Einfluß der Gravitationskraft in einer Ebene bewegen.

Außer einem ruhenden Koordinatensystem, in dessen Ebene die Bewegung der drei Körper erfolge, denken wir uns noch ein zweites System eingeführt, das den gleichen Ursprung wie das erste hat, sich diesem gegenüber aber mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit α dreht. Die ersten Lösungen, die Lagrange fand, sind so beschaffen, daß die drei Körper sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit α auf Kreisen um den Ursprung des ruhenden Systems bewegen. Im rotierenden System wird dann die Lage der drei Körper konstant bleiben. Dabei ergeben sich die drei „geradlinigen" Librationslösungen,

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität München, II. Sektion, als Dissertation angenommen.

[1]) Essai sur le Problème des trois Corps. Paris 1772.

bei denen die Massenpunkte sämtlich auf einer durch den Ursprung gehenden Geraden liegen, sowie die zwei „gleichseitigen Dreiecks"-Lösungen, bei denen die Körper in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks zu liegen kommen. Weiter konnte Lagrange noch Lösungen angeben, bei denen die Körper drei ähnliche Ellipsen mit einem gemeinsamen Brennpunkt beschreiben. Die Exzentrizitäten können beliebig sein. Auch in diesem Fall liegen die drei Massenpunkte dauernd entweder in gerader Linie oder in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, doch sind jetzt ihre Abstände untereinander nicht mehr konstant, wohl aber noch ihre Abstandsverhältnisse.

Den nächsten wichtigen Fortschritt brachte Poincaré[2]), der ganz neue Methoden zur Bewältigung des Problems heranzog. Doch sind diese Methoden nur anwendbar, wenn die Massen von zwei Körpern im Vergleich zu der des dritten sehr klein sind, so daß von einer *beliebigen* Massenverteilung nicht die Rede sein kann. Poincaré unterscheidet dabei zwei Arten periodischer Bahnen, nämlich periodische Bahnen in bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem und Bahnen, die in bezug auf ein gleichförmig rotierendes System periodisch sind.

Ferner brachte G. Darwin eine wichtige Abhandlung über periodische Bahnkurven, allerdings auch mit einer Einschränkung über die Massenverteilung, und schließlich lieferten F. R. Moulton und eine Anzahl seiner Schüler wie Buchanan, Buck, Griffin usw. wertvolle Beiträge zu diesem Problem. Moulton selbst hat eine kurze Zusammenstellung der bis jetzt vorhandenen Ergebnisse angegeben[3]).

Im Fall des eingeschränkten Problems ($m_3 = 0$) wurden mehrere Scharen von periodischen Bahnen durch exakte Existenzbeweise in Arbeiten von E. Hopf und A. Wintner nachgewiesen. Diese Ergebnisse hat O. Perron neu bewiesen[4]).

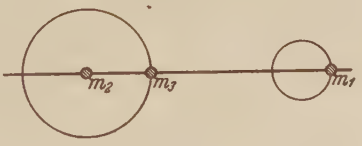


Fig. 1.

Ohne eine Einschränkung über die Massenverhältnisse machen zu müssen, sind in letzter Zeit, ebenfalls von O. Perron[5]), den bis jetzt bekannten Lagrangeschen Lösungen neue hinzugefügt worden. Werden die Bewegungen von Sonne (m_1) und Mond (m_3) von der Erde (m_2) aus betrachtet, so sind in

[2]) Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.

[3]) Einführung in die Himmelsmechanik, S. 303ff.

[4]) Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem, Monatshefte f. Mathematik u. Physik 43 (1936).

[5]) Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen). München 1936. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem geschlossene, annähernd kreisförmige Umläufe des Mondes um die Erde bei hinreichend kleinem Abstand $\overline{m_2 m_3}$ möglich. Dabei beschreibt die Sonne ebenfalls annähernd kreisförmige Bahnen mit kleinem Abstand von einem festen Ruhepunkt. Da außerdem beide Umlaufzeiten von m_3 und m_1 gleich sind, so liegen periodische Bahnen vor.

In der vorliegenden Abhandlung werden, ebenfalls in einem rotierenden System, weitere periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems angegeben werden und zwar wird es sich dabei um eine Schar von Bahnen in hinreichender Nähe um die geradlinigen Librationspunkte handeln. In § 9 wird festgestellt werden, daß im rotierenden Koordinatensystem mit dem Nullpunkt in m_3 die Massen m_1 und m_2 je ein rückläufiges Oval um ihre Librationspunkte beschreiben, die annähernd zueinander ähnlich sind, wobei „annähernd" im Sinn gegen Null abnehmender Ovaldurchmesser zu verstehen ist. Während diese Schar von Bahnen wirklich neu ist, erweist sich eine zweite, in § 10 angegebene als eine bereits seit Lagrange bekannte Schar.

§ 2.

Die Gleichungen für die Librationspunkte.

Die Ebene, in der sich die drei Körper unter der Wirkung des Gravitationsgesetzes bewegen, wählen wir als die xy-Ebene. Die Massen der Körper nennen wir m_ν ($\nu = 1, 2, 3$). Ihre Koordinaten seien x_ν, y_ν oder bei Anwendung komplexer Schreibweise: $x_\nu + i y_\nu = z_\nu$. Die Zeiteinheit bestimmen wir so, daß die Gravitationskonstante gleich 1 wird. Dann lauten die Bewegungsgleichungen der drei Massenpunkte in diesem System:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \ddot{z}_1 = -m_2 \dfrac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^3} - m_3 \dfrac{z_1 - z_3}{|z_1 - z_3|^3}, \\ \ddot{z}_2 = -m_3 \dfrac{z_2 - z_3}{|z_2 - z_3|^3} - m_1 \dfrac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|^3}, \\ \ddot{z}_3 = -m_1 \dfrac{z_3 - z_1}{|z_3 - z_1|^3} - m_2 \dfrac{z_3 - z_2}{|z_3 - z_2|^3}. \end{cases}$$

Wir nehmen m_3 als den Massenpunkt an, von dem aus die Bewegung der beiden anderen Körper beobachtet werden soll. Daher beziehen wir alle Untersuchungen auf diesen Punkt. Dann reduziert sich das System (2. 1) nur noch auf zwei Gleichungen, die durch Subtraktion der beiden ersten dieser Gleichungen (2. 1) von der letzten erhalten werden. Führen wir die dabei auftretenden Differenzen

$$(2.2)\qquad z_1 - z_3 = r, \qquad z_2 - z_3 = s$$

als neue relative Koordinaten ein, dann erhalten wir das Gleichungssystem

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \ddot{r} = -m_2 \dfrac{r-s}{|r-s|^3} - (m_1+m_3)\dfrac{r}{|r|^3} - m_2\dfrac{s}{|s|^3}, \\ \ddot{s} = -m_1 \dfrac{s-r}{|s-r|^3} - (m_2+m_3)\dfrac{s}{|s|^3} - m_1\dfrac{r}{|r|^3}. \end{cases}$$

Den Übergang zu einem Koordinatensystem, das den gleichen Ursprung hat, sich diesem gegenüber aber mit der Winkelgeschwindigkeit α dreht, vermittelt die Transformation:

$$(2.4)\qquad r = u \cdot e^{i\alpha t}, \qquad s = v \cdot e^{i\alpha t}.$$

Dann lauten die Gleichungen (2. 3):

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} - \alpha^2 u = -m_2 \dfrac{u-v}{|u-v|^3} - (m_1+m_3)\dfrac{u}{|u|^3} - m_2\dfrac{v}{|v|^3}, \\ \ddot{v} + 2i\alpha\dot{v} - \alpha^2 v = -m_1 \dfrac{v-u}{|v-u|^3} - (m_2+m_3)\dfrac{v}{|v|^3} - m_1\dfrac{u}{|u|^3}. \end{cases}$$

Neben diesen Gleichungen gelten noch die für die konjugierten Größen $\bar{u}, \bar{v}$, so daß insgesamt vier Gleichungen für die vier Funktionen $u(t)$, $v(t)$, $\overline{u(t)}$, $\overline{v(t)}$ angegeben werden können.

Die Gleichungen (2. 5) haben u. a. die konstanten Lösungen

$$u = a_1, \qquad v = a_2, \qquad \ddot{u} = \ddot{v} = \dot{u} = \dot{v} = 0,$$

wobei dann:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \alpha^2 a_1 = m_2 \dfrac{a_1 - a_2}{|a_1 - a_2|^3} + (m_1+m_3)\dfrac{a_1}{|a_1|^3} + m_2\dfrac{a_2}{|a_2|^3}, \\ \alpha^2 a_2 = m_1 \dfrac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|^3} + (m_2+m_3)\dfrac{a_2}{|a_2|^3} + m_1\dfrac{a_1}{|a_1|^3}. \end{cases}$$

Von den fünf Lösungen dieses Systems, die bereits Lagrange angegeben hat[6]), betrachten wir im folgenden nur die drei „geradlinigen" Librationslösungen. Ihnen entsprechen die Figuren 2.

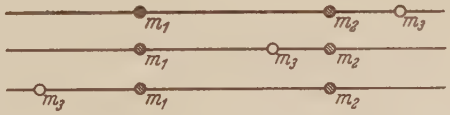


Fig. 2.

In allen drei Fällen ist dabei $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq a_2$.

Erfüllt ein Wertetripel α, a_1, a_2 die Gleichungen (2. 6), dann ist auch, wenn unter β ein beliebiger positiver Parameter verstanden wird, $\alpha\beta^3$, $\frac{a_1}{\beta^2}$, $\frac{a_2}{\beta^2}$ ein Lösungstripel. Durch geeignete Verfügung über β, was nichts anderes als die Festsetzung der Längeneinheit bedeutet, läßt es sich stets erreichen, daß:

$$(2.7)\qquad |a_1 - a_2| = 1.$$

[6]) Die Lösungen dieser Gleichungen bringt z. B. Moulton: Einführung in die Himmelsmechanik, Leipzig 1927, S. 295.

Dann erfüllen die Librationspunkte die Gleichungen:

$$(2.8)\quad \begin{cases} \alpha^2 a_1 = m_2(a_1 - a_2) + (m_1 + m_3)\frac{a_1}{|a_1|^3} + m_2\frac{a_2}{|a_2|^3}, \\ \alpha^2 a_2 = m_1(a_2 - a_1) + (m_2 + m_3)\frac{a_2}{|a_2|^3} + m_1\frac{a_1}{|a_1|^3}. \end{cases}$$

Die betrachteten Librationspunkte können ohne Einschränkung auf der reellen Achse angenommen werden. Dadurch werden a_1 und a_2 reell. Entsprechend den obigen Figuren hat man dann die drei Fälle:

1. $a_1 < a_2 < 0$,
2. $a_1 < 0 < a_2$,
3. $0 < a_1 < a_2$.

Stets ist dabei $a_2 - a_1 = 1$. Die drei anderen Permutationen von $0, a_1, a_2$, bei denen $a_1 - a_2 = 1$, gehen daraus durch Drehung des Koordinatensystems um 180^0 hervor, so daß es genügt, die obigen drei zu betrachten.

§ 3.

Einige Vorbemerkungen.

I. In den folgenden Rechnungen wird sich die Einführung einiger Abkürzungen als vorteilhaft erweisen. Wir setzen:

$$(3.1)\quad \frac{a_1}{a_2}\left(m_1 - \frac{m_1}{|a_1|^3}\right) = M_1, \qquad \frac{a_2}{a_1}\left(m_2 - \frac{m_2}{|a_2|^3}\right) = M_2;$$

$$(3.2)\quad M_1 + M_2 = q,$$

und behaupten:

$$(3.3)\quad \boxed{q > 0.}$$

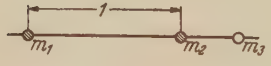


Fig. 3.

Zum Beweis werden der Reihe nach alle drei möglichen Librationslösungen betrachtet.

a) Erster Fall: $a_1 < a_2 < 0$.

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_1 - a_2 = -1, \quad 0 < \frac{a_2}{a_1} < 1.$$

Wegen $|a_1| > 1$ wird:

$$\frac{a_2}{a_1} M_1 = m_1 - \frac{m_1}{|a_1|^3} > 0.$$

Aus der ersten Gleichung (2. 8) folgt:

$$(3.4)\quad \alpha^2 = m_2 - M_2 + \frac{m_1 + m_3}{|a_1|^3}.$$

Außerdem liefert die Subtraktion der beiden Gleichungen (2. 8):

$$(3.5)\quad \alpha^2 = m_1 + m_2 + \frac{m_3}{a_1 - a_2}\left(\frac{a_1}{|a_1|^3} - \frac{a_2}{|a_2|^3}\right).$$

Beim Einsetzen dieses Ergebnisses in (3. 4) erhalten wir:

$$m_1 + \frac{m_3}{a_1 - a_2}\left(\frac{a_1}{|a_1|^3} - \frac{a_2}{|a_2|^3}\right) = -M_2 + \frac{m_1 + m_3}{|a_1|^3}.$$

Im vorliegenden Fall wird diese Gleichung:

$$m_1 - m_3 \cdot \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = -M_2 + \frac{m_1 + m_3}{|a_1|^3},$$

$$\frac{a_2}{a_1} M_1 + M_2 = \frac{m_3}{|a_1|^3} + m_3 \frac{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)}{a_1^2 \cdot a_2^3},$$

$$\frac{a_2}{a_1} M_1 + M_2 = \frac{m_3}{|a_1|^3} + m_3 \frac{-a_1 - a_2}{a_1^2 \cdot a_2^3} > 0,$$

da die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung >0 sind und $m_3 > 0$ vorausgesetzt werden darf. [Das eingeschränkte Problem ist ja bereits behandelt (siehe § 1)]. Mit

$$\frac{a_2}{a_1} M_1 + M_2 > 0$$

wird auch

$$q = M_1 + M_2 > \frac{a_2}{a_1} M_1 + M_2 > 0.$$

Denn es war ja $M_1 > 0$ und $0 < \frac{a_2}{a_1} < 1$.

b) Zweiter Fall: $a_1 < 0 < a_2$.

Wegen $a_2 - a_1 = 1$ ist jetzt $|a_1| < 1$, $|a_2| < 1$, also

$$m_1 - \frac{m_1}{|a_1|^3} < 0, \quad m_2 - \frac{m_2}{|a_2|^3} < 0.$$

Fig. 4.

Ferner ist:

$$\frac{a_1}{a_2} < 0, \quad \frac{a_2}{a_1} < 0.$$

Dann wird aber:

$$q = M_1 + M_2 = \frac{a_1}{a_2}\left(m_1 - \frac{m_1}{|a_1|^3}\right) + \frac{a_2}{a_1}\left(m_2 - \frac{m_2}{|a_2|^3}\right) > 0.$$

c) Dritter Fall: $0 < a_1 < a_2$.

$a_1 > 0$, $a_2 > 1$, $a_1 - a_2 = -1$, $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$.

Fig. 5.

Es wird:

$$\frac{a_1}{a_2} M_2 = m_2 - \frac{m_2}{|a_2|^3} > 0,$$

also auch

$$M_2 > 0.$$

Aus der zweiten Gleichung (2. 8) folgt:

$$\alpha^2 = m_1 - M_1 + \frac{m_2 + m_3}{|a_2|^3}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (3. 5) ein, so erhalten wir:

$$m_2 + \frac{m_3}{a_1 - a_2}\left(\frac{a_1}{|a_1|^3} - \frac{a_2}{|a_2|^3}\right) = -M_1 + \frac{m_2 + m_3}{|a_2|^3}.$$

Im vorgegebenen Fall wird diese Gleichung:

$$m_2 + m_3\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = -M_1 + \frac{m_2 + m_3}{a_2^3},$$

$$\frac{a_1}{a_2} M_2 + M_1 = \frac{m_3}{a_2^3} + m_3 \frac{(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)}{a_1^3 \cdot a_2^3},$$

$$\frac{a_1}{a_2} M_2 + M_1 = \frac{m_3}{a_2^3} + m_3 \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1^3 \cdot a_2^3} > 0,$$

da die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung > 0 sind.

Nun wird wegen $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$ und $M_2 > 0$ auch

$$q = M_1 + M_2 > M_1 + \frac{a_1}{a_2} M_2 > 0.$$

Die Behauptung $q > 0$ ist somit in allen vorkommenden Fällen nachgewiesen.

II. Die Untersuchung des gestellten Problems stützt sich auf die Tatsache, daß jede die reelle Koordinatenachse zweimal senkrecht schneidende Bahnkurve periodisch sein muß. Setzen wir nämlich

$$u = u_1 + i u_2, \quad v = v_1 + i v_2; \tag{3. 6}$$

so erkennen wir leicht, daß die Gleichungen (2. 5) unverändert bleiben, wenn wir u_2 und v_2 durch $-u_2$ und $-v_2$, ferner t durch $2c - t$ ersetzen. Sind also $u(t)$, $v(t)$ Bahnkurven, dann stellen $\overline{u(2c - t)}$, $\overline{v(2c - t)}$ ebensolche dar. Schneiden die ersten für $t = 0$ und $t = c$ die reelle Achse senkrecht, dann ist:

$$u_2(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0, \quad \dot{v}_1(0) = 0,$$
$$u_2(c) = 0, \quad v_2(c) = 0, \quad \dot{u}_1(c) = 0, \quad \dot{v}_1(c) = 0.$$

Deshalb sind

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq c$$
$$u = \overline{u(2c - t)}, \quad v = \overline{v(2c - t)} \quad \text{für} \quad c \leqq t \leqq 2c$$

periodische Lösungen mit der Periode $2c$, da in den Schnittpunkten mit der reellen Achse jeweils eine Lösung u, v in die andere übergeht.

Wenn es daher gelingt, Lösungen u und v des Problems zu finden, welche die reelle Achse zweimal senkrecht schneiden, dann müssen sie nach dieser Bemerkung periodisch sein.

III. Weiterhin sei, um die später folgende Rechnung ohne Unterbrechung fortführen zu können, der Arbeit ein Satz über die Abhängigkeit der Integrale

eines Differentialgleichungssystems von den Anfangswerten und von den Parametern vorangestellt, der z. B. im Lehrbuch von Horn zu finden ist[7]):

„Das Differentialgleichungssystem

$$\text{(A)} \qquad x_\nu = f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n, \lambda), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

habe für $\lambda = 0$ die im Intervall $0 \leqq t \leqq T$ stetige Lösung

$$x_\nu = \varphi_\nu(t). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Funktionen f_ν seien für alle t-Werte dieses Intervalls in Potenzreihen von

$$x_1 - \varphi_1(t), \quad x_2 - \varphi_2(t) \ldots x_n - \varphi_n(t), \ \lambda$$

entwickelbar, welche stetige Funktionen von t zu Koeffizienten haben und in einem Bereich

$$|x_\nu - \varphi_\nu(t)| \leqq r, \quad |\lambda| \leqq r \qquad (r \text{ von } t \text{ unabhängig})$$

konvergieren. Dann lassen sich die dem System (A) genügenden Funktionen $x_1, \ldots, x_n$ von t, welche durch die Anfangswerte

$$x_1(0) = \varphi_1(0) + \alpha_1, \ \ldots, \ x_n(0) = \varphi_n(0) + \alpha_n$$

eindeutig bestimmt sind, in Potenzreihen

$$\text{(B)} \quad x_\nu = \varphi_\nu(t) + \varphi_{\nu 0}(t) \cdot \lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\nu\mu}(t) \cdot \alpha_\mu +$$
$$+ \sum \varphi_{\nu k_0 k_1 \ldots k_n}(t) \lambda^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \quad (k_0 + k_1 + \ldots + k_n \geqq 2)$$

entwickeln, die in einem gewissen Bereich $|\lambda| \leqq s$, $|\alpha_\nu| \leqq s$ absolut konvergieren und gliedweise nach t differenziert werden dürfen, und zwar, wenn s klein genug genommen wird, im ganzen Intervall $0 \leqq t \leqq T''$.

Wegen der Anfangsbedingungen ist dabei:

$$\varphi_{\nu 0}(0) = 0, \qquad \varphi_{\nu k_0 k_1 \ldots k_n}(0) = 0, \qquad \varphi_{\nu\mu}(0) = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \mu, \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu, \end{cases}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Sind außerdem für reelle Argumente die Funktionen f_ν reell und sind die Funktionen $\varphi_\nu(t)$ ebenfalls reell, dann sind in (B) die Funktionen $\varphi_{\nu 0}(t)$, $\varphi_{\nu\mu}(t)$, $\varphi_{\nu k_0 k_1 \ldots k_n}(t)$ ebenfalls reell. Das erkennt man leicht nachträglich, da ja Integrale mit reellen Anfangswerten bei den obigen Voraussetzungen auch für $t > 0$ reell bleiben müssen. Liegen nun Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung vor, so lassen sich diese in bekannter Weise auf Systeme erster Ordnung zurückführen, so daß ein analoger Satz auch für diese höheren Systeme gilt.

---

[7]) J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905, § 67.

§ 4.

Aufstellung und Lösung der charakteristischen Gleichung.

Durch die Transformation

$$u = a_1 + \lambda U, \quad v = a_2 + \lambda V, \tag{4.1}$$

wobei λ reell sein soll, gehen die Gleichungen (2. 5) über in:

$$\begin{cases} \lambda \ddot{U} + 2i\alpha\lambda\dot{U} - \alpha^2(a_1 + \lambda U) = -m_2 \dfrac{a_1 - a_2 + \lambda(U - V)}{|a_1 - a_2 + \lambda(U - V)|^3} \\ \qquad\qquad - (m_1 + m_3)\dfrac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3} - m\dfrac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3}, \\ \lambda \ddot{V} + 2i\alpha\lambda\dot{V} - \alpha^2(a_2 + \lambda V) = -m_1 \dfrac{a_2 - a_1 + \lambda(V - U)}{|a_2 - a_1 + \lambda(V - U)|^3} \\ \qquad\qquad - (m_2 + m_3)\dfrac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3} - m_1\dfrac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Nun ist, da ja a_1, a_2 und λ reell sind:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3} &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\left(1 + \lambda\frac{U}{a_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \lambda\frac{\overline{U}}{a_1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{U}{a_1} + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{3\lambda}{2}\cdot\frac{\overline{U}}{a_1} + \ldots\right) \\ &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{U + 3\overline{U}}{a_1} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Dabei sind die durch Punkte angedeuteten Glieder von höherer als erster Ordnung in λ. Analog wird:

$$\frac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3} = \frac{a_2}{|a_2|^3}\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\,\frac{V + 3\overline{V}}{a_2} + \ldots\right)$$

und wegen $|a_1 - a_2| = 1$:

$$\frac{a_1 - a_2 + \lambda(U - V)}{|a_1 \quad a_2 + \lambda(\overline{U} - \overline{V})|^3} = (a_1 - a_2)\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\,\frac{U - V + 3\cdot(\overline{U} - \overline{V})}{a_1 - a_2} + \ldots\right).$$

Außerdem ist dabei: $a_1 - a_2 = -1$.

Entwickeln wir die rechten Seiten der Gleichungen (4. 2) unter Benutzung dieser Ergebnisse nach Potenzen von λ, so fallen die Glieder ohne λ wegen (2. 8) heraus und nach Wegheben eines Faktors λ erhalten wir schließlich das System:

$$\begin{cases} \ddot{U} + 2i\alpha\dot{U} - \alpha^2 U = \dfrac{m_2}{2}(U - V) + \dfrac{3m_2}{2}(\overline{U} - \overline{V}) + \dfrac{m_1 + m_3}{2}\cdot\dfrac{U}{|a_1|^3} \\ \qquad + \dfrac{3(m_1 + m_3)}{2}\cdot\dfrac{\overline{U}}{|a_1|^3} + \dfrac{m_2}{2}\cdot\dfrac{V}{|a_2|^3} + \dfrac{3m_2}{2}\cdot\dfrac{\overline{V}}{|a_2|^3} + \ldots \\ \ddot{V} + 2i\alpha\dot{V} - \alpha^2 V = \dfrac{m_1}{2}(V - U) + \dfrac{3m_1}{2}(\overline{V} - \overline{U}) + \dfrac{m_2 + m_3}{2}\cdot\dfrac{V}{|a_2|^3} \\ \qquad + \dfrac{3(m_2 + m_3)}{2}\,\dfrac{\overline{V}}{|a_2|^3} + \dfrac{m_1}{2}\cdot\dfrac{U}{|a_1|^3} + \dfrac{3m_1}{2}\cdot\dfrac{\overline{U}}{|a_1|^3} + \ldots. \end{cases} \tag{4.3}$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder besitzen dabei λ als Faktor. Nun werden die Gleichungen in Real- und Imaginärteil zerlegt, wobei

$$U = U_1 + i\,U_2, \qquad V = V_1 + i\,V_2. \tag{4.4}$$

Dann ergibt sich das System:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot{U}_1 - 2\alpha\,\dot{U}_2 - \alpha^2 U_1 = 2\,m_2\,(U_1 - V_1) \\
&\qquad\qquad + 2\,(m_1 + m_3)\,\frac{U_1}{|a_1|^3} + 2\,m_2\,\frac{V_1}{|a_2|^3} + \dots \\
&\ddot{U}_2 + 2\alpha\,\dot{U}_1 - \alpha^2 U_2 = m_2\,(V_2 - U_2) \\
&\qquad\qquad - (m_1 + m_3)\,\frac{U_2}{|a_1|^3} - m_2\,\frac{V_2}{|a_2|^3} + \dots \\
&\ddot{V}_1 - 2\alpha\,\dot{V}_2 - \alpha^2 V_1 = 2\,m_1\,(V_1 - U_1) \\
&\qquad\qquad + 2\,(m_2 + m_3)\,\frac{V_1}{|a_2|^3} + 2\,m_1\,\frac{U_1}{|a_1|^3} + \dots \\
&\ddot{V}_2 - 2\alpha\,\dot{V}_1 - \alpha^2 V_2 = m_1\,(U_2 - V_2) \\
&\qquad\qquad - (m_2 + m_3)\,\frac{V_2}{|a_2|^3} - m_1\,\frac{U_2}{|a_1|^3} + \dots.
\end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

In diesen Gleichungen werden die Ausdrücke $\frac{m_1 + m_3}{|a_1|^3}$ und $\frac{m_2 + m_3}{|a_2|^3}$ mit Hilfe der Gleichungen (2.8) beseitigt und weiterhin die Abkürzungen (3.1) eingeführt. Speziell für $\lambda = 0$ erhält man dann nach leichten Umformungen das lineare, homogene System:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot{U}_1 + U_1\,(-3\alpha^2 - 2M_2) - 2\alpha\,\dot{U}_2 + 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2 V_1 = 0, \\
&2\alpha\,\dot{U}_1 + \ddot{U}_2 + M_2 U_2 - \frac{a_1}{a_2}\,M_2 V_2 = 0, \\
&2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1 U_1 + \ddot{V}_1 + V_1\,(-3\alpha^2 - 2M_1) - 2\alpha\,\dot{V}_2 = 0, \\
&-\frac{a_2}{a_1}\,M_1 U_2 + 2\alpha\,\dot{V}_1 + \ddot{V}_2 + M_2 V_2 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{4.6}$$

Der Lösungsansatz

$$U_1 = A\cdot e^{\varrho t}, \quad U_2 = B\cdot e^{\varrho t}, \quad V_1 = C\cdot e^{\varrho t}, \quad V_2 = D\cdot e^{\varrho t} \tag{4.7}$$

liefert die charakteristische Gleichung dieses Systems:

$$\begin{vmatrix}
\varrho^2 - 3\alpha^2 - 2M_2, & -2\alpha\varrho & 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2, & 0 \\
2\alpha\varrho, & \varrho^2 + M_2, & 0 & -\frac{a_1}{a_2}\,M_2 \\
2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1, & 0, & \varrho^2 - 3\alpha^2 - 2M_1, & -2\alpha\varrho \\
0, & -\frac{a_2}{a_1}\,M_1, & 2\alpha\varrho, & \varrho^2 + M_1
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

In dieser Determinante wird die mit $\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte dritte Spalte zur ersten und ebenso die mit $\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte vierte Spalte zur zweiten addiert. Dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2, & -2\alpha\varrho, & 2\frac{a_1}{a_2}M_2, & 0 \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2, & 0, & -\frac{a_1}{a_2}M_2 \\ (\varrho^2 - 3\alpha^2)\cdot\frac{a_2}{a_1}, & -2\alpha\varrho\cdot\frac{a_2}{a_1}, & \varrho^2 - 3\alpha^2 - 2M_1, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho\cdot\frac{a_2}{a_1}, & \varrho^2\cdot\frac{a_2}{a_1}, & 2\alpha\varrho, & \varrho^2 + M_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun wird noch die mit $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte erste Zeile zur dritten und ebenso die mit $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte zweite Zeile zur vierten addiert. Dann kommen links unten vier Nullen, so daß die Determinante in zwei Faktoren zerfällt, und zwar unter Benutzung der Abkürzung (3. 2) in

$$\begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2 - 2q, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2 + q \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet in:

$$(4.\ 9) \qquad [\varrho^4 + \alpha^2\varrho^2]\cdot[\varrho^4 + \varrho^2(\alpha^2 - q) - q(3\alpha^2 + 2q)] = 0.$$

Der erste Faktor hat die vier Wurzeln

$$(4.\ 10) \qquad \varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \quad \varrho_3 = i\alpha, \quad \varrho_4 = -i\alpha.$$

Die beiden aus dem zweiten Faktor entspringenden Wurzeln für ϱ^2 müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben, da ihr Produkt $-q\cdot(3\alpha^2 + 2q) < 0$. Denn nach (3. 3) ist ja: $q > 0$. Wir setzen

$$\varrho^2_{5,6} = \sigma^2, \quad \varrho^2_{7,8} = -\tau^2 \qquad \text{mit } \sigma > 0, \quad \tau > 0.$$

Aus (4. 9) schließen wir dann:

$$(4.\ 11) \qquad \sigma^2\cdot\tau^2 = q(3\alpha^2 + 2q), \quad \sigma^2 - \tau^2 = -\alpha^2 + q.$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung werden also:

$$(4.\ 12) \quad \varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \quad \varrho_3 = i\alpha, \quad \varrho_4 = -i\alpha,$$
$$\varrho_5 = \sigma, \ \varrho_6 = -\sigma, \ \varrho_7 = i\tau, \ \varrho_8 = -i\tau \quad (\text{mit } \sigma > 0, \ \tau > 0).$$

Außerdem ergibt sich durch Auflösen von (4. 9):

$$-\tau^2 = \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + 10\alpha^2 q + 9q^2}}{2} = \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{(\alpha^2 + 3q)^2 + 4\alpha^2 q}}{2}$$
$$= \frac{q - \alpha^2 - (\alpha^2 + 3q) - 2\varepsilon}{2} \qquad \text{mit } \varepsilon > 0,$$

$$(4.\ 13) \qquad \tau^2 = q + \alpha^2 + \varepsilon.$$

Also ist

(4. 14) $$\tau^2 > \alpha^2.$$

Wir geben noch eine andere Abschätzung für τ^2 an. Aus (4. 9) ergibt sich:

$$-\tau^2 = \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + 10\,\alpha^2 q + 9\,q^2}}{2} > \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{9\,\alpha^4 + 18\,\alpha^2 q + 9\,q^2}}{2}$$

$$= \frac{q - \alpha^2 - 3\,(\alpha^2 + q)}{2}.$$

Daher wird

(4. 15) $$-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q > 0$$

und es gilt erst recht die Abschätzung

(4. 16) $$-\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q > 0.$$

§ 5.

Berechnung der allgemeinen Lösungen U und V für $\lambda = 0$.

Das durch den Ansatz (4. 7) aus (4. 6) ableitbare Gleichungssystem lautet ausführlich geschrieben:

(5. 1)
$$\begin{cases} (\varrho^2 - 3\,\alpha^2 - 2\,M_2)\,A - 2\,\alpha\,\varrho\,B + 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2 C = 0, \\ 2\,\alpha\,\varrho\,A + (\varrho^2 + M_2)\,B - \frac{a_1}{a_2}\,M_2 D = 0, \\ 2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1 A + (\varrho^2 - 3\,\alpha^2 - 2\,M_1)\,C - 2\,\alpha\,\varrho\,D = 0, \\ -\frac{a_2}{a_1}\,M_1 B + 2\,\alpha\,\varrho\,C + (\varrho^2 + M_1)\,D = 0. \end{cases}$$

Für die Wurzel $\varrho_1 = 0$ reduzieren sich die zweite und die vierte Gleichung, da M_1 und M_2 nicht beide gleichzeitig Null sein können, auf:

(5. 2) $$D = \frac{a_2}{a_1}\,B.$$

Die zur ersten und dritten Gleichung für $\varrho_1 = 0$ gehörige Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} -3\,\alpha^2 - 2\,M_2, & 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2 \\ 2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1, & -3\,\alpha^2 - 2\,M_1 \end{vmatrix} = 9\,\alpha^4 + 6\,\alpha^2 q > 0.$$

Also ergeben sich nur die Lösungen:

(5. 3) $$A = C = 0.$$

Somit hat man entsprechend der Wurzel $\varrho_1 = 0$ die partikuläre Lösung

(5. 4) $$U_{11} = 0, \quad U_{21} = a_1, \quad V_{11} = 0, \quad V_{21} = a_2.$$

Um eine der zweiten Wurzel $\varrho_2 = 0$ entsprechende zweite partikuläre Lösung für U und V zu finden, wird der Ansatz gemacht:

$$(5.5) \qquad U_{12} = c_1, \quad U_{22} = a_1 t + c_2, \quad V_{12} = c_3, \quad V_{22} = a_2 t.$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (4. 6) ergeben sich die Werte der Konstanten c_1, c_2, c_3. Wir geben gleich das Resultat an, das sich hinterher auch sofort verifizieren läßt:

$$(5.6) \qquad U_{12} = -\frac{2}{3\alpha} a_1, \quad U_{22} = a_1 t, \quad V_{12} = -\frac{2}{3\alpha} a_2, \quad V_{22} = a_2 t.$$

Für $\varrho = \varrho_{3,4} = \pm i\alpha$ haben die Gleichungen (5. 1), wie sofort zu verifizieren ist, die Lösungen:

$$(5.7) \qquad A = a_1, \quad B = \pm 2 i a_1, \quad C = a_2, \quad D = \pm 2 i a_2.$$

Diesen Lösungen entsprechen die Integrale

$$(5.8) \qquad \begin{cases} U_{13} = a_1 \cdot \cos \alpha t, & U_{14} = a_1 \cdot \sin \alpha t, \\ U_{23} = -2 a_1 \sin \alpha t, & U_{24} = 2 a_1 \cos \alpha t, \\ V_{13} = a_2 \cos \alpha t, & V_{14} = a_2 \sin \alpha t, \\ V_{23} = -2 a_2 \sin \alpha t, & V_{24} = 2 a_2 \cos \alpha t. \end{cases}$$

Nun müssen noch die Koeffizienten A, B, C, D für die Wurzeln ϱ_5, ϱ_6, ϱ_7, ϱ_8 bestimmt werden. Zur einfacheren Berechnung setzen wir:

$$(5.9) \qquad C = C_1 + \frac{a_2}{a_1} A, \quad D = D_1 + \frac{a_2}{a_1} B,$$

was auch der in (4. 8) bis (4. 9) durchgeführten Berechnungsart der Determinante entspricht. Dann geht die zweite Gleichung von (5. 1) über in:

$$(5.10) \qquad \frac{a_1}{a_2} M_2 D_1 = 2\alpha\varrho A + \varrho^2 B.$$

Dies ergibt in die erste und vierte Gleichung von (5. 1) eingesetzt:

$$(5.11) \qquad \begin{cases} (\varrho^2 - 3\alpha^2) A - 2\alpha\varrho B + 2 \frac{a_1}{a_2} M_2 C_1 = 0, \\ 2\alpha\varrho (\varrho^2 + q) A + (\varrho^4 + \varrho^2 q) B + 2\alpha\varrho \frac{a_1}{a_2} M_2 C_1 = 0. \end{cases}$$

Da die zugehörige Determinante verschwindet, so konnte eine Gleichung von (5. 1) (im vorliegenden Fall die dritte) weggelassen werden.

Durch Elimination von C_1 aus den beiden Gleichungen (5. 11) erhält man:

$$\alpha (\varrho^2 + 3\alpha^2 + 2q) A + \varrho (\varrho^2 + 2\alpha^2 + q) B = 0.$$

Eine Lösung davon ist:

$$(5.12) \qquad A = -\varrho (\varrho^2 + 2\alpha^2 + q) a_1 M_2, \quad B = \alpha (\varrho^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_1 M_2.$$

Dann liefern die ersten beiden Gleichungen von (5. 1):

$$(5.\,13)\qquad C = \varrho\,(\varrho^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1, \qquad D = -\,\alpha\,(\varrho^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1.$$

Für $\varrho_{5,6} = \pm\,\sigma$ werden die entsprechenden partikulären Integrale:

$$(5.\,14)\qquad \begin{cases} U_{15} = -\,\sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \cdot e^{\sigma t}, \\ U_{25} = \alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 \cdot e^{\sigma t}, \\ V_{15} = \sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 \cdot e^{\sigma t}, \\ V_{25} = -\,\alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1 \cdot e^{\sigma t}; \end{cases}$$

$$(5.\,14')\qquad \begin{cases} U_{16} = \sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \cdot e^{-\sigma t}, \\ U_{26} = \alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 \cdot e^{-\sigma t}, \\ V_{16} = -\,\sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 \cdot e^{-\sigma t}, \\ V_{26} = -\,\alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1 \cdot e^{-\sigma t}. \end{cases}$$

Für $\varrho_{7,8} = \pm\,i\tau$ lauten die partikulären Integrale:

$$(5.\,15)\qquad \begin{cases} U_{17} = \tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \sin \tau t, \\ U_{27} = \alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 \cos \tau t, \\ V_{17} = -\,\tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 \sin \tau t, \\ V_{27} = -\,\alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1 \cos \tau t; \end{cases}$$

$$(5.\,15')\qquad \begin{cases} U_{18} = -\,\tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \cos \tau t, \\ U_{28} = \alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 \sin \tau t, \\ V_{18} = \tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 \cos \tau t, \\ V_{28} = -\,\alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1 \sin \tau t. \end{cases}$$

Die allgemeinen Lösungen U, V werden dann aus den partikulären Integralen gemäß den Formeln

$$U_1 = \sum_{\nu=1}^{8} A_\nu U_{1\nu}, \quad U_2 = \sum_{\nu=1}^{8} A_\nu U_{2\nu}, \quad V_1 = \sum_{\nu=1}^{8} A_\nu V_{1\nu}, \quad V_2 = \sum_{\nu=1}^{8} A_\nu V_{2\nu}$$

zusammengesetzt, wobei die A_ν beliebige reelle Konstante bedeuten.

So erhalten wir schließlich die allgemeinen Lösungen:

$$(5.\,16)\qquad \begin{cases} U_1 = -\,\dfrac{2}{3\,\alpha}\,a_1 A_2 + a_1 A_3 \cos \alpha t + a_1 A_4 \sin \alpha t \\ \qquad -\,\sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 A_5 \cdot e^{\sigma t} \\ \qquad +\,\sigma\,(\sigma^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 A_6 \cdot e^{-\sigma t} \\ \qquad +\,\tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 A_7 \cdot \sin \tau t \\ \qquad -\,\tau\,(-\,\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 A_8 \cos \tau t; \\ U_2 = a_1 A_1 + a_1 A_2 t - 2\,a_1 A_3 \sin \alpha t + 2\,a_1 A_4 \cos \alpha t \\ \qquad +\,\alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 A_5 \cdot e^{\sigma t} \\ \qquad +\,\alpha\,(\sigma^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 A_6 \cdot e^{-\sigma t} \\ \qquad +\,\alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 A_7 \cdot \cos \tau t \\ \qquad +\,\alpha\,(-\,\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 A_8 \sin \tau t; \end{cases}$$

$$
(5.16)\quad
\begin{cases}
V_1 = -\frac{2}{3\alpha}a_2A_2 + a_2A_3\cos\alpha t + a_2A_4\sin\alpha t \\
\quad + \sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\,a_2M_1A_5\cdot e^{\sigma t} \\
\quad - \sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\,a_2M_1A_6\cdot e^{-\sigma t} \\
\quad - \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\,a_2M_1A_7\sin\tau t \\
\quad + \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\,a_2M_1A_8\cos\tau t; \\
V_2 = a_2A_1 + a_2A_2t - 2\,a_2A_3\sin\alpha t + 2\,a_2A_4\cos\alpha t \\
\quad - \alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,a_2M_1A_5\cdot e^{\sigma t} \\
\quad - \alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,a_2M_1\cdot A_6\cdot e^{-\sigma t} \\
\quad - \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,a_2M_1A_7\cos\tau t \\
\quad - \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,a_2M_1A_8\sin\tau t.
\end{cases}
$$

§ 6.

Integrale U und V für $\lambda = 0$ mit besonderen Anfangsbedingungen.

Nehmen wir an, daß für $t = 0$ die Bahnen der beiden Punkte m_1 und m_2 die reelle Achse senkrecht schneiden, dann muß gelten:

$$(6.1)\qquad U_{20} = 0, \qquad V_{20} = 0, \qquad \dot{U}_{10} = 0, \qquad \dot{V}_{10} = 0.$$

Dabei deutet der Index 0 die Zeit $t = 0$ an.

Die Gleichungen (6. 1) lassen sich aus (5. 16) ausführlich angeben:

$$
(6.2)\quad
\begin{cases}
0 = A_1 + 2A_4 + \alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,M_2(A_5 + A_6) \\
\qquad + \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,M_2A_7; \\
0 = A_1 + 2A_4 - \alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,M_1(A_5 + A_6) \\
\qquad - \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\,M_1A_7; \\
0 = \alpha A_4 - \sigma^2(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\,M_2(A_5 + A_6) \\
\qquad + \tau^2(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\,M_2A_7; \\
0 = \alpha A_4 + \sigma^2(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\,M_1(A_5 + A_6) \\
\qquad - \tau^2(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\,M_1A_7.
\end{cases}
$$

Addieren wir die mit a_2M_1 multiplizierte dritte Gleichung zu der mit a_1M_2 multiplizierten vierten, so finden wir bei Beachtung von (3. 2):

$$\alpha q A_4 = 0,$$

und daraus

$$(6.3)\qquad A_4 = 0.$$

Ebenso finden wir, wenn wir die mit a_2M_1 multiplizierte erste Gleichung zu der mit a_1M_2 multiplizierten zweiten addieren:

$$A_1 + 2A_4 = 0$$

und daraus

$$(6.4)\qquad A_1 = 0.$$

Jetzt ist das System (6. 2) auf die beiden Gleichungen

$$(6.5)\qquad \begin{cases} 0 = (\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)(A_5 + A_6) + (-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) A_7, \\ 0 = -\sigma^2(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)(A_5 + A_6) + \tau^2(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) A_7. \end{cases}$$

zurückgeführt. Die Determinante des Systems ist:

$$(6.6)\qquad \begin{vmatrix} \sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q, & -\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q \\ -\sigma^2(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q), & \tau^2(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q \\ -\sigma^2 R, & \tau^2 S \end{vmatrix} = \tau^2 PS + \sigma^2 RQ.$$

In diesem Ausdruck ist jedes Glied >0. Für P und R ist das sofort einzusehen und für Q und S konnten die Abschätzungen (4. 15) und (4. 16) angegeben werden. Also wird die betrachtete Determinante > 0 und daher hat das System (6. 5) nur die Lösungen:

$$(6.7)\qquad A_5 + A_6 = 0, \quad A_7 = 0.$$

Bei den vorgeschriebenen speziellen Anfangsbedingungen erhalten wir also schließlich:

$$(6.8)\qquad \begin{cases} U_1 = -\frac{2}{3\alpha} a_1 A_2 + a_1 A_3 \cos \alpha t + 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q) a_1 M_2 A_6 \mathfrak{Cof}\, \sigma t \\ \qquad - \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) a_1 M_2 A_8 \cos \tau t; \\ U_2 = a_1 A_2 t - 2 a_1 A_3 \sin \alpha t - 2\alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_1 M_2 A_6 \mathfrak{Sin}\, \sigma t \\ \qquad + \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_1 M_2 A_8 \sin \tau t; \\ V_1 = -\frac{2}{3\alpha} a_2 A_2 + a_2 A_3 \cos \alpha t - 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q) a_2 M_1 A_6 \mathfrak{Cof}\, \sigma t \\ \qquad + \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) a_2 M_1 A_8 \cos \tau t; \\ V_2 = a_2 A_2 t - 2 a_2 A_3 \sin \alpha t + 2\alpha(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_2 M_1 A_6 \mathfrak{Sin}\, \sigma t \\ \qquad - \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_2 M_1 A_8 \sin \tau t. \end{cases}$$

§ 7.

Periodische Integrale U und V für $\lambda \neq 0$.

Aus den Integralen (6. 8) greifen wir das spezielle heraus, bei dem $A_8 = 1$ und alle übrigen $A_\nu = 0$. Es lautet:

$$(7.1)\qquad \begin{cases} U_1 = -\tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) a_1 M_2 \cos \tau t, \\ U_2 = \alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_1 M_2 \sin \tau t, \\ V_1 = \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) a_2 M_1 \cos \tau t, \\ V_2 = -\alpha(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_2 M_1 \sin \tau t, \end{cases}$$

und hat die Anfangswerte

$$U_{20} = 0, \quad V_{20} = 0, \quad \dot{U}_{10} = 0, \quad \dot{V}_{10} = 0,$$
$$U_{10} = -\tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_1 M_2,$$
$$V_{10} = \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_2 M_1,$$
$$\dot{U}_{20} = \alpha\tau(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_1 M_2,$$
$$\dot{V}_{20} = -\alpha\tau(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_2 M_1,$$

sowie die Periode $\frac{2\pi}{\tau}$.

Wir suchen nun die Integrale der Gleichungen (4. 5), in denen nicht mehr $\lambda = 0$ ist. In Analogie zu (6. 8) sollen sie die variierten Anfangswerte haben:

$$(7.\,2)\quad \begin{cases} U_{20} = 0, \quad V_{20} = 0, \quad \dot{U}_{10} = 0, \quad \dot{V}_{10} = 0, \\ U_{10} = -\frac{2}{3\alpha} a_1 A_2 + a_1 A_3 + 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_1 M_2 A_6 \\ \qquad\qquad - \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_1 M_2, \\ V_{10} = -\frac{2}{3\alpha} a_2 A_2 + a_2 A_3 - 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_2 M_1 A_6 \\ \qquad\qquad + \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_2 M_1, \\ \dot{U}_{20} = a_1 A_2 - 2\alpha a_1 A_3 - 2\alpha\sigma(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_1 M_2 A_6 \\ \qquad\qquad + \alpha\tau(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_1 M_2, \\ \dot{V}_{20} = a_2 A_2 - 2\alpha a_2 A_3 + 2\alpha\sigma(\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_2 M_1 A_6 \\ \qquad\qquad - \alpha\tau(-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q)\, a_2 M_1. \end{cases}$$

Die durch diese Anfangswerte bestimmten Integrale bezeichnen wir fortan mit U_1, U_2, V_1 und V_2. Dabei seien $|A_2|$, $|A_3|$ und $|A_6|$ kleine Größen. In ausführlicher Schreibweise ist:

$$(7.\,3)\quad \begin{cases} U_1 = U_1(t, \lambda, A_2, A_3, A_6), & U_2 = U_2(t, \lambda, A_2, A_3, A_6), \\ V_1 = V_1(t, \lambda, A_2, A_3, A_6), & V_2 = V_2(t, \lambda, A_2, A_3, A_6). \end{cases}$$

Insbesondere ergeben sich dann als bemerkenswerte Spezialwerte:

1. die schon unter (7. 2) angeführten Gleichungen:

$$(7.\,4)\quad \begin{cases} U_1(0, \lambda, A_2, A_3, A_6) = -\frac{2}{3\alpha} a_1 A_2 + a_1 A_3 \\ \qquad + 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_1 M_2 A_6 - \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_1 M_2, \\ U_2(0, \lambda, A_2, A_3, A_6) = 0, \\ V_1(0, \lambda, A_2, A_3, A_6) = -\frac{2}{3\alpha} a_2 A_2 + a_2 A_3 \\ \qquad - 2\sigma(\sigma^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_2 M_1 A_6 + \tau(-\tau^2 + 2\alpha^2 + q)\, a_2 M_1, \\ V_2(0, \lambda, A_2, A_3, A_6) = 0; \end{cases}$$

2. die bereits unter (7. 1) angeschriebenen Integrale:

$$(7.5)\quad \begin{cases} U_1(t,0,0,0,0) = -\tau(-\tau^2+2\alpha^2+q)\,a_1 M_2 \cos\tau t, \\ U_2(t,0,0,0,0) = \alpha(-\tau^2+3\alpha^2+2q)\,a_1 M_2 \sin\tau t, \\ V_1(t,0,0,0,0) = \tau(-\tau^2+2\alpha^2+q)\,a_2 M_1 \cos\tau t, \\ V_2(t,0,0,0,0) = -\alpha(-\tau^2+3\alpha^2+2q)\,a_2 M_1 \sin\tau t. \end{cases}$$

Die Funktionen U_1, U_2, V_1 und V_2 von (7. 3) können, wie schon in § 3, III festgestellt wurde, für absolut kleine Werte von λ, A_2, A_3 und A_6 in Potenzreihen dieser Variablen entwickelt werden, und zwar, wenn $|\lambda|$, $|A_2|$, $|A_3|$ und $|A_6|$ klein genug gewählt werden, im ganzen Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\tau}$. Dabei sind die Beziehungen (7. 5) zu beachten. Außerdem sind die Funktionen (7. 3) für $t = 0$ identisch mit (7. 2) bzw. (7. 4) und für $\lambda = 0$ identisch mit (6. 8), wenn dort $A_8 = 1$ gesetzt wird.

Nach den in § 3, II und § 3, III angeführten Bemerkungen wird für hinreichend kleine $|\lambda|$, $|A_2|$, $|A_3|$ und $|A_6|$ die Periode $\frac{2\pi+2\delta}{\tau}$ vorhanden sein und damit eine ganze Schar periodischer Bahnkurven existieren, wenn:

$$(7.6)\quad \boxed{\begin{aligned} &U_2\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau}, \lambda, A_2, A_3, A_6\Big) = 0, \quad V_2\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau}, \lambda, A_2, A_3, A_6\Big) = 0, \\ &\dot U_1\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau}, \lambda, A_2, A_3, A_6\Big) = 0, \quad \dot V_1\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau}, \lambda, A_2, A_3, A_6\Big) = 0. \end{aligned}}$$

wenn also die reelle Achse außer für $t = 0$ noch ein zweites Mal senkrecht von beiden Bahnen geschnitten wird.

Es ist zu untersuchen, ob aus den Gleichungen (7. 6) A_2, A_3, A_6 *und* δ *als Funktionen von* λ *berechnet werden können.* Für $\lambda = 0$ ist die Lösung $A_2 = A_3 = A_6 = \delta = 0$ bekannt (7. 5). Für hinreichend kleine Werte von λ wird gewiß eine Lösung existieren, bei der dann auch $|\delta|$ und $|A_\nu|$ mit $\nu = 2, 3, 6$ sehr klein sind, wenn die Funktionaldeterminante von (7. 6) nach δ und A_ν für $\delta = A_2 = A_3 = A_6 = 0$ und $\lambda = 0$ nicht verschwindet. Es muß also nachgewiesen werden:

$$(7.7)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U_2}{\partial A_2}, & \frac{\partial U_2}{\partial A_3}, & \frac{\partial U_2}{\partial A_6}, & \frac{\partial U_2}{\partial \delta} \\ \frac{\partial V_2}{\partial A_2}, & \frac{\partial V_2}{\partial A_3}, & \frac{\partial V_2}{\partial A_6}, & \frac{\partial V_2}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \dot U_1}{\partial A_2}, & \frac{\partial \dot U_1}{\partial A_3}, & \frac{\partial \dot U_1}{\partial A_6}, & \frac{\partial \dot U_1}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \dot V_1}{\partial A_2}, & \frac{\partial \dot V_1}{\partial A_3}, & \frac{\partial \dot V_1}{\partial A_6}, & \frac{\partial \dot V_1}{\partial \delta} \end{vmatrix} \neq 0$$

für $\delta = A_2 = A_3 = A_6 = 0$, $\lambda = 0$.

Dabei sind wegen $\lambda = 0$ nach (6. 8) unter U_2, V_2, $\dot{U}_1$ und $\dot{V}_1$ folgende Funktionen von A_2, A_3, A_6 und δ zu verstehen:

$$
(7.8)\quad \left\{\begin{aligned}
U_2\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau},\,0,\,A_2,\,A_3,\,A_6\Big) &= a_1 A_2\cdot\frac{\pi+\delta}{\tau} - 2a_1 A_3 \sin\frac{\alpha(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - 2\alpha(\sigma^2+3\alpha^2+2q)\,a_1 M_2 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad + \alpha(-\tau^2+3\alpha^2+2q)\,a_1 M_2 \sin(\pi+\delta),\\
V_2\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau},\,0,\,A_2,\,A_3,\,A_6\Big) &= a_2 A_2\cdot\frac{\pi+\delta}{\tau} - 2a_2 A_3 \sin\frac{\alpha(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad + 2\alpha(\sigma^2+3\alpha^2+2q)\,a_2 M_1 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - \alpha(-\tau^2+3\alpha^2+2q)\,a_2 M_1 \sin(\pi+\delta),\\
\dot{U}_1\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau},\,0,\,A_2,\,A_3,\,A_6\Big) &= -\alpha a_1 A_3 \sin\frac{\alpha(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad + 2\sigma^2(\sigma^2+2\alpha^2+q)\,a_1 M_2 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad + \tau^2(-\tau^2+2\alpha^2+q)\,a_1 M_2 \sin(\pi+\delta),\\
\dot{V}_1\Big(\tfrac{\pi+\delta}{\tau},\,0,\,A_2,\,A_3,\,A_6\Big) &= -\alpha a_2 A_3 \sin\frac{\alpha(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - 2\sigma^2(\sigma^2+2\alpha^2+q)\,a_2 M_1 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - \tau^2(-\tau^2+2\alpha^2+q)\,a_2 M_1 \sin(\pi+\delta).
\end{aligned}\right.
$$

§ 8.

Berechnung der Funktionaldeterminante.

Die Determinante (7. 7) läßt sich in der Gestalt schreiben:

$$
(8.1)\quad \begin{vmatrix}
\frac{\partial U_2}{\partial A_2} & \frac{\partial U_2}{\partial A_3} & \frac{\partial U_2}{\partial A_6} & \frac{\partial U_2}{\partial \delta}\\
\frac{\partial V_2}{\partial A_2}-\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial U_2}{\partial A_2} & \frac{\partial V_2}{\partial A_3}-\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial U_2}{\partial A_3} & \frac{\partial V_2}{\partial A_6}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial A_6} & \frac{\partial V_2}{\partial \delta}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial \delta}\\
\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_2} & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_3} & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_6} & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \delta}\\
\frac{\partial \dot{V}_1}{\partial A_2}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_2} & \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial A_3}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_3} & \frac{\partial \dot{V}_1}{\delta A_6}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_6} & \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial \delta}-\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \delta}
\end{vmatrix}
$$

für $A_\nu = 0$, $\delta = \lambda = 0$. Dabei ist nach (7. 8) und (3. 2)

$$
(8.2)\quad \left\{\begin{aligned}
V_2 - \tfrac{a_2}{a_1}U_2 &= 2\alpha q(\sigma^2+3\alpha^2+2q)\,a_2 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - \alpha q(-\tau^2+3\alpha^2+2q)\,a_2 \sin(\pi+\delta),\\
\dot{V}_1 - \tfrac{a_2}{a_1}\dot{U}_1 &= -2\sigma^2 q(\sigma^2+2\alpha^2+q)\,a_2 A_6\,\mathfrak{Sin}\frac{\sigma(\pi+\delta)}{\tau}\\
&\quad - \tau^2 q(-\tau^2+2\alpha^2+q)\,a_2\cdot\sin(\pi+\delta).
\end{aligned}\right.
$$

Daraus sieht man sofort, daß der Ausdruck (8. 1) für $A_r = \delta = 0$ und $\lambda = 0$ den Wert hat:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_2}{\partial A_2}, & \frac{\partial U_2}{\partial A_3}, & \frac{\partial U_2}{\partial A_6}, & \frac{\partial U_2}{\partial \delta} \\ 0, & 0, & \frac{\partial V_2}{\partial A_6} - \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial A_6}, & \frac{\partial V_2}{\partial \delta} - \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial U_2}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_2}, & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_3}, & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_6}, & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \delta} \\ 0, & 0, & \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial A_6} - \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_6}, & \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial \delta} - \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \delta} \end{vmatrix}$$

und sich daher, abgesehen vom Vorzeichen, als das Produkt der beiden zweireihigen Determinanten

$$(8.3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial U_2}{\partial A_2}, & \frac{\partial U_2}{\partial A_3} \\ \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_2}, & \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial V_2}{\partial A_6} - \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial A_6}, & \frac{\partial V_2}{\partial \delta} - \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial U_2}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial A_6} - \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial A_6}, & \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial \delta} - \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \delta} \end{vmatrix} = \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

darstellen läßt. Aus (8. 3) und (7. 8) ergibt sich:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{\tau} \cdot a_1, & -2 a_1 \sin \frac{\alpha \pi}{\tau} \\ 0, & -\alpha a_1 \cdot \sin \frac{\alpha \pi}{\tau} \end{vmatrix} = -\alpha \frac{\pi}{\tau} a_1^2 \cdot \sin \frac{\alpha \pi}{\tau} \neq 0.$$

Denn nach (4. 14) ist $\alpha < \tau$ und folglich $\sin \frac{\alpha \pi}{\tau} \neq 0$.

Analog ergibt sich aus (8. 3) und (8. 2)

$$(8.4) \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\alpha q (\sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_2 \operatorname{Sin} \frac{\sigma \pi}{\tau}, & \alpha q (-\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q) a_2 \\ -2\sigma^2 q (\sigma^2 + 2\alpha^2 + q) a_2 \operatorname{Sin} \frac{\sigma \pi}{\tau}, & \tau^2 q (-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2^2 2\alpha q^2 \operatorname{Sin} \frac{\sigma \pi}{\tau} \cdot \begin{vmatrix} \sigma^2 + 3\alpha^2 + 2q, & -\tau^2 + 3\alpha^2 + 2q \\ -\sigma^2 (\sigma^2 + 2\alpha^2 + q), & \tau^2 (-\tau^2 + 2\alpha^2 + q) \end{vmatrix}.$$

Das ist aber die gleiche Determinante wie (6. 6) und daher ist ihr Wert >0. Da also jeder Faktor der Determinante (8. 1) >0 ist, *so ist damit die Existenz periodischer Bahnen in hinreichender Nähe um die geradlinigen Librationspunkte nachgewiesen.*

§ 9.

Diskussion der gefundenen periodischen Bahnen.

Es muß noch festgestellt werden, daß die gefundenen Lösungen auch wirklich neue, bis jetzt noch nicht bekannte Bahnen darstellen. Nach (4. 1), (4. 4) und (7. 1) werden sie durch die Gleichungen

$$u = u_1 + i u_2 = a_1 + \lambda U_1 + i \lambda U_2, \quad v = v_1 + i v_2 = a_2 + \lambda V_1 + i \lambda V_2,$$

mit

$$(9.1)\qquad \begin{cases} u_1 = a_1 - \lambda\tau\,(-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \cos\tau t + \ldots, \\ u_2 = \lambda\alpha\,(-\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_1 M_2 \sin\tau t + \ldots, \\ v_1 = a_2 + \lambda\tau\,(-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 \cos\tau t + \ldots, \\ v_2 = -\lambda\alpha\,(-\tau^2 + 3\,\alpha^2 + 2\,q)\,a_2 M_1 \sin\tau t + \ldots \end{cases}$$

dargestellt. Dabei sind die durch Punkte angedeuteten Glieder von höherer als erster Ordnung in λ und A_ν. Allgemein lautet eine solche Entwicklung:

$$u_1 = a_1 - \lambda\tau(-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 \cos\tau t + \lambda \sum C_{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4}(t) \cdot \lambda^{\varrho_1} A_2^{\varrho_2} \cdot A_3^{\varrho_3} \cdot A_6^{\varrho_4}.$$

Analoge Entwicklungen gelten für u_2, v_1 und v_2. Die Koeffizienten A_2, A_3 und A_6 sind dabei selbst Potenzreihen von λ ohne konstantes Glied, da ja nach Seite 463 für $\lambda = 0$ auch $A_\nu = 0$.

Die in § 1 angegebenen Lösungen von Lagrange haben alle die Eigenschaft, daß der Quotient $\frac{u}{v}$ konstant bleibt. Trifft dies aber für die vorliegenden Bahnen nicht zu, dann ist eine neue Schar gefunden. Zum Nachweis dieser Tatsache bilden wir den Quotienten $\frac{u}{v}$ für zwei verschiedene Werte von t:

1. Für $t = 0$ ist wegen (6. 1):

$$(9.2)\qquad \frac{u}{v} = \frac{u_{10}}{v_{10}} = \frac{a_1 - \lambda\tau\cdot(-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_1 M_2 + \ldots}{a_2 + \lambda\tau\cdot(-\tau^2 + 2\,\alpha^2 + q)\,a_2 M_1 + \ldots} = \frac{a_1 - \lambda' a_1 M_2 + \cdots}{a_2 + \lambda' a_2 M_1 + \cdots}.$$

Dabei ist λ' eine absolut kleine Größe. Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind von höherer als erster Ordnung in λ' und A_ν und haben alle den Faktor λ'.

2. Für $t = \frac{\pi}{\tau}$ ist wegen (6. 8) und (9. 1):

$$(9.3)\qquad \frac{u}{v} = \frac{a_1 + \lambda' a_1 M_2 + \ldots}{a_2 - \lambda' a_2 M_1 + \ldots},$$

wobei λ' den gleichen Wert hat wie in (9. 2).

Wir nehmen an, das Abstandsverhältnis $\frac{u}{v}$ wäre dauernd konstant. Dann müßten die in (9. 2) und (9. 3) angegebenen Werte gleich sein, also:

$$(9.4)\qquad \frac{a_1 - \lambda' a_1 M_2 + \ldots}{a_2 + \lambda' a_2 M_1 + \ldots} = \frac{a_1 + \lambda' a_1 M_2 + \ldots}{a_2 - \lambda' a_2 M_1 + \ldots}.$$

Beim Ausmultiplizieren fallen die konstanten Glieder heraus. Das dann sich ergebende Resultat lautet ausführlich geschrieben:

$$2\,\lambda' q\,a_1 \cdot a_2 + c_1 \lambda' A_2 + c_2 \lambda' A_3 + c_3 \lambda' A_6 + c_4 \lambda'^2 \ldots$$

$\ldots$ + Glieder höherer Ordnung $= 0$. Hier kann man den Faktor λ', der ja in allen Gliedern vorkommt, wegheben und erhält:

$$2\,q\,a_1 a_2 + c_1 A_2 + c_2 A_3 + c_3 A_6 + c_4 \lambda' \ldots = 0.$$

In dieser Reihe betrachten wir λ', A_2, A_3, und A_6 als die Veränderlichen. Für sehr kleine λ' werden auch die A_ν sehr klein. Liegt deshalb λ' hinreichend nahe an 0, dann bleibt auch der Reihenwert >0. Das widerspricht aber unserer Annahme. Also ist der Quotient $\frac{u}{v}$ für die beiden Zeiten $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{\tau}$ verschieden.

Daher liegen keine Lagrangeschen Lösungen vor und die Gleichungen (9. 1) *stellen wirklich neue Lösungen dar.*

Weiterhin sagen diese Gleichungen aus, daß die Massen m_1 und m_2 in erster Näherung kleine Ovale um ihre Librationspunkte beschreiben. Je kleiner die Durchmesser dieser geschlossenen Bahnen werden, um so mehr sind je zwei entsprechende Kurven, die von m_1 bzw. m_2 durchlaufen werden, ähnlich. Aus der Betrachtung der Vorzeichen der Glieder, die bei den sin- und cos-Funktionen stehen und wegen der Abschätzungen (4. 15) und (4. 16) schließt man leicht, daß beide Kurven für alle drei in § 2 angegebenen Fälle rückläufig sind.

§ 10.

Ein weiterer Ansatz für periodische Lösungen.

Ganz analog zu den Ausführungen in § 7, die sich fast Wort für Wort übertragen lassen, können wir aus den Integralen (6. 8), für welche $\lambda = 0$ ist, dasjenige herausgreifen, bei dem $A_3 = 1$ und alle übrigen $A_\nu = 0$. Zu diesem speziellen Integral suchen wir jetzt wieder solche mit variierten Anfangswerten, für welche dann natürlich wieder $\lambda \neq 0$. Der Nachweis, daß diese Lösungen periodisch sind, wird genau wie in § 8 durch Berechnung der Funktionaldeterminante erbracht. Ein dabei auftretender Sonderfall, bei welchem τ ein Vielfaches von α ist, wird nicht weiter untersucht.

Die so gefundene Schar von Bahnen ist noch zu diskutieren. Die Umlaufszeiten der Massen m_1 und m_2 um ihre Ruhepunkte im bewegten System sind näherungsweise $\frac{2\pi}{\alpha}$. Andererseits sind aber Lösungen bekannt, welche *genau* diese Periode besitzen. Denn die zwei unserer ganzen Untersuchung zugrunde liegenden Lagrangeschen Kreisbahnen mit der Periode $\frac{2\pi}{\alpha}$, welche im bewegten System die Ruhelagen a_1 und a_2 der Massen m_1 und m_2 werden, sind ein Paar von Einzelbahnen aus einer ganzen zweiparametrigen Schar Lagrangescher Ellipsen. Davon hat eine einparametrige Unterschar die gleiche Umlaufszeit und wird im rotierenden System durch kleine Umläufe um die Ruhepunkte dargestellt. Man kann leicht zeigen, daß diese Umläufe die reelle Achse zweimal senkrecht schneiden, so daß sie bei unserem Ansatz *mit herauskommen müssen.* Hiernach ist vorauszusehen, daß die aus dem Wurzelpaar $\pm i\alpha$ (4. 12) entspringende Lösungsschar nichts anderes ist als diese

Lagrangeschen Ellipsen. Das läßt sich in der Tat durch eine genaue Analyse bestätigen, wobei sich auch der Zusammenhang zwischen unserem Parameter λ und der Exzentrizität ε der betreffenden Ellipsen ergibt. Es wird:

$$A_6 = A_8 = 0. \tag{10.1}$$

Ferner erhalten wir durch Reihenentwicklungen jeweils bis zur dritten Potenz in ε:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{3} A_2 = \alpha \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{2} + \ldots \right), \\ \lambda A_3 = -(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots). \end{cases} \tag{10.2}$$

Die Rechnung mag hier unterdrückt werden, da die Bahnen ja nicht neu sind[8]).

[8]) Die ausführliche rechnerische Ableitung dieses Ergebnisses ist in der vollständigen Dissertationsschrift unter § 10 und 11 zu finden.

(Eingegangen am 28. Mai 1937.)

Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n.

(Teil I).

Von

Karl Heinrich Weise in Jena.

Einleitung.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird der Begriff des Berührungsmaßes bei Kurven[1]) auf Flächen ausgedehnt. Man spricht von einer Berührung mindestens k-ter Ordnung zweier p-dimensionaler Flächen $\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p)$, $\mathfrak{y}(v^1, \ldots, v^p)$ des n-dimensionalen Raumes R_n im Punkte P_0: $\mathfrak{x}(0, 0, \ldots, 0) = \mathfrak{y}(0, 0, \ldots, 0)$ (die näheren Differenzierbarkeitseigenschaften siehe § 1), wenn es eine Parameterzuordnung $u^\alpha = u^\alpha(v^1, \ldots, v^p)$ gibt derart, daß für $v^\alpha = c^\alpha t$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{x}(u^\alpha(c^\beta t)) - \mathfrak{y}(c^\alpha t)}{t^{k+1}} = \mathfrak{b}(c^1, \ldots, c^p)$$

bei beliebiger Wahl beschränkter Konstanten c^α existiert und endlich ist. Wie man im Einzelfalle entscheiden kann, ob eine solche Parameterzuordnung vorhanden ist, ist eine ganz andere Frage. Dabei sind vom geometrischen Standpunkt aus Kriterien wünschenswert, die unabhängig von Parameterdarstellung und Parameterzuordnung Aussagen über die Berührungsordnung gestatten. Bei der Elimination dieser Parameterzuordnung werden wir im § 2 auf Größen geführt, deren Verschwinden die Berührung mindestens k-ter Ordnung charakterisiert und die ich deshalb „Berührungsgrößen" nennen will. Das Verhalten dieser Berührungsgrößen bei Raum- und Parametertransformationen wird im § 1 untersucht. Wir erhalten folgendes Resultat:

Zwei gegebenen p-dimensionalen Flächen, welche sich in einem Punkte P_0 von mindestens k-ter Ordnung berühren, läßt sich eine $(n-p)$-gliedrige Schar von „Berührungstensoren" $(k+1)$-ter Ordnung zuordnen, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Berührung mindestens $(k+1)$-ter Ordnung darstellt. Da eine Berührung erster Ordnung in sehr einfacher Weise festgestellt werden kann, die Berührungstensoren bei gegebener Parameterdarstellung der Flächen aber berechnet werden können, wird durch eine sukzessive Anwendung dieses Ergebnisses das aufgeworfene Problem gelöst. Darüber hinaus hat man aber in einem nicht identisch ver-

[1]) E. Peschl u. K. H. Weise [1].

schwindenden Berührungstensor ein Maß für die Abweichung beider Flächen voneinander, d. h. für eine relative Krümmung! So wird es verständlich, daß diese Begriffsbildung sich als äußerst fruchtbar für den Aufbau einer Geometrie der p-dimensionalen Fläche erweist, wenn man diese mit geeigneten berührenden „Normalflächen" vergleicht.

Als Raumtransformationen können dabei beliebige, genügend oft stetig differenzierbare *topologische* Transformationen zugrunde gelegt werden. In der Anwendung wollen wir uns auf die affine Geometrie einer F_p im A_n beschränken. Die Durchführung des geometrischen Abschnittes dieser Arbeit erfolgt im Teil II.

Teil I.

Der Berührungstensor zweier Flächen.

Seite
§ 1. Vorbereitende Betrachtungen und Definitionen 470
§ 2. Bedingungsgleichungen für die Berührung k-ter Ordnung . 471
§ 3. Transformation der Berührungsgrößen 475
§ 4. Zusammenstellung der Eigenschaften der Berührungsgrößen. Die Berührungstensoren zweier Flächen 479

§ 1.

Vorbereitende Betrachtungen und Definitionen.

Zugrunde liegt ein leerer, im kleinen linearer Raum R_n, d. h. eine n-dimensionale Zahlenmannigfaltigkeit, in der beliebige samt ihrer Umkehrung genügend oft differenzierbare topologische Transformationen gestattet sind. Wir betrachten übrigens im R_n nur Teilstücke oder Umgebungen $U(P_0)$ eines Punktes P_0. Eine p-dimensionale Fläche $\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p)$ des R_n durch den Punkt P_0: $\mathfrak{x}(0, 0, \ldots, 0)$ heiße (samt ihrer Parameterdarstellung) *stetig differenzierbar*, wenn sie in den Komponenten $x^i(u^1, \ldots, u^p)$ durch im Bereich $-u_0^\alpha \leqq u^\alpha \leqq +u_0^\alpha$ stetig partiell differenzierbare Funktionen gegeben ist und

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2} \times \ldots \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^p}\right)_{P_0} \neq 0 \text{ ist}^2). \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ \alpha = 1, \ldots, p. \end{matrix}$$

Eine (samt ihrer Parameterdarstellung) stetig differenzierbare Fläche nennen wir von der Klasse C_k ($k \geqq 1$), wenn im angegebenen u^α-Bereich die k-ten partiellen Ableitungen von $x_i(u^1, \ldots, u^p)$ noch existieren und stetig sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Ableitungen in P_0 mit:

$$\left(\frac{\partial^k \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_k}}\right)_{P_0} = \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}.$$

[2]) $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1} \times \ldots \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^p}$ bedeutet ein äußeres Produkt der p Tangentialvektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha}$. Bezüglich der Schreibweise dieser und anderer Vektorprodukte schließe ich mich den Arbeiten R. König u. E. Peschl [2]; R. König u. K. H. Weise [3] an.

Zwei p-dimensionale stetig differenzierbare Flächen $\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p)$, $\mathfrak{y}(v^1, \ldots, v^p)$; $-u_0^\alpha \leqq u^\alpha \leqq +u_0^\alpha$, $-v_0^\alpha \leqq v^\alpha \leqq v_0^\alpha$ durch denselben Punkt P_0 mit $\mathfrak{x}(0, \ldots, 0) = \mathfrak{y}(0, \ldots, 0) = \mathfrak{x}^0$ berühren sich in P_0, wenn sie denselben Tangentialraum haben, d. h. wenn

$$\mathfrak{x}_\alpha^0 = a_\alpha^\beta \mathfrak{y}_\beta^0 \text{ [3]}$$

ist, und wir wollen dann auch immer, etwa durch Übertragung von v^α zu $a_\beta^\alpha v^\beta$ normieren: $\mathfrak{x}_\alpha^0 = \mathfrak{y}_\alpha^0$. Von jetzt ab setzen wir die betrachteten Flächen als sich berührend und normiert voraus. Für zwei sich in P_0 berührende Flächen der Klasse C_{k+1} sei die Berührungsordnung auf folgende Weise erklärt:

Wenn es eine samt ihrer Umkehrung in $U(P_0)$ $(k+1)$ mal stetig differenzierbare Zuordnung der Parameter $u^\alpha = u^\alpha(v^1, \ldots, v^p)$ gibt, so daß für $v^\alpha = c^\alpha t$ und $u^\alpha = u^\alpha(c^1 t, \ldots, c^p t)$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{x}[u^\alpha(c^\beta t)] - \mathfrak{y}(c^\beta t)}{t^{k+1}} = \mathfrak{b}(c^1, \ldots, c^p) \tag{1}$$

bei beliebiger Wahl beschränkter Konstanten c^β existiert und endlich ist, heißt die Berührung von mindestens k-ter Ordnung. Ist für irgendein System c^β $\mathfrak{b}(c^1, \ldots, c^\beta) \neq 0$, so heißt die Berührung von genau k-ter Ordnung.

Die gesuchten Kriterien für die Berührungsordnung erhalten wir aus dieser Definition durch Elimination der Parameterzuordnung. Um diese zu leisten, haben wir zunächst gewisse Bedingungsgleichungen aufzustellen.

§ 2.

Bedingungsgleichungen für die Berührung k-ter Ordnung.

Wir schreiben die Flächendarstellungen und Parameterzuordnung:

$$\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p) = \mathfrak{x}^0 + \mathfrak{x}_\alpha^0 u^\alpha + \frac{1}{2!}\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^0 u^\alpha u^\beta + \frac{1}{3!}\mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma}^0 u^\alpha u^\beta u^\gamma + \ldots + \mathfrak{r}_1^{(k+1)}, \tag{2,11}$$

$$\mathfrak{y}(v^1, \ldots, v^p) = \mathfrak{y}^0 + \mathfrak{y}_\alpha^0 v^\alpha + \frac{1}{2!}\mathfrak{y}_{\alpha\beta}^0 v^\alpha v^\beta + \frac{1}{3!}\mathfrak{y}_{\alpha\beta\gamma}^0 v^\alpha v^\beta v^\gamma + \ldots + \mathfrak{r}_2^{(k+1)} \tag{2,12}$$

mit

$$\mathfrak{x}^0 = \mathfrak{y}^0; \quad \mathfrak{x}_\alpha^0 = \mathfrak{y}_\alpha^0,$$

$$\mathfrak{r}_1^{(k+1)} = \left\{\left(\frac{\partial^{k+1} x^i}{\partial u^{\alpha_1} \ldots \partial u^{\alpha_{k+1}}}\right)_{\mathfrak{y}_1^i \cdot u^\alpha} \cdot \frac{u^{\alpha_1} \ldots u^{\alpha_{k+1}}}{(k+1)!}\right\},$$

$$\mathfrak{r}_2^{(k+1)} = \left\{\left(\frac{\partial^{k+1} y^i}{\partial v^{\alpha_1} \ldots \partial v^{\alpha_{k+1}}}\right)_{\mathfrak{y}_2^i \cdot v^\alpha} \cdot \frac{v^{\alpha_1} \ldots v^{\alpha_{k+1}}}{(k+1)!}\right\}.$$

$$u^\alpha = v^\alpha + \frac{1}{2!}a_{\alpha_1\alpha_2}^\alpha v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} + \frac{1}{3!}a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^\alpha v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} v^{\alpha_3} + \ldots + r^{(k+1)} \tag{2,13}$$

[3]) Über gleiche Indizes ist zu summieren.

mit

$$r^{\alpha}_{(k+1)} = \left\{\left(\frac{\partial^{k+1} u^{\alpha}}{\partial v^{\alpha_1} \dots \partial v^{\alpha_{k+1}}}\right)_{\vartheta(\alpha)\,.\,v^{\alpha}} \frac{v^{\alpha_1} \dots v^{\alpha_{k+1}}}{(k+1)!}\right\}.$$

Es folgt:

$$u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} = v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} + \frac{1}{3!} a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3} + \frac{1}{4!} a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3} v^{\beta_4} + \dots$$

$$u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} = v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} v^{\alpha_3} + \frac{1}{4!} a^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3} v^{\beta_4} + \dots$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Dabei ist

$$\frac{1}{m!} a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \dots \beta_m} v^{\beta_1} \dots v^{\beta_m} = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l!\,(m-l)!} a^{\alpha_1}_{\beta_1 \dots \beta_l} a^{\alpha_2}_{\beta_{l+1} \dots \beta_m} v^{\beta_1} \dots v^{\beta_m}$$

mit

$$a^{\alpha_\nu}_{\beta_\nu} = \delta^{\alpha_\nu}_{\beta_\nu} \begin{cases} = 1 \text{ für } \alpha_\nu = \beta_\nu \\ = 0 \text{ für } \alpha_\nu \neq \beta_\nu \end{cases} \quad \text{(Kronecker-Symbol).}$$

Ist $S_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \nu_1 & \dots & \nu_m \end{pmatrix}$ eine Permutation, so setzen wir zur Abkürzung

$$S\left(a^{\alpha_1}_{\beta_1 \dots \beta_l} a^{\alpha_2}_{\beta_{l+1} \dots \beta_m}\right) = m_1!\, m_2! \dots m_j! \sum_{\nu} S_\nu \left(a^{\alpha_1}_{\beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_2}} a^{\alpha_2}_{\beta_{\nu_{l+1}} \dots \beta_{\nu_m}}\right),$$

wenn unter den zu vertauschenden Indizes $\beta_1, \dots, \beta_m$ genau je m_1, je m_2, ... usw. unter sich gleich sind. Für die Konstanten $a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \dots \beta_m}$ folgt:

$$a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l!\,(m-l)!} S\left(a^{\alpha_1}_{\beta_1 \dots \beta_l} a^{\alpha_2}_{\beta_{l+1} \dots \beta_m}\right).$$

Allgemein haben wir die Rekursionsformeln:

(2, 2)
$$\boxed{a^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \sum_{l=1}^{m-j+1} \frac{1}{l!\,(m-l)!} S\left(a^{\alpha_1}_{\beta_1 \dots \beta_l} a^{\alpha_2 \dots \alpha_j}_{\beta_{l+1} \dots \beta_m}\right)}$$

mit

$$a^{\alpha_2 \dots \alpha_j}_{\beta_2 \dots \beta_j} = S\left(\delta^{\alpha_2}_{\beta_2} \dots \delta^{\alpha_j}_{\beta_j}\right); \quad a^{\alpha_\nu}_{\beta_\nu} = \delta^{\alpha_\nu}_{\beta_\nu}.$$

Schließlich ergibt sich unter Verwendung der Parameterzuordnung (2, 13):

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}(u^1, \dots u^p) - \mathfrak{y}(v^1, \dots, v^p) \\ &= \mathfrak{x}^0_\alpha \left[v^\alpha + \frac{1}{2!} a^\alpha_{\beta_1 \beta_2} v^{\beta_1} v^{\beta_2} + \dots\right] - \mathfrak{y}^0_\alpha v^\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2!} \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \alpha_2} \left[v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} + \frac{1}{3!} a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3} + \dots\right] - \frac{1}{2!} \mathfrak{y}^0_{\alpha_1 \alpha_2} v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \mathfrak{r}^{(k+1)}_1 - \mathfrak{r}^{(k+1)}_2 \end{aligned}$$

oder

$$\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p) - \mathfrak{y}(v^1, \ldots, v^p)$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\mathfrak{x}^0_\alpha a^\alpha_{\beta_1\beta_2} + \mathfrak{x}^0_{\beta_1\beta_2} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1\beta_2}\right] v^{\beta_1} v^{\beta_2}$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\mathfrak{x}^0_\alpha a^\alpha_{\beta_1\beta_2\beta_3} + \frac{1}{2!}\mathfrak{x}^0_{\alpha_1\alpha_2} a^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_3} + \mathfrak{x}^0_{\beta_1\beta_2\beta_3} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1\beta_2\beta_3}\right] v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3}$$

$$+ \frac{1}{4!}\left[\mathfrak{x}^0_\alpha a^\alpha_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} + \frac{1}{2!}\mathfrak{x}^0_{\alpha_1\alpha_2} a^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}\mathfrak{x}^0_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} a^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} + \mathfrak{x}^0_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}\right] v^{\beta_1} v^{\beta_2} v^{\beta_3} v^{\beta_4}$$

$$+ \ldots$$

$$\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^p) - \mathfrak{y}(v^1, \ldots, v^p)$$

$$= \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\left[\sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l!}\mathfrak{x}^0_{\alpha_1\ldots\alpha_l} a^{\alpha_1\ldots\alpha_l}_{\beta_1\ldots\beta_j} + \mathfrak{x}^0_{\beta_1\ldots\beta_j} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1\ldots\beta_j}\right] v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_j} + \ldots$$

Für die Berührung mindestens k-ter Ordnung folgen hieraus die Bedingungsgleichungen:

(2, 3)
$$\boxed{\sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l!}\mathfrak{x}^0_{\alpha_1\ldots\alpha_l} a^{\alpha_1\ldots\alpha_l}_{\beta_1\ldots\beta_j} + \mathfrak{x}^0_{\beta_1\ldots\beta_j} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1\ldots\beta_j} = 0, \quad j = 2, \ldots, k.}$$

Existiert umgekehrt ein System von Konstanten $a^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, a^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_k}$, so daß das System (2, 3) für $j = 2, \ldots, k$ in P_0 erfüllt ist, so ist die Transformation

$$u^\alpha = v^\alpha + \sum_{l=2}^{k} a^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_l} v^{\beta_1}\ldots v^{\beta_l}$$

sicher in $U(P_0)$ eindeutig umkehrbar und samt ihrer Umkehrung $(k+1)$mal stetig differenzierbar. Da für sie die Limes-Bedingungen der Definition erfüllt sind, ist das System (2, 3) für die Berührung mindestens k-ter Ordnung auch hinreichend.

Die Elimination der Konstanten läßt sich auf verschiedene Weise bewerkstelligen[4]). Das folgende Verfahren wurde im Hinblick auf die geometrische Anwendung im zweiten Teil dieser Arbeit gewählt.

Wir führen p kovariante Vektoren $\mathfrak{T}^\alpha$ mit den Komponenten T^α_i ein durch die Gleichungen:

(2, 4)
$$\mathfrak{x}^0_\alpha \circ \mathfrak{T}^\beta = \delta^\beta_\alpha \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\Big|_{P_0} T^\beta_i = \delta^\beta_\alpha.$$

---

[4]) Man vergleiche (1) „Über das Berührungsmaß von Kurven".

(Diese $\mathfrak{T}^\alpha$ sind keineswegs eindeutig festgelegt.) Skalare Multiplikation der Gleichungen (2, 3) mit $\mathfrak{T}^\alpha$ ergibt:

$$a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} + \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!}\, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \circ \mathfrak{T}^\alpha a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j} + (\mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_j}) \circ \mathfrak{T}^\alpha = 0,$$

oder

$$(2,5) \qquad \boxed{a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} = (\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_j}) \circ \mathfrak{T}^\alpha - \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!} (\mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \circ \mathfrak{T}^\alpha) a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j}.}$$

Da, wie aus den Rekursionsformeln (2, 2) folgt, die rechte Seite von Gleichung (2, 5) nur jeweils die Konstanten $a^\alpha_{\beta_1 \beta_2}, \dots, a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_{j-1}}$ enthält, stellt sie eine Rekursionsformel zur Berechnung der Konstanten aus den skalaren Produkten der Ableitungsvektoren mit den Vektoren $\mathfrak{T}^\alpha$ dar. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} a^\alpha_{\beta_1 \beta_2} &= (\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \beta_2} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \beta_2}) \circ \mathfrak{T}^\alpha, \\ a^\alpha_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} &= (\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}) \circ \mathfrak{T}^\alpha - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \alpha_2} \circ \mathfrak{T}^\alpha a^{\alpha_1 \alpha_2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \\ &= (\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}) \circ \mathfrak{T}^\alpha \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \alpha_2} \circ \mathfrak{T}^\alpha \big[S(\delta^{\alpha_1}_{\beta_1} (\mathfrak{y}^0_{\beta_2 \beta_3} - \mathfrak{x}^0_{\beta_2 \beta_3}) \circ \mathfrak{T}^{\alpha_2}) \\ &\qquad + S((\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \beta_2} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \beta_2}) \circ \mathfrak{T}^{\alpha_1} \delta^{\alpha_2}_{\beta_3}) \big], \end{aligned}$$

allgemein:

$$(2,61) \quad a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} = a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j}(\mathfrak{x}^0_\alpha, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \alpha_2}, \dots, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_j}; \mathfrak{y}^0_{\alpha_1}, \dots, \mathfrak{y}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_j}, \mathfrak{T}^\alpha).$$

Und ebenso folgt aus den Rekursionsformeln (2, 2) in Verbindung mit (2, 61):

$$(2,62) \quad a^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_m} = a^{\alpha_1 \dots \alpha_j}_{\beta_1 \dots \beta_m}(\mathfrak{x}^0_\alpha, \dots, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-j+1}}; \mathfrak{y}^0_\alpha, \dots, \mathfrak{y}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-j+1}}, \mathfrak{T}^\alpha).$$

Wir wollen noch von den vektoriellen Bedingungsgleichungen (2, 3) zu skalaren Gleichungen übergehen. Zu diesem Zweck führen wir einen weiteren kovarianten Vektor ein: $\mathfrak{N}$ mit den Komponenten N_i durch die Gleichungen:

$$(2,7) \qquad \mathfrak{x}^0_\alpha \circ \mathfrak{N} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \Big|_0 N_i = 0.$$

Skalare Multiplikation der Gleichungen (2, 3) mit $\mathfrak{N}$ ergibt unter Verwendung der Formeln (2, 6):

$$(2,8) \qquad \boxed{B_{\beta_1 \dots \beta_j} \equiv (\mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_j}) \circ \mathfrak{N} + \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!}\, \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \circ \mathfrak{N}\, a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j} = 0.}$$

Für die Berührung mindestens k-ter Ordnung ist somit das Verschwinden der Größen $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$, $j = 2, \dots, k$ für jede Wahl von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}^\alpha$ mit $\mathfrak{x}^0_\alpha \circ \mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{x}^0_\alpha \circ \mathfrak{T}^\beta = \delta^\beta_\alpha$ notwendig. Wir zeigen: Ist $B_{\beta_1 \dots \beta_j} = 0$, $j = 2, \dots, k$

für *alle* $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{x}_\alpha^0 = 0$ und ein gewisses System $\mathfrak{T}^\alpha$, so sind auch die Gleichungen (2, 3) erfüllt.

Beweis. Jede Gleichung $B_{\beta_1 \dots \beta_j} = 0$ hat die Form $\mathfrak{A}_{\beta_1 \dots \beta_j} \circ \mathfrak{N} = 0$, wobei in $\mathfrak{A}_{\beta_1 \dots \beta_j}$ kein $\mathfrak{N}$ vorkommt. Ist $\mathfrak{A}_{\beta_1 \dots \beta_j} \circ \mathfrak{N} = 0$ und $\mathfrak{x}_\alpha^0 \circ \mathfrak{N} = 0$ für *jedes* mögliche $\mathfrak{N}$, so folgt

$$\mathfrak{A}_{\beta_1 \dots \beta_j} + \tilde{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} \mathfrak{x}^0_\alpha = 0$$

oder

$$\mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} + \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!} \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j} + \tilde{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} \mathfrak{x}^0_\alpha = 0$$

schließlich

$$\tilde{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} = (\mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_j} - \mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_j}) \circ \mathfrak{T}^\alpha - \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!} \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \circ \mathfrak{T}^\alpha a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichungen mit $a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j}$ übereinstimmt, sind für die Größen $\tilde{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j}$ als Konstantensystem die Bedingungsgleichungen (2, 3) erfüllt.

Das Verschwinden der Größen $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$, $j = 2, \dots, k$ *für alle* $\mathfrak{N}$ *ist demnach notwendig und hinreichend für die Berührung mindestens k-ter Ordnung.*

Diese Eigenschaft rechtfertigt die Bezeichnung „Berührungsgrößen" für $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$.

§ 3.

Transformation der Berührungsgrößen.

Da wir jetzt die Bedeutung der Größen $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$ für die Frage der Berührungsordnung zweier Flächen erkannt haben, müssen wir ihre Abhängigkeit von der Wahl der Vektoren $\mathfrak{T}^\alpha, \mathfrak{N}$ und ihre Transformationseigenschaften bei Parameter- und Raumtransformationen untersuchen.

Sind $\mathfrak{T}^\alpha_1, \mathfrak{T}^\alpha_2$ zwei verschiedene Lösungssysteme der Gleichungen (2, 4), so gilt

$$\mathfrak{T}^\alpha_2 = \mathfrak{T}^\alpha_1 + \mathfrak{N} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N} \circ \mathfrak{x}^0_\alpha = 0.$$

Aus (2, 5), (2, 6), (2, 8) folgt:

(3, 1)
$$\left(a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} \Big|_{\mathfrak{T}^\alpha = \mathfrak{T}^\alpha_2} - a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_j} \Big|_{\mathfrak{T}^\alpha = \mathfrak{T}^\alpha_1}\right)$$

$$= - B_{\beta_1 \dots \beta_j} \Big|_{\mathfrak{T}^\alpha = \mathfrak{T}^\alpha_2} - \sum_{l=2}^{j-1} \frac{1}{l!} \mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \circ \mathfrak{T}^\alpha_1 \left(a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j} \Big|_{\mathfrak{T}^\alpha = \mathfrak{T}^\alpha_2} - a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_j} \Big|_{\mathfrak{T}^\alpha = \mathfrak{T}^\alpha_2}\right).$$

Behauptung. Ist $B_{\beta_1 \dots \beta_l} = 0$ für $l = 2, \dots, j$, so hängen $a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_l}$, $l = 2, \dots, j$ nicht von der Wahl von $\mathfrak{T}^\alpha$ ab.

Beweis. Für $j = 2$ folgt dies aus (3, 1). Der Satz sei für $j = k$ richtig; dann hängen nach den Rekursionsformeln (2, 2) auch $a^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}}$ $l = 2, \dots, k$ nicht von der Wahl von $\mathfrak{T}^\alpha$ ab. Für $j = k + 1$ folgt nun aber die Richtigkeit aus (3, 1). Damit gilt die Behauptung allgemein. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

Bei einer Berührung mindestens k-ter Ordnung sind die Berührungsgrößen $B_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}}$ *unabhängig von der Wahl des Vektorsystems* $\mathfrak{T}^\alpha$.

Jede Hyperebene durch den Punkt P_0, welche den Tangentialraum beider Flächen enthält, läßt sich durch einen Vektor $\mathfrak{N}$ charakterisieren und umgekehrt. Die Berührungsgrößen $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$ sind also „*in bezug auf eine Hyperebenenrichtung*" gebildet. Es sei $\mathfrak{N}^\varrho$, $\varrho = 1, \dots, r$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichungen $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{x}^0_\alpha = 0$ und $B^\varrho_{\beta_1 \dots \beta_j}$ die zugehörigen Berührungsgrößen. Ist $\mathfrak{N}$ eine beliebige Lösung von (2, 7), $\mathfrak{N} = \gamma_\varrho \mathfrak{N}^\varrho$, dann berechnen sich die zu der Hyperebenenstellung $\mathfrak{N}$ gehörigen Berührungsgrößen $B_{\beta_1 \dots \beta_j}$ aus (2, 8) zu:

$$B_{\beta_1 \dots \beta_j} = \gamma_\varrho B^\varrho_{\beta_1 \dots \beta_j}. \tag{3, 2}$$

Wir wollen nun die Abhängigkeit von Parametertransformationen untersuchen. Dabei ist zu beachten, daß bei Einführung neuer Parameter die Normierung $\mathfrak{x}^0_\alpha = \mathfrak{y}^0_\alpha$ nicht zerstört wird. Es seien

$$\begin{aligned} u^\alpha &= u^\alpha(\bar{u}^1, \dots \bar{u}^p), \\ v^\alpha &= v^\alpha(\bar{v}^1, \dots \bar{v}^p) \end{aligned}$$

in $U(P_0)$ eindeutig umkehrbare und samt ihrer Umkehrung $(k + 1)$ mal stetig differenzierbare Transformationen und

$$\left.\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial v^\alpha}{\partial \bar{v}^\lambda}\right|_{P_0} = w^\alpha_\lambda.$$

Dann bleibt die Normierung erhalten:

$$\bar{\mathfrak{x}}^0_\lambda = \mathfrak{x}^0_\alpha \left.\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda}\right|_{P_0} = \mathfrak{y}^0_\alpha \left.\frac{\partial v^\alpha}{\partial \bar{v}^\lambda}\right|_{P_0} = \bar{\mathfrak{y}}^0_\lambda.$$

Bei einer Berührung mindestens j-ter Ordnung folgt aus der Definitionsgleichung (1):

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{\mathfrak{x}[u^\alpha(c^\beta t)] - \mathfrak{y}(c^\beta t)}{t^{j+1}}\right] \circ \mathfrak{N}$$

$$= \left.\frac{\left(\dfrac{\partial^{j+1}\mathfrak{x}}{\partial v^{\alpha_1} \dots \partial v^{\alpha_{j+1}}} - \dfrac{\partial^{j+1}\mathfrak{y}}{\partial v^{\alpha_1} \dots \partial v^{\alpha_{j+1}}}\right) \circ \mathfrak{N}}{(j+1)!}\right|_{P_0} c^{\alpha_1} \dots c^{\alpha_{j+1}} = \frac{1}{(j+1)!} B_{\alpha_1 \dots \alpha_{j+1}} c^{\alpha_1} \cdots c^{\alpha_{j+1}}.$$

Durch die Parametertransformation geht die Zuordnung $u^\alpha = u^\alpha(v^1, \ldots, v^p)$ über in eine Zuordnung $\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^p)$ und $v^\alpha = c^\alpha t$ über in $\bar{v}^\alpha = \bar{v}^\alpha(c^1 t, \ldots, c^p t)$.

Es wird also

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\mathfrak{x}[u^\alpha(c^\beta t)]-\mathfrak{y}(c^\alpha t)}{t^{j+1}}\right]\circ\mathfrak{N}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\mathfrak{x}\left(u^\alpha[\bar{u}^\alpha(\bar{v}^\alpha(c^\alpha t))]\right)-\mathfrak{y}\left(v^\alpha(\bar{v}^\alpha(c^\alpha t))\right)}{j+1}\right]\circ\mathfrak{N}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\partial^{j+1}\mathfrak{x}}{\partial\bar{v}^{\alpha_1}\ldots\partial\bar{v}^{\alpha_{j+1}}}-\dfrac{\partial^{j+1}\mathfrak{y}}{\partial\bar{v}^{\alpha_1}\ldots\partial\bar{v}^{\alpha_{j+1}}}\right)}{(j+1)!}\Bigg|_{P_0}\cdot\frac{\partial\bar{v}^{\alpha_1}}{\partial v^{\beta_1}}\Bigg|_{P_0}\cdots\frac{\partial\bar{v}^{\alpha_{j+1}}}{\partial v^{\beta_{j+1}}}\Bigg|_{P_0}\cdot c^{\beta_1}\ldots c^{\beta_{j+1}}$$

$$+\frac{j}{(j+1)!}\left(\frac{\partial^j\mathfrak{x}}{\partial\bar{v}^\alpha\ldots\partial\bar{v}^{\alpha_j}}-\frac{\partial^j\mathfrak{y}}{\partial\bar{v}^{\alpha_1}\ldots\partial\bar{v}^{\alpha_j}}\right)\Bigg|_{P_0}\cdot\frac{d^2\bar{v}^{\alpha_1}}{dt^2}\Bigg|_{P_0}\cdot\frac{d\bar{v}^{\alpha_2}}{dt}\Bigg|_{P_0}\cdots\frac{d\bar{v}^{\alpha_j}}{dt}\Bigg|_{P_0}$$

$$+\ldots$$

$$+\frac{\left(\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\bar{v}^{\alpha_1}}-\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\bar{v}^{\alpha_1}}\right)}{(j+1)!}\Bigg|_{P_0}\cdot\frac{\partial^{j+1}\bar{v}^{\alpha_1}}{dt^{j+1}}\Bigg|_{P_0},$$

wobei infolge der Berührung mindestens j-ter Ordnung alle Glieder bis auf das erste verschwinden, so daß schließlich folgendes gilt:

$$\frac{1}{(j+1)!}B_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}}c^{\alpha_1}\cdots c^{\alpha_{j+1}}=\frac{1}{(j+1)!}\bar{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}}\breve{w}^{\alpha_1}_{\beta_1}\ldots\breve{w}^{\alpha_{j+1}}_{\beta_{j+1}}c^{\beta_1}\cdots c^{\beta_{j+1}}\breve{w}^{\alpha}_{\beta}w^{\gamma}_{\alpha}=\delta^{\gamma}_{\beta}$$

und wegen der Willkürlichkeit der c^α

$$B_{\alpha_1\ldots\alpha_{j+1}}=\bar{B}_{\beta_1\ldots\beta_{j+1}}\breve{w}^{\beta_1}_{\alpha_1}\ldots\breve{w}^{\beta_{j+1}}_{\alpha_{j+1}}. \tag{3,3}$$

Bei einer Berührung mindestens k-ter Ordnung verhalten sich die Berührungsgrößen $B_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ hinsichtlich normierter Parametertransformationen beider Flächen wie die Komponenten eines Tensors $(k+1)$-ten Grades.

Damit ist gezeigt, daß das Verschwinden der Berührungsgrößen parameterinvariant ist; die gegebene Definition der Berührungsordnung also nicht von der speziellen Parameterwahl abhängt.

Bei der normierten Transformation $u^\alpha = \bar{u}^\alpha$:

$$v^\alpha=\bar{v}^\alpha-\frac{1}{2!}a^\alpha_{\beta_1\beta_2}\bar{v}^{\beta_1}\bar{v}^{\beta_2};\quad \bar{u}^\alpha=\bar{v}^\alpha+\frac{1}{2!}\bar{a}^\alpha_{\beta_1\beta_2}\bar{v}^{\beta_1}\bar{v}^{\beta_2}+\ldots$$

wird $\bar{a}^\alpha_{\beta_1\beta_2}=0$ und damit $(\bar{\mathfrak{x}}^0_{\alpha_1\alpha_2}-\bar{\mathfrak{y}}^0_{\alpha_1\alpha_2})\circ\bar{\mathfrak{T}}^\alpha=0$; $\bar{\mathfrak{T}}^\alpha=\mathfrak{T}^\alpha$. Im Falle $B_{\beta_1\beta_2}=0$ und also $(\bar{\mathfrak{x}}^0_{\alpha_1\alpha_2}-\bar{\mathfrak{y}}^0_{\alpha_1\alpha_2})\circ\mathfrak{N}=0$ folgt aus diesen Relationen: $\bar{\mathfrak{x}}^0_{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\mathfrak{y}}^0_{\alpha_1\alpha_2}$. Es läßt sich bei einer Berührung mindestens zweiter Ordnung stets ein normiertes Parametersystem einführen, für welches erste und zweite Ableitungsvektoren beider Flächen in P_0 übereinstimmen.

Behauptung. Bei einer Berührung mindestens k-ter Ordnung läßt sich stets ein normiertes Parametersystem angeben, für welches die Ableitungsvektoren beider Flächen in P_0 bis zur k-ten Ordnung übereinstimmen.

Beweis. Für $k = 2$ ist der Satz bewiesen. Es sei u^α, v^α ein Parametersystem, in welchem $\mathfrak{x}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_j} = \mathfrak{y}^0_{\alpha_1 \dots \alpha_j}$, $j = 2, \dots, (k-1)$ gelte; dann ist $a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_l} = 0$, $l = 2, \dots, k-1$. Die (zulässige) normierte Parametertransformation

$$u^\alpha = \bar{u}^\alpha; \quad v^\alpha = \bar{v}^\alpha - \frac{1}{k!} a^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_k} \bar{v}^{\beta_1} \dots \bar{v}^{\beta_k}$$

eingesetzt in (2, 13), ergibt:

$$\bar{u}^\alpha = \bar{v}^\alpha + \frac{1}{(k+1)!} \bar{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}} \bar{v}^{\beta_1} \dots \bar{v}^{\beta_{k+1}}$$

und damit $\bar{a}^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_k} = 0$ oder $(\bar{\mathfrak{x}}^0_{\beta_1 \dots \beta_k} - \bar{\mathfrak{y}}^0_{\beta_1 \dots \beta_k}) \circ \bar{\mathfrak{T}}^\alpha = 0$. Aus (2, 8) haben wir $\bar{B}_{\beta_1 \dots \beta_k} = (\mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_k} - \bar{\mathfrak{y}}^0_{\beta_1 \dots \beta_k}) \circ \mathfrak{N}$ und für eine Berührung mindestens k-ter Ordnung folgt aus diesen Relationen wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\bar{\mathfrak{T}}^\alpha$, $\mathfrak{N}^\varrho$:

$$\bar{\mathfrak{x}}^0_{\beta_1 \dots \beta_k} = \bar{\mathfrak{y}}^0_{\beta_1 \dots \beta_k}.$$

Wie verhalten sich die Berührungsgrößen gegenüber Raumtransformationen?

Auf Grund des letzten Satzes können wir annehmen, daß bei Berührung mindestens k-ter Ordnung solche normierte Parameter auf beiden Flächen eingeführt sind, in denen alle Ableitungsvektoren in P_0 bis zur k-ten Ordnung für beide Flächen übereinstimmen. Dann ist

$$B_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}} = (\mathfrak{x}^0_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}} - \mathfrak{y}^0_{\beta_1 \dots \beta_{k+1}}) \circ \mathfrak{N}.$$

Bei einer $(k+1)$mal stetig differenzierbaren Raumtransformation $x^i = x^i(x^{*1}, \dots, x^{*n})$ gilt:

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{*k}} \frac{\partial x^{*k}}{\partial u^\alpha},$$

$$\frac{\partial^{k+1} x^i}{\partial u^{\beta_1} \dots \partial u^{\beta_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} x^i}{\partial x^{*l_1} \dots \partial x^{*l_{k+1}}} \frac{\partial x^{*l_1}}{\partial u^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{*l_{k+1}}}{\partial u^{\beta_{k+1}}} + \dots + \frac{\partial x^i}{\partial x^{*k}} \frac{\partial^{k+1} x^{*k}}{\partial u^{\beta_1} \dots \partial u^{\beta_{k+1}}}$$

und entsprechend:

$$\frac{\partial^{k+1} y^i}{\partial v^{\beta_1} \dots \partial v^{\beta_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} x^i}{\partial x^{*l_1} \dots \partial x^{*l_{k+1}}} \frac{\partial y^{*l_1}}{\partial v^{\beta_1}} \dots \frac{\partial y^{*l_{k+1}}}{\partial v^{\beta_{k+1}}} + \dots + \frac{\partial x^i}{\partial x^{*k}} \frac{\partial^{k+1} y^{*k}}{\partial v^{\beta_1} \dots \partial v^{\beta_{k+1}}}$$

Infolge der Gleichheit der Ableitungsvektoren beider Flächen in P_0 bis zur k-ten Ordnung ergibt sich:

$$(\mathring{x}^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} - \mathring{y}^i_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}) N_i = (\mathring{x}^{*k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} - \mathring{y}^{*k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}) \frac{\partial x^i}{\partial x^{*k}} N_i$$
$$= (\mathring{x}^{*k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} - \mathring{y}^{*k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}) N^*_k,$$

d. h.

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} = B^*_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}.$$

Gegenüber $(k+1)$mal stetig differenzierbaren topologischen Raumtransformationen sind die Berührungsgrößen absolute Invarianten.

§ 4.

Zusammenstellung der Eigenschaften der Berührungsgrößen. Die Berührungstensoren zweier Flächen.

Wenn zwei sich in P_0 berührende Flächen der Klasse C_{k+1} vorliegen, so lassen sich ihnen nach § 2 Berührungsgrößen zuordnen, deren Verschwinden notwendige und hinreichende Kriterien für die Berührung mindestens j-ter $(j \leqq k)$ ergeben.

Haben wir eine Berührung j-ter Ordnung festgestellt, so stimmen nach § 3 beide Flächen in allen Eigenschaften, die sich durch Ableitungsvektoren bis zur j-ten Ordnung ausdrücken lassen, überein. Die im allgemeinen nicht hdentisch verschwindenden Berührungsgrößen $(j+1)$-ter Ordnung $B^\varrho_{\alpha_1 \dots \alpha_{j+1}}$ haben nun nach § 3 folgende Eigenschaften:

1. Sie sind absolute Invarianten gegenüber Raumtransformationen.

2. Sie transformieren sich bei normierten Parametertransformationen wie die Komponenten eines Tensors $(j+1)$-ten Grades. Diese Tensoren wollen wir daher *Berührungstensoren* $\mathfrak{B}^\varrho$ nennen.

Man kann ebenso sinnvoll *Berührungsdifferentialformen $(j+1)$-ten Grades* bilden:

$$B^\varrho = B^\varrho_{\alpha_1 \dots \alpha_{j+1}} du^{\alpha_1} \dots du^{\alpha_{j+1}}.$$

3. Sie sind unabhängig von der Wahl der Hilfsvektoren $\mathfrak{X}^\alpha$.

4. Sie haben Vektorcharakter hinsichtlich der Wahl der Hyperebenenstellung $\mathfrak{N}$, d. h. für

$$\mathfrak{N} = \gamma_\varrho \mathfrak{N}^\varrho \text{ gilt } B_{\alpha_1 \dots \alpha_{j+1}} = \gamma_\varrho B^\varrho_{\alpha_1 \dots \alpha_{j+1}}.$$

5. Ihr Verschwinden bedeutet für die Flächen eine Berührung mindestens $(j+1)$-ter Ordnung.

Wird durch die Angabe der Berührungsordnung zweier Flächen eine Aussage über die *gemeinsamen* Eigenschaften gemacht, so werden durch die Schar der Berührungstensoren $\mathfrak{B} = \gamma_\varrho \mathfrak{B}^\varrho$, falls diese nicht identisch ver-

schwinden, *Verschiedenheiten* in der differentialgeometrischen Struktur beider Flächen aufgezeigt. Im Falle der Kurventheorie wurde in der Arbeit „Über das Berührungsmaß von Kurven“ [1] an speziellen Beispielen gezeigt, wie sich unter Verwendung geeigneter Vergleichskurven aus den Berührungstensoren ein vollständiges Invariantensystem der Kurve herleiten läßt. Im zweiten Teil dieser Arbeit sollen diese Begriffe auf die p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen affinen Raum angewendet werden und der so durchgeführte Aufbau einer affinen Flächentheorie wird die Bedeutung der allgemein eingeführten Berührungstensoren für irgendeine spezielle Differentialgeometrie erkennen lassen.

Literaturverzeichnis.

E. Peschl u. K. H. Weise.
[1] Über das Berührungsmaß von Kurven. Math. Zeitschr. **42** (1936).

R. König u. E. Peschl.
[2] Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. 1. bis 3. Mitteilung. Leipziger Berichte (1934).

R. König u. K. H. Weise.
[3] Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum. 4. Mitteilung. Leipziger Berichte (1935).

(Eingegangen am 8. Juli 1937.)

Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme.

Von

M. Eichler in Halle.

Einleitung.

1. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{A}$ eine normale einfache Algebra über K. Bekanntlich ist jede an den unendlichen Verzweigungsprimstellen von $\mathfrak{A}$ positive Zahl m von K die Norm einer Zahl μ aus $\mathfrak{A}$[1]). Dieser hyperkomplexe Normensatz ist bisher unter Benutzung des Grunwaldschen Existenztheorems bewiesen worden; es gibt indessen noch einen einfacheren Zugang zu ihm, der neben dem zuerst gefundenen von Interesse ist. Ist nämlich der Grad von $\mathfrak{A}$ über K gleich n, so braucht man nur ein irreduzibles Polynom $f(x)$ von n-tem Grade in K zu finden, dessen höchster und niedrigster Koeffizient 1 und $(-1)^n m$ sind, und für das eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ über K einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ erzeugt. $\mathfrak{A}$ enthält dann einen mit diesem isomorphen kommutativen Unterkörper[2]) und insbesondere eine Wurzel μ von $f(x) = 0$; die Norm von μ in bezug auf K ist gleich m. Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit werde ich den Normensatz nach diesem Grundgedanken durchführen.

Damit die Gleichung $f(x) = 0$ über K einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ erzeugt, braucht $f(x)$ nur an den Verzweigungsstellen von $\mathfrak{A}$ gewissen Kongruenzen zu genügen. Es bleibt dabei für weitere Bedingungen, die man nebenher der aufzufindenden Zahl μ, deren Norm gleich m sein soll, bzw. dem Polynom $f(x)$ auferlegen kann, noch ein weiter Spielraum. So verlangte Herr Maaß[1]), daß $\mathsf{K}(\mu)$ eine zyklische Erweiterung von K sein soll, und eine ganz ähnliche Forderung stellten Hasse und Schilling[1]). Diese Nebenbedingungen, die man der Zahl μ auferlegte, machten allerdings einen ganz andersartigen Ansatz für ihre Konstruktion notwendig; daß sie erfüllt werden konnten, spricht jedoch ebenfalls für die vielseitigen Möglichkeiten, Zahlen mit vorgegebenen Eigenschaften in einem hyperkomplexen System zu finden. Bei dem hier geführten Existenznachweis liegt es nahe, $f(x)$ gewissen Kon-

[1]) H. Hasse und O. Schilling, Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra, Journ. reine angew. Math. 174 (1936), S. 248; H. Maaß, Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen, Abh. Math. Sem. Hamburg 12 (1937), S. 64.

[2]) H. Hasse, Theory of cyclic Algebras over an algebraic number field, Transactions Amer. Math. Soc. 34 (1932), S. 171, Satz 11, 2.

gruenzen genügen zu lassen, um aus ihnen eingehendere Aussagen über μ zu gewinnen. Dieser Gedanke führte mich vor einiger Zeit zu dem folgenden Satz[3]), für den hier ein neuer und durchsichtigerer Beweis geliefert werden soll.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine normale einfache Algebra vom Grad* n *über einem algebraischen Zahlkörper* K *und* $\mathfrak{u}$ *das Produkt der unendlichen Verzweigungsprimstellen von* A. *Ferner sei entweder* $n > 2$ *oder* $\mathfrak{u}$ *enthalte nicht alle unendlichen Primstellen von* K. *Ein Ideal aus einer solchen Algebra* $\mathfrak{A}$ *ist dann und nur dann ein Hauptideal, wenn seine Norm in bezug auf* K *zum Strahl mod* $\mathfrak{u}$ *gehört.*

Der neue Beweis dieses Satzes unterscheidet sich von dem zuerst gegebenen dadurch, daß er keinerlei Hilfsmittel aus der analytischen Zahlentheorie heranzieht. Auch sonst wird an tiefliegenden Voraussetzungen nur der Hauptsatz der Algebrentheorie gebraucht, und zwar zur Kennzeichnung der Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$. Unter geringer Modifikation der einzelnen Schlüsse läßt sich der Satz 1 jetzt auch auf den Fall übertragen, wo K der Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen (oder eine endliche Erweiterung davon) über einem endlichen Konstantenkörper ist. Der Satz 1 gilt in diesem Falle für alle normalen einfachen Algebren $\mathfrak{A}$ über K, welche an der unendlichen Primstelle unverzweigt sind (was durch geeignete Auszeichnung der unendlichen Primstelle stets erreicht werden kann). Und zwar in der Form: ein Ideal aus $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann Hauptideal, wenn seine Norm in bezug auf K ein solches ist. Für Divisoren ist der Satz nicht richtig. Auch die Sätze 2 und 3 übertragen sich in entsprechender Weise.

Daß die Norm eines Hauptideals von $\mathfrak{A}$ in K zum Strahl mod $\mathfrak{u}$ gehört, braucht nicht von neuem bewiesen zu werden. Die Umkehrung dieser Aussage enthält die eigentliche Schwierigkeit des Satzes; sie wird im zweiten Abschnitt unter Benutzung des Normensatzes auf den Hilfssatz zurückgeführt, daß zwei Ideale gleicher Norm und Linksordnung linksäquivalent sind (Hilfssatz 4). Dieser wird aus einem anderen (Hilfssatz 6) hergeleitet, dessen Beweis schließlich den dritten Abschnitt anfüllt.

Zur Orientierung scheint hier eine kurze Skizze des weiteren Beweisganges angebracht zu sein. Wir beschränken uns dabei auf den Spezialfall, wo zwei ganze unzerlegbare Ideale $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ der Linksordnung $\mathfrak{J}$ und der gemeinsamen Primidealnorm $\mathfrak{p}$ als linksäquivalent nachzuweisen sind. Für diesen Fall sagen die Hilfssätze 4 und 6 das gleiche aus. Bezeichnen $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{J}$, so enthält $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ eine Einheit $\varepsilon_\mathfrak{p}$, für welche

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{Q}_\mathfrak{p}\, \varepsilon_\mathfrak{p}$$

[3]) M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. reine angew. Math. **176** (1937), S. 192.

gilt. Wird die Einheit ε_p so bestimmt, daß ihre Hauptgleichung $f_p(x) = 0$ eine zu p teilerfremde Diskriminante hat, und ist ε'_p eine beliebige Wurzel der Kongruenz

$$f_p(\varepsilon'_p) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

aus $\mathfrak{J}_p$, so enthält $\mathfrak{J}$ eine p-adische Einheit τ, daß

$$\tau^{-1} \varepsilon'_p \tau \equiv \varepsilon_p \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{J}_p}$$

und folglich

$$\mathfrak{P}_p = \mathfrak{Q}_p \tau^{-1} \varepsilon'_p \tau$$

gilt. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ mögen alle Restklassen von $\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{J}_p$ nach dem Modul $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{p}\mathfrak{J}_p$ repräsentieren, für welche

$$f_p(\varepsilon_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

gilt. Ihnen entsprechend enthält $\mathfrak{J}$ gleichviele p-adische Einheiten $\tau_1, \ldots, \tau_t$, daß

$$\tau_i^{-1} \varepsilon_i \tau_i \equiv \varepsilon_p \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{J}_p} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

ist.

Es gelingt jetzt ein Polynom $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften anzugeben:

1. $f(x) \equiv f_p(x) \pmod{\mathfrak{p}}$,
2. eine Einheit ε aus $\mathfrak{J}$ ist Wurzel von $f(x) = 0$, und die Einheiten $\tau_i^{-1} \varepsilon \tau_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ sind ebenfalls in $\mathfrak{J}$ enthalten.

Dabei wird auch die zweite Eigenschaft von $f(x)$ aus gewissen Kongruenzen hergeleitet, denen dies Polynom in K genügen soll. Nun wird auf Grund der ersten Eigenschaft von $f(x)$ für ein i

$$\tau_i^{-1} \varepsilon \tau_i \equiv \varepsilon_p \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{J}_p},$$

also

$$\mathfrak{P}_p = \mathfrak{Q}_p \tau_i^{-1} \varepsilon \tau_i$$

und, weil $\tau_i^{-1} \varepsilon \tau_i$ in $\mathfrak{J}$ enthalten ist,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \tau_i^{-1} \varepsilon \tau_i,$$

damit sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wirklich als linksäquivalent nachgewiesen.

2. Eine einfache Konsequenz des Satzes 1 ist der

Satz 2. *Unter der Voraussetzung des Satzes* 1 *über* $\mathfrak{A}$ *bilden die Idealklassen von* $\mathfrak{A}$ *ein endliches Gruppoid; dessen Rang bzw. Ordnung sind gleich der Anzahl der Typen von Maximalordnungen bzw. gleich der Anzahl der Klassen, auf die sich die gleichseitigen Ideale einer festen Maximalordnung verteilen.*

Das Produkt $K_1 K_2$ zweier Klassen K_1 und K_2 sei immer dann erklärt, wenn K_1 und K_2 je ein Ideal $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ so enthalten, daß das Produkt $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ existiert; $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ ist dann ein Repräsentant der Produktklasse $K_1 K_2$. Diese ist jetzt eindeutig erklärt; denn ist

$$\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}'_1 = \mu_1 \mathfrak{M}_1 \mu'_1, \quad \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}'_2 = \mu_2 \mathfrak{M}_2 \mu'_2,$$

und existiert auch das Produkt

$$\mathfrak{M}_1' \mathfrak{M}_2' = \mu_1 \mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{M}_2 \mu_2',$$

so folgt aus einem bekannten Satze über die Existenz eines Idealproduktes, daß die Linksordnung von $\mathfrak{M}_2$ und die Rechtsordnungen von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2$ übereinstimmen. Deshalb existiert das Idealprodukt $\mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{M}_1^{-1}$ und hat die Norm

$$n \mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{M}_1^{-1} = (n(\mu_1' \mu_2)).$$

$\mu_1 \mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{M}_1^{-1}$ hat die gleiche Norm wie das Hauptideal $\mu_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{I}$, wobei $\mathfrak{I}$ die Linksordnung von $\mathfrak{M}_1$ bedeuten möge, es ist nach Satz 1 also ein Hauptideal. Folglich gilt in der Tat.

$$\mathfrak{M}_1' \mathfrak{M}_2' = \mu_1 \mathfrak{M}_1 \mu_1' \mu_2 \mathfrak{M}_1^{-1} \cdot \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mu_2' \sim \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2.$$

Die Gültigkeit der übrigen Gruppoidpostulate für die Multiplikation der Klassen folgt nun ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Ideale ein Gruppoid bilden. Wegen der Endlichkeit der Klassenzahl ist das Idealklassengruppoid natürlich endlich. Die letzte Aussage des Satzes 2 sieht man unmittelbar ein.

Der Normensatz.

3. Im folgenden werden drei Hilfssätze gebraucht, die beiden ersten habe ich bereits an anderer Stelle bewiesen[4]).

Hilfssatz 1. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* K *und* $f_\mathfrak{p}(x)$ *ein irreduzibles Polynom in der* $\mathfrak{p}$*-adischen Erweiterung* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ *von* K. *Dann existiert ein solcher Exponent* $h_\mathfrak{p}$, *daß jedes Polynom* $f(x)$ *aus* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, *das der Kongruenz*

$$f(x) \equiv f_\mathfrak{p}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{h_\mathfrak{p}}}$$

genügt, ebenfalls in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ *irreduzibel ist.*

Hilfssatz 2. *Es sei* e *eine Zahl aus* K *und* A *eine rationale;* $e^{(1)}, \ldots, e^{(r)}$ *seien zu* e *konjugierte Zahlen, die in reellen zu* K *konjugierten Körpern liegen mögen, ihre Anzahl* r *sei kleiner als der absolute Körpergrad von* K. *Dann enthält* K *eine ganze Zahl* z, *so daß die Beträge der Differenzen*

$$e^{(i)} - Az^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

unter beliebig vorgegebenen Schranken liegen.

Hilfssatz 3. *Ist* $\mathfrak{p}$ *wieder ein Primideal und* m *eine ganze und zu* $\mathfrak{p}$ *teilerfremde Zahl aus* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, *so gibt es für jede natürliche Zahl* n *ein irreduzibles Polynom* $f_\mathfrak{p}(x)$ *n-ten Grades mit ganzen Koeffizienten aus* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, *von denen der oberste* 1 *und der unterste* $(-1)^n m$ *ist.*

---

[4]) a. a. O. [3]), Hilfssätze 1 und 7.

Beweis. $N\mathfrak{p}$ bezeichne die Norm von $\mathfrak{p}$ in bezug auf den rationalen Zahlkörper, dann erzeugt bekanntlich eine primitive $(N\mathfrak{p}^n - 1)$-te Einheitswurzel ζ über $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ eine unverzweigte zyklische Erweiterung $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ vom Relativgrad n. Da m und $\mathfrak{p}$ relativ prim sind, ist m die Norm einer Zahl μ aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ in bezug auf $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$[5]). Wenn jetzt $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\mu) = \mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ ist, so genügt μ in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ einer irreduziblen Gleichung $f_\mathfrak{p}(x) = 0$ n-ten Grades mit dem obersten Koeffizienten 1 und dem untersten Koeffizienten $(-1)^n m$. μ ist eine ganze Zahl, da ihre Norm ganz ist[6]), daher müssen auch die übrigen Koeffizienten von $f_\mathfrak{p}(x)$ ganz sein.

Wenn dagegen $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\mu) \neq \mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ ist, suchen wir eine solche Einheit ε aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ mit der Relativnorm 1, daß $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon\mu) = \mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ wird; man hat dann nur μ durch $\varepsilon\mu$ zu ersetzen, um den Beweis zu Ende zu führen. Um ein geeignetes ε zu finden, betrachten wir zunächst eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und eine erzeugende Substitution S der Galoisgruppe von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ in bezug auf $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Sind $x_1, \ldots, x_n$ Veränderliche und $g(S)$ ein Polynom in S mit ganzen rationalen Koeffizienten, so gilt für die allgemeine Zahl

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ eine Gleichung

$$\xi^{g(S)} = 1$$

nur dann, wenn $g(S)$ identisch verschwindet. Daher kann man den x_i in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ solche Werte erteilen, daß

$$\xi^{a(1-S)(1-S^i)} \neq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

gilt, wobei a eine ganze und rationale Zahl bedeutet, über die weiter unten verfügt werden wird.

$$\varepsilon = \xi^{1-S}$$

ist dann eine Einheit von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ mit der Relativnorm 1. Die Zahlen $\varepsilon^i\mu$ $(i = 1, 2, \ldots)$ verteilen sich auf die Zwischenkörper, die zwischen $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ und $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ inklusive enthalten sind; es möge deren gerade n' verschiedene geben. Dann ist

$$\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon^{n'+1}\mu) = \mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon^r\mu)$$

mit $r \leqq n'$ (Schubfachschluß!). Setzt man jetzt $a = n'!$, so muß

$$\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon^r\mu) = \mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$$

sein, und der Hilfssatz wird bewiesen, indem μ durch $\varepsilon^r\mu$ ersetzt wird. Andernfalls nämlich würde $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon^r\mu)$ und insbesondere die in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\varepsilon^r\mu)$ enthaltene

---

[5]) Vgl. dazu H. Hasse, Über $\mathfrak{P}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Annalen **104** (1931), S. 495; oder M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. IV, 1; Berlin 1935. S. 109.

[6]) H. Hasse, a. a. O. [5]), Satz 7.

Zahl $\varepsilon^{n'+1-r} = \frac{\varepsilon^{n'+1}\mu}{\varepsilon^r \mu}$ bei einer Substitution S^t $(t < n)$ der Galoisgruppe von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\zeta)$ fest bleiben. Dann folgt aber

$$\left(\varepsilon^{(n'+1-r)(1-S^t)}\right)^{\frac{n'!}{n'+1-r}} = \xi^{n'!(1-S)(1-S^t)} = 1,$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung über ξ.

4. Nach diesen Vorbereitungen kann der Normensatz bewiesen werden.

Satz 3. *Bezeichnet* $\mathfrak{u}$ *das Produkt der unendlichen Verzweigungsprimstellen von* $\mathfrak{A}$, *so ist jede Zahl* m *aus* K, *die der Kongruenz*

$$m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$$

genügt, die Norm einer Zahl μ *aus* $\mathfrak{A}$.

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei irgend ein Ideal aus $\mathfrak{A}$ der Norm (m), es ist bekanntlich einem Ideal $\mathfrak{M}'$ linksseitig (oder rechtsseitig) äquivalent, dessen Norm zu der Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{A}$ prim ist:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\nu, \quad n\,\mathfrak{M}' = (m'), \quad m' = m\,n(\nu).$$

Es braucht jetzt nur eine Zahl μ' mit der Norm m' in $\mathfrak{A}$ nachgewiesen zu werden, dann ist $n(\mu'\nu^{-1}) = m$, und auch m ist die Norm einer Zahl aus $\mathfrak{A}$.

Um eine Zahl μ' zu finden, deren Norm m' ist, werde für jede endliche Verzweigungsprimstelle $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{A}$ (mit anderen Worten für jeden Primteiler $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{d}$) ein Polynom $f_\mathfrak{q}(x)$ mit den in Hilfssatz 3 genannten Eigenschaften konstruiert, der unterste Koeffizient von $f_\mathfrak{q}(x)$ sei $(-1)^n m'$. Darauf bestimme man ein Polynom $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten in K, deren oberster 1 und deren unterster $(-1)^n m'$ ist, welches der Kongruenz

$$f(x) \equiv f_\mathfrak{q}(x) \pmod{\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}} \text{ für alle } \mathfrak{q}$$

genügt; die $h_\mathfrak{q}$ seien dabei solche nach Hilfssatz 1 existierenden Exponenten, daß $f(x)$ in den Körpern $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ irreduzibel ist.

Ist jetzt φ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $\mathsf{K}_\mathfrak{q}(\varphi)$ für alle endlichen Verzweigungsstellen $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$. $\mathsf{K}(\varphi)$ zerfällt daher die Algebra $\mathfrak{A}$, wenn sie überall im Unendlichen unverzweigt ist. Nach einem bekannten Satze[2]) enthält dann $\mathfrak{A}$ einen zu $\mathsf{K}(\varphi)$ isomorphen kommutativen Unterkörper und insbesondere eine Wurzel μ' der Gleichung $f(x) = 0$. Die Norm von μ' ist gleich m', und der Normensatz ist bewiesen.

Wenn aber $\mathfrak{A}$ noch unendliche Verzweigungsprimstellen $\mathfrak{q}_\infty$ hat, kann der Grad n von $\mathfrak{A}$ nur gerade sein. Zunächst werde $n > 2$ angenommen. Die Zahl m ist voraussetzungsgemäß und demzufolge auch m' an den Stellen $\mathfrak{q}_\infty$ positiv. Da n gerade ist, ist hier $f(x)$ für große positive und negative x sowie für $x = 0$ positiv. Nun kann man eine ganze rationale durch alle $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ teilbare Zahl A angeben, so daß $f(x) + Ax^2$ für alle x an sämtlichen unendlichen Verzweigungsstellen von $\mathfrak{A}$ positiv ist. Daher ist

$$f(x) + Ax^2 = 0$$

in allen K_{q_∞} unlösbar, und jetzt erzeugt eine Wurzel dieser Gleichung einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$. Man braucht also nur $f(x)$ durch $f(x) + Ax^2$ zu ersetzen, um den Beweis zu Ende zu führen.

Hierauf betrachten wir den Fall $n = 2$ und nehmen zunächst einmal an, daß $\mathfrak{A}$ nicht an allen unendlichen Primstellen von K verzweigt ist. Es sei $f(x) = x^2 + ex + m'$ und A wiederum eine ganze rationale durch alle $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ teilbare Zahl. Da $\mathfrak{A}$ stets höchstens an reellen unendlichen Primstellen verzweigt ist, kann man nach Hilfssatz 2 eine ganze Zahl z in K so bestimmen, daß

$$(e - Az)^2 - 4m' \equiv -1 \pmod{\mathfrak{u}}$$

gilt. Jetzt erzeugt eine Wurzel von

$$x^2 + (e - Az)x + m' = 0$$

einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$; eine Wurzel μ' dieser Gleichung ist in $\mathfrak{A}$ enthalten und hat die Norm m'.

Ist schließlich $n = 2$ und über die unendlichen Verzweigungsprimstellen von $\mathfrak{A}$ nichts bekannt, ist ferner wieder $f(x) = x^2 + ex + m'$, so gibt es eine ganze rationale durch alle $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ teilbare und so große Zahl A, daß

$$\left(\frac{e}{A+1}\right)^2 - 4m'$$

total negativ ist. Dann erzeugt eine Wurzel von

$$x^2 + \frac{e}{A+1}x + m' = 0$$

einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.

Korollar zu Satz 3. *Unter den in Satz* 1 *genannten Voraussetzungen über* $\mathfrak{A}$ *ist eine ganze und zur Diskriminante* $\mathfrak{d}$ *von* $\mathfrak{A}$ *prime Zahl* m, *für welche*

$$m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$$

gilt, sogar die Norm einer ganzen Zahl μ *aus* $\mathfrak{A}$.

Diese Tatsache geht aus dem Beweis des Satzes 3 unmittelbar hervor; sie wird weiter unten zum Beweis des Satzes 1 benutzt werden. Die Voraussetzung, daß m und $\mathfrak{d}$ relativ prim sein sollen, ist entbehrlich, was ich hier indessen nicht beweisen will. Nicht entbehrlich hingegen ist die Voraussetzung über $\mathfrak{A}$.

Äquivalenz von Idealen mit gleicher Norm und Linksordnung.

5. Den Satz 1 führen wir in diesem Abschnitt auf die folgende Aussage zurück:

Hilfssatz 4. *Unter der Voraussetzung des Satzes* 1 *sind zwei Ideale gleicher Norm und Linksordnung linksäquivalent.*

Dies folgt aus Satz 1 in zwei Zeilen. Sind nämlich $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei Ideale gleicher Norm und Linksordnung, so ist $\mathfrak{N}^{-1}\mathfrak{M}$ ein Ideal der Norm (1), also

nach Satz 1 ein Hauptideal; $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sind demnach in der Tat linksäquivalent. Um aber umgekehrt den Satz 1 zu beweisen, braucht man den Hilfssatz 4 nur in einer schwächeren Fassung:

Hilfssatz 5. *Unter der Voraussetzung des Satzes* 1 *sind zwei ganze Ideale gleicher Norm und Linksordnung linksäquivalent, wenn ihre Norm zu einem gewissen Ideal* $\mathfrak{n}$ *aus* K *teilerfremd ist. Das Ideal* $\mathfrak{n}$ *soll dabei das Produkt der Diskriminante* $\mathfrak{d}$ *von* $\mathfrak{A}$, *von* $n!$ *und allen den Primidealen aus* K *sein, deren Normen in bezug auf den rationalen Zahlkörper kleiner als* $n+2$ *sind.* Es gibt natürlich nur endlich viele solche Primideale.

Es sei $\mathfrak{M}$ ein Ideal aus $\mathfrak{A}$, dessen Norm in bezug auf K zum Strahl mod $\mathfrak{u}$ gehört. Soll es als Hauptideal nachgewiesen werden, so darf es durch ein beliebiges linksäquivalentes (oder rechtsäquivalentes) ersetzt werden, die Norm eines solchen gehört wieder zum Strahl mod $\mathfrak{u}$. Jedes Ideal ist bekanntlich einem ganzen Ideal linksäquivalent, dessen Norm zu einem beliebig vorgegebenen Ideal des Grundkörpers teilerfremd ist. Es beschränkt somit nicht die Allgemeinheit, wenn $\mathfrak{M}$ von vornherein als ganz und seine Norm zu $\mathfrak{n}$ prim angenommen wird.

Die Norm von $\mathfrak{M}$ sei das Hauptideal (m):

$$n\,\mathfrak{M} = (m), \quad m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}.$$

Da m zu $\mathfrak{n}$, also insbesondere zu $\mathfrak{d}$ prim ist, enthält $\mathfrak{A}$ nach dem Korollar zu Satz 3 eine ganze Zahl μ der Norm m. Nun sei $\mathfrak{I}$ die Linksordnung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{I}'$ eine μ enthaltende Maximalordnung. Das Distanzideal $(\mathfrak{I}' \times \mathfrak{I})^{-1}$ ist einem ganzen Ideal $\mathfrak{R}$ linksseitig äquivalent, dessen Norm zu $\mathfrak{n}$ prim ist:

$$(\mathfrak{I}' \times \mathfrak{I})^{-1}\,\varrho = \mathfrak{R}.$$

$\varrho^{-1}\,\mu\,\varrho$ ist jetzt in der Rechtsordnung von $\mathfrak{R}$ enthalten, und bezeichnet R eine ganze zu $\mathfrak{n}$ prime und durch $n\,\mathfrak{R}$ teilbare Zahl aus K, so liegt $R\,\varrho^{-1}\,\mu\,\varrho$ in $\mathfrak{R}$, also auch in $\mathfrak{I}$. Die Ideale $\mathfrak{M}R$ und $\mathfrak{I}R\,\varrho^{-1}\mu\,\varrho$ sind dann Ideale gleicher Linksordnung und Norm; sie sind ganz, und ihre Norm ist zu $\mathfrak{n}$ teilerfremd. Nach Hilfssatz 5 sind sie linksäquivalent; dann ist $\mathfrak{M}$ ein Hauptideal, und der Satz 1 ist bewiesen.

Es bleibt also nur noch der Beweis des Hilfssatzes 5 übrig. Der ergibt sich leicht aus dem

Hilfssatz 6. *Es mögen die Voraussetzungen des Satzes* 1 *gelten, und* $\mathfrak{n}$ *sei das im vorigen Hilfssatz genannte Ideal.* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{P}$ *seien zwei ganze Ideale der Linksordnung* $\mathfrak{I}$, *deren Normen zu* $\mathfrak{n}$ *teilerfremd sind. Ferner sei* $\mathfrak{P}$ *unzerlegbar und* $n\,\mathfrak{P}$ *ein Teiler von* $n\,\mathfrak{M}$. *Dann enthält* $\mathfrak{I}$ *eine solche Einheit* ε, *daß* $\mathfrak{P}$ *ein Linksteiler von* $\mathfrak{M}\varepsilon$ *ist.*

Ist in diesem Hilfssatz auch $\mathfrak{M}$ ein unzerlegbares Ideal, so folgt aus den gemachten Voraussetzungen $n\,\mathfrak{P} = n\,\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}\varepsilon$; $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ sind dann linksäquivalent. Der Hilfssatz 5 ist demnach richtig, wenn zwei Ideale $\mathfrak{M}$ und

$\mathfrak{N}$ von gleicher Norm, deren Äquivalenz behauptet wird, nur aus je einem unzerlegbaren Faktor bestehen. Jetzt mögen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Produkte von je a unzerlegbaren Idealen sein, und der Hilfssatz 5 gelte bereits für Produkte von $a-1$ solchen Faktoren. $\mathfrak{P}$ sei ein unzerlegbarer Linksteiler von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{J}$ die Linksordnung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. Dann enthält $\mathfrak{J}$ nach Hilfssatz 6 eine derartige Einheit ε, daß $\mathfrak{P}$ das Ideal $\mathfrak{M}\varepsilon$ von links teilt. Nun erfüllen auch $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{M}\varepsilon$ und $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{N}$ die Bedingungen des Hilfssatzes 5, es sind aber ganze Ideale, welche aus $a-1$ unzerlegbaren Faktoren zusammengesetzt sind. Daher sind sie auf Grund der Induktionsannahme linksäquivalent, was nun auch sofort für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ selber folgt. Damit ist der Hilfssatz 5 auf den Hilfssatz 6 zurückgeführt worden, und wir haben nur noch letzteren zu beweisen.

Nachweis der Existenz gewisser Einheiten.

6. Dieser ganze Abschnitt ist dem Beweis des Hilfssatzes 6 gewidmet. Wir setzen $n\,\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ und suchen zunächst eine Einheit $\varepsilon_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\varepsilon_\mathfrak{p}$ hat $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ als Linksteiler,

2. $n(\varepsilon_\mathfrak{p}) = 1$,

3. die Hauptgleichung von $\varepsilon_\mathfrak{p}$ hat eine zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde Diskriminante.

Es sei p eine genau einmal durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p} = (p)$ ist. Da $\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{n}$, also insbesondere die Diskriminante von $\mathfrak{A}$ nicht teilt, läßt sich $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ als die Ordnung aller ganzzahligen n-reihigen Matrizen über $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ darstellen. $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ enthält dann eine Einheit η [7]), daß

$$\eta^{-1}\mathfrak{P}_\mathfrak{p}\,\eta = \mathfrak{P}_\mathfrak{p}\,\eta = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & p \end{pmatrix}$$

ist. Da man durch Transformation mit η zu einer äquivalenten Darstellung von $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ hätte übergehen können, darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & p \end{pmatrix}$$

annehmen. Ferner sei

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\,\mu,$$

[7]) H. Hasse, a. a. O. [5]), S. 524.

dabei kann man die Matrix μ durch elementare Zeilenumformungen, was mit linksseitiger Multiplikation mit einer Einheit aus $\mathfrak{I}_\mathfrak{p}$ gleichkommt, auf die Form

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1n} \\ & m_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{2n} \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & m_{nn} \end{pmatrix}$$

bringen, wo unter der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Ist m_{rr} $(1 \leqq r \leqq n)$ die erste Zahl in der Hauptdiagonalen, welche keine Einheit ist, so kann man durch weitere elementare Zeilenumformungen (und durch Multiplikation der Zeilen mit Einheiten) erreichen, daß

$$m_{11} = \ldots = m_{r-1\,r-1} = 1, \quad m_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \text{ und } i, k < r$$

ist. Dann ist also

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{I}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 1 & & & m_{1r} & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \vdots & & \\ & & 1 & m_{r-1\,r} & \cdot & \cdot \\ & & & m_{rr} & \cdot & \cdot \\ & & & & & \\ & & & & & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nun setze man (in der Hauptdiagonalen steht $y_1, \ldots, y_{r-1}$ und von der r-ten Stelle ab Null; die $(r+1)$-te bis n-te Zeile enthält je eine Eins, und zwar jeweils eine Stelle unterhalb der Hauptdiagonalen. Die letzte Spalte ist $-m_{1r}, -m_{2r}, \ldots, -m_{r-1\,r}, 1, 0, \ldots$ Sonst enthält die Matrix nur Nullen):

$$\varepsilon_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -m_{1r} \\ 0 & y_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -m_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & y_{r-1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -m_{r-1\,r} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei über $y_1, \ldots, y_{r-1}$ noch zu verfügen ist. Da m_{rr} voraussetzungsgemäß durch p teilbar ist, sind jetzt alle Zahlen in der letzten Spalte sämtlicher Matrizen des Ideals $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\, \varepsilon_\mathfrak{p}$ durch p teilbar, also $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\, \varepsilon_\mathfrak{p}$ hat $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ als Linksteiler. Die Hauptgleichung von $\varepsilon_\mathfrak{p}$, welche gleich der charakteristischen Gleichung obiger Matrix $\varepsilon_\mathfrak{p}$ ist, ergibt sich nach leichter Rechnung als

$$f_\mathfrak{p}(x) = (x - y_1) \ldots (x - y_{r-1})\, (x^{n-r+1} - 1).$$

Bezeichnet jetzt $N\mathfrak{p}$ die Norm von $\mathfrak{p}$ in bezug auf den rationalen Zahlkörper, so gibt es in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ gerade $N\mathfrak{p}-1$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde Restklassen mod $\mathfrak{p}$. Da alle Primideale, für welche $N\mathfrak{p} < n+2$ ist, in n aufgehen sollen und $\mathfrak{p}$ zu n teilerfremd ist, ist jetzt $N\mathfrak{p}-1 \geqq n+1$. Folglich kann man die Zahlen $y_1, \ldots, y_{r-1}$ als Einheiten in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ so wählen, daß erstens

$$n(\varepsilon_\mathfrak{p}) = (-1)^n f_\mathfrak{p}(0) = (-1)^{n+r} y_1 \ldots y_{r-1} = 1$$

ist, und daß sie zweitens einander und den Wurzeln der Kongruenz

$$x^{n-r+1} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

mod $\mathfrak{p}$ inkongruent sind. Die Diskriminante des Polynoms $x^{n-r+1}-1$ enthält nur Teiler, die in $n-r+1$ aufgehen. Da schließlich $\mathfrak{p}$ auch zu $n!$ prim angenommen werden sollte, so teilt $\mathfrak{p}$ die Diskriminante von $f_\mathfrak{p}(x)$ nicht. $\varepsilon_\mathfrak{p}$ genügt also den oben gestellten Bedingungen.

7. Aus 6 entnimmt man, daß der Hilfssatz 6 jedenfalls an der Stelle $\mathfrak{p}$ gilt. Zu dem Schluß vom Kleinen aufs Große bedarf es jedoch noch einer weiteren Vorbereitung.

Hilfssatz 7. *Haben* $\mathfrak{p}$, $\varepsilon_\mathfrak{p}$ *und* $f_\mathfrak{p}(x)$ *die in* 6 *erklärte Bedeutung, und ist* $\varepsilon'_\mathfrak{p}$ *eine Einheit aus* $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ *mit*

$$f_\mathfrak{p}(\varepsilon'_\mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

so enthält $\mathfrak{J}$ *eine* $\mathfrak{p}$*-adische Einheit* τ*, daß*

$$\tau^{-1}\varepsilon'_\mathfrak{p}\tau \equiv \varepsilon_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$$

ist.

Beweis. Der Körper der Restklassen der ganzen Zahlen aus K bzw. $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ nach dem Modul $\mathfrak{p}$ werde mit P bezeichnet; er enthält $N\mathfrak{p}$ Elemente. Die Restklassen von $\mathfrak{J}$ bzw. von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ modulo $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ werden durch die n-reihigen Matrizen über P dargestellt. Bezeichnet man die Restklassen von $\varepsilon_\mathfrak{p}$ und $\varepsilon'_\mathfrak{p}$ wieder mit den gleichen Buchstaben $\varepsilon_\mathfrak{p}$ und $\varepsilon'_\mathfrak{p}$, so gilt es in P eine nicht singuläre Matrix τ zu finden, für welche

$$\tau^{-1}\varepsilon'_\mathfrak{p}\tau = \varepsilon_\mathfrak{p}$$

ist.

Dazu betrachten wir den Erweiterungskörper P' von P, welcher alle Wurzeln $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ der Gleichung

$$f_\mathfrak{p}(x) = 0$$

enthält. Da die Diskriminante von $f_\mathfrak{p}(x)$ in P voraussetzungsgemäß von Null verschieden ist, sind nicht zwei der ϱ_i einander gleich, daher kann man $\varepsilon_\mathfrak{p}$ und $\varepsilon'_\mathfrak{p}$ in P' auf Diagonalform transformieren:

$$\tau_1^{-1}\varepsilon_\mathfrak{p}\tau_1 = \begin{pmatrix} \varrho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho_n \end{pmatrix}, \quad \tau_2^{-1}\varepsilon'_\mathfrak{p}\tau_2 = \begin{pmatrix} \varrho'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varrho'_n \end{pmatrix},$$

wobei die ϱ_i' mit den ϱ_i bis auf die Reihenfolge übereinstimmen. Die beiden Diagonalmatrizen lassen sich aber durch eine der folgenden (an den nicht ausgefüllten Stellen der Matrizen stehen Nullen):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

ineinander transformieren. Folglich sind ε_p und ε_p' wenigstens in P' äquivalent:

$$\tau'^{-1}\,\varepsilon_p'\,\tau' = \varepsilon_p.$$

Um eine Matrix τ zu finden, die das gleiche wie τ' leistet und überdies Koeffizienten aus P hat, schreiben wir

$$\tau' = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i b_i,$$

wobei die σ_i Matrizen über P sind und die b_i eine Basis von P' in bezug auf P bilden. Jetzt ist

$$\sigma_i\,\varepsilon_p = \varepsilon_p'\,\sigma_i; \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

wenn man daher Zahlen $x_1, \ldots, x_r$ in P so finden kann, daß

$$\tau = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i x_i$$

eine nicht singuläre Matrix ist, so folgt

$$\tau^{-1}\,\varepsilon_p'\,\tau = \varepsilon_p,$$

und der Hilfssatz 7 ist bewiesen[8]).

Nun ist die Determinante von $\Sigma\,\sigma_i\,x_i$ eine homogene ganze rationale Funktion in den x_i, welche deshalb nicht identisch verschwindet, weil sie für $x_i = b_i$ von Null verschieden ausfällt. Man hat daher nur noch die folgende Aussage zu beweisen.

Verschwindet eine ganze rationale und homogene Funktion n-ten oder kleineren Grades von r Veränderlichen $f((x)) = f(x_1, \ldots, x_r)$ in P nicht identisch, so kann man den Veränderlichen solche Werte in P erteilen, daß $f((x)) \neq 0$ ist.

Für $r = 1$ stimmt die Behauptung, sie sei auch schon für die Variablenzahl $r - 1$ bewiesen. Entwickelt man die Funktion jetzt nach der letzten Variablen:

$$f((x)) = a_0 + a_1 x_r + \ldots + a_{n_r} x_r^{n_r},$$

[8]) Diese Schlußweise geht auf Herrn Artin zurück.

wobei die a_i homogene Funktionen in den $x_1, \ldots, x_{r-1}$ und $x_r^{n_r}$ die größte in $f((x))$ vorkommende Potenz von x_r sind, so ist $n_r > 0$, da sonst $f((x))$ nur von $r-1$ Veränderlichen abhängen würde. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung kann man den $x_1, \ldots, x_{r-1}$ in P solche Werte erteilen, daß $a_{n_r} \neq 0$ ist. Nun hat die Gleichung

$$a_0 + a_1 x_r + \ldots + a_{n_r} x_r^{n_r} = 0$$

in P höchstens n_r Wurzeln. Da $n_r \leqq n$ ist und P mehr als n Elemente enthalten soll (nämlich $N\mathfrak{p} \geqq n+2$ Elemente), kann man auch x_r in P so festlegen, daß

$$f((x)) = a_0 + a_1 x_r + \ldots + a_{n_r} x_r^{n_r} \neq 0$$

ist.

8. Jetzt kann der Hilfssatz 6 endlich bewiesen werden. $\mathfrak{p}$, $\varepsilon_\mathfrak{p}$ und $f_\mathfrak{p}(x)$ mögen dazu die oben erklärte Bedeutung behalten. Ferner sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ ein Repräsentantensystem aller der Restklassen von $\mathfrak{J}$ mod $\mathfrak{p}\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ mod $\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, für welche

$$f_\mathfrak{p}(\varepsilon_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

gilt. $\tau_1, \ldots, \tau_t$ mögen solche nach Hilfssatz 7 existierenden $\mathfrak{p}$-adischen Einheiten aus $\mathfrak{J}$ sein, daß

$$\tau_i^{-1} \varepsilon_i \tau_i \equiv \varepsilon_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}\,\mathfrak{J}_\mathfrak{p}} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

ist. Es beschränkt nicht die Allgemeinheit, wenn ihre Normen zu $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$ prim angenommen werden. Wir setzen dann

$$n(\tau_1) \ldots n(\tau_t) = T.$$

Hiernach betrachten wir ein Repräsentantensystem $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_h$ aller Typen von Maximalordnungen; es beschränkt wieder die Allgemeinheit nicht, wenn die Normen der Distanzen $(\mathfrak{J}_i \times \mathfrak{J})^{-1}$ zu $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$ teilerfremd vorausgesetzt werden, da bekanntlich jedes Ideal einem ganzen anderen Ideal linksäquivalent ist, dessen Norm zu einem vorgelegten Ideal des Grundkörpers prim ist. Es gibt dann eine ganze zu $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$ teilerfremde Zahl R in K, die durch die Normen aller Distanzen $(\mathfrak{J}_i \times \mathfrak{J})^{-1}$ teilbar ist; für sie gilt

$$\mathfrak{J} \supset R\mathfrak{J}_i. \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

Nun sei $f_\mathfrak{q}(x)$ für jede endliche Verzweigungsprimstelle $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{A}$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$, deren oberster 1 und deren unterster $(-1)^n$ ist (Hilfssatz 3), und $h_\mathfrak{q}$ seien die in Hilfssatz 1 genannten Exponenten. Da die $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ und RT voraussetzungsgemäß teilerfremd sind, gibt es ein Polynom $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K, von denen der oberste 1 und der unterste $(-1)^n$ ist, welches den Kongruenzen

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f_\mathfrak{q}(x) \pmod{\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}} \text{ für alle } \mathfrak{q}, \\ f(x) &\equiv f_\mathfrak{p}(x) \pmod{\mathfrak{p}}, \\ f(x) &\equiv (x-1)^n \pmod{R^n T^n} \end{aligned}$$

genügt. Wegen der ersten Kongruenz erzeugt eine Wurzel von $f(x) = 0$ über allen $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}_\mathfrak{q}$; genau wie bei dem Beweis des Normensatzes in 4 läßt sich daneben noch erreichen, daß dies auch an den unendlichen Verzweigungsstellen von $\mathfrak{A}$ der Fall ist. Hier wird wie in 4 die genannte Voraussetzung über $\mathfrak{A}$ gebraucht.

Dann erzeugt eine Wurzel von $f(x) = 0$ über K einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{A}$ enthält auf Grund einer bereits mehrfach angewandten Schlußweise eine Wurzel ε dieser Gleichung. Die Zahl $\frac{\varepsilon - 1}{R\,T}$ ist der dritten Kongruenz zufolge, der $f(x)$ genügt, ganz. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf sie in einer der Ordnungen $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_h$ angenommen werden, da diese alle Typen von Maximalordnungen repräsentiere Die Zahlen

$$\nu = \frac{\varepsilon - 1}{T}$$

und ε sind jetzt in $\mathfrak{I}$ enthalten. Wegen der zweiten Kongruenz, die $f(x)$ erfüllt, ist ε einer der Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ nach dem Modul $\mathfrak{p}\mathfrak{I}$ kongruent, es gilt daher für ein i

$$\tau_i^{-1}\,\varepsilon\,\tau_i \equiv \varepsilon_\mathfrak{p} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}\mathfrak{I}_\mathfrak{p}),$$

also

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} \supset \mathfrak{M}_\mathfrak{p}\,\tau_i^{-1}\,\varepsilon\,\tau_i.$$

Nun ist aber

$$\tau_i^{-1}\,\varepsilon\,\tau_i = 1 + T\,\tau_i^{-1}\,\nu\,\tau_i$$

auch in $\mathfrak{I}$ enthalten, weil ν und τ_i in $\mathfrak{I}$ liegen und T durch $n(\tau_i)$ teilbar ist. Dann ist sogar

$$\mathfrak{P} \supset \mathfrak{M}\,\tau_i^{-1}\,\varepsilon\,\tau_i,$$

und der Beweis des Hilfssatzes 6 ist erbracht.

(Eingegangen am 1. Juni 1937.)

Integralgeometrie 28.

Über elliptische Geometrie.

Von

Ta-Jen Wu*) in Hamburg und Wuchang.

In seiner Vorlesung über Geometrische Wahrscheinlichkeiten hat G. Herglotz im Jahre 1933 neben der Euklidischen Geometrie die elliptische Geometrie behandelt. In den letzten zwei Jahren ist daran anschließend eine Reihe von Arbeiten unter dem Obertitel „Integralgeometrie" erschienen. Die meisten Integralformeln in der Euklidischen Ebene und im Euklidischen Raum, die man bis jetzt gefunden hat, sind in den beiden sogenannten „kinematischen Hauptformeln" enthalten, die zuerst von W. Blaschke (1936) angegeben wurden[1]). Die vorliegende Arbeit zielt nach einer systematischen Behandlung der entsprechenden Dinge, insbesondere der kinematischen Hauptformel, im elliptischen Raum. Manche Ergebnisse von Herglotz werden dabei neu hergeleitet werden. Wegen der Endlichkeit des elliptischen Raumes sind viele Integrationen hier möglich, die im Euklidischen Fall einen unendlichen Wert ergeben würden, und diese neuen Integralformeln bekommt man am leichtesten mittels der Dualität. In § 10 wird die Steinersche Formel für parallele konvexe Flächen als ein spezieller Fall der kinematischen Hauptformel erscheinen und daraus werden sich einige Ungleichheiten herleiten lassen.

Herrn Blaschke habe ich außer manchen wertvollen Anregungen die Darstellung der Abbildung von Fubini, Hjelmslev und Study in § 3, sowie den Beweis der Formel (69) in § 4 zu verdanken.

§ 1.

Punkt- und Ebenendichte.

Jeden Punkt $\mathfrak{x}$ eines elliptischen Raumes von Krümmungsmaß 1 kann man mit vier Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3) darstellen, die durch die Gleichung

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{1}$$

*) „Research fellow" der „China Foundation".

[1]) W. Blaschke, Integralgeometrie 13. Zur Kinematik. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 465—478. Vgl. auch W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I (zweite erweiterte Auflage, 1936) und II (1937), Leipzig und Berlin.

verknüpft sind. Die Koordinaten $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ stellen denselben Punkt $\mathfrak{x}$ dar. Ein Punkt und seine (absolute) Polarebene haben dieselben Koordinaten. Der Abstand t zwischen zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist durch die Gleichung

$$\cos t = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{2}$$

gegeben, und t ist auch der Winkel zwischen den beiden entsprechenden Polarebenen.

Es seien $\mathfrak{x}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ vier Punkte, die ein „selbstkonjugiertes Tetraeder" bilden, d. h.,

$$(\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{x}_j) = \delta_{ij}, \tag{3}$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ oder 0 je nachdem $i = j$ oder $i \neq j$ ist. Wir führen die folgenden sechs Pfaffschen Formen ein:

$$(\dot{\mathfrak{x}}_i\,\mathfrak{x}_j) = -(\dot{\mathfrak{x}}_j\,\mathfrak{x}_i) \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \tag{4}$$

Als die *Dichte* $\dot{\mathfrak{x}}$[2]) *des Punktes* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ nehmen wir das alternierende Produkt

$$\dot{\mathfrak{x}} = (\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{x}_1)\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{x}_3), \tag{5}$$

und als die *Dichte der Ebene* $\mathfrak{E} = \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ nehmen wir gemäß der Dualität das alternierende Produkt

$$\dot{\mathfrak{E}} = (\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{x}}_3\,\mathfrak{x}_0). \tag{6}$$

Da (5) und (6) sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, brauchen wir nur eine von den beiden zu betrachten.

Nehmen wir also die Ebenendichte (6). Es seien $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ drei beliebige voneinander verschiedene Punkte auf der Ebene $\mathfrak{E}$, die sich auf $\mathfrak{E}$ auch bewegen dürfen:

$$\mathfrak{y}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\mathfrak{x}_k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

$|a_{ik}| \neq 0$. Dann haben wir

$$\dot{\mathfrak{y}}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\dot{\mathfrak{x}}_k + \sum_{k=1}^{3} \dot{a}_{ik}\,\mathfrak{x}_k, \tag{8}$$

und also nach (3)

$$(\dot{\mathfrak{y}}_1\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{y}}_2\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{y}}_3\,\mathfrak{x}_0) = |a_{ik}|\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{x}}_3\,\mathfrak{x}_0), \tag{9}$$

oder

$$\boxed{\dot{\mathfrak{E}} = \frac{(\dot{\mathfrak{y}}_1\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{y}}_2\,\mathfrak{x}_0)\,(\dot{\mathfrak{y}}_3\,\mathfrak{x}_0)}{\sin(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3)}}. \tag{10}$$

---

[2]) Das Zeichen $\dot{\mathfrak{x}}$ wird also in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht: als das Differential eines Vektors und als eine Dichte.

Dabei ist $\sin(\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3) = |a_{ik}|$ die sogenannte „*Sinus-Amplitude*“[3]) des Dreiecks $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{y}_2\,\mathfrak{y}_3$ auf der Ebene $\mathfrak{E}$.

Bilden die drei Punkte $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$ ein selbstkonjugiertes Dreieck auf der Ebene $\mathfrak{E}$, so ist $|a_{ik}| = 1$ und es folgt aus (10) die „*Wahlinvarianz*“ von $\mathfrak{E}$. Mit anderen Worten, die Ebenendichte (6) ist von der Wahl des selbstkonjugierten Dreiecks $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ unabhängig.

Daraus folgt auch die Wahlinvarianz der Punktdichte (5).

Wir möchten nun einen Ausdruck für $\dot{\mathfrak{E}}$ herleiten, indem wir einen der drei Punkte in $\mathfrak{E}$ längs einer gewissen Richtung verrücken lassen. Um bessere Symmetrie zu bekommen, nehmen wir statt $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ die Ebene $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ als die Ebene $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{x}_1$ ist also der Pol von $\mathfrak{E}$. Wir haben

$$\dot{\mathfrak{E}} = (\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{x}_1)\,(\dot{\mathfrak{x}}_2\,\mathfrak{x}_1)\,(\dot{\mathfrak{x}}_3\,\mathfrak{x}_1). \tag{11}$$

Es sei ferner

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{x}_1 + a_2\,\mathfrak{x}_2 + a_3\,\mathfrak{x}_3 \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1) \tag{12}$$

irgendein Punkt in der Ebene $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$, so daß $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}) = 0$ eine Ebene durch $\mathfrak{x}_0$ ist. Sind $\mathfrak{y}_k$ die Schnittpunkte von $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}) = 0$ mit den Geraden $\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{x}_j$, so finden wir

$$\mathfrak{y}_k = \frac{a_j}{\sqrt{1-a_k^2}}\,\mathfrak{x}_i - \frac{a_i}{\sqrt{1-a_k^2}}\,\mathfrak{x}_j, \tag{13}$$

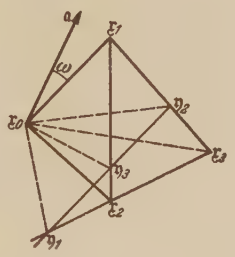


Fig. 1.

wobei i, j, k eine zyklische Permutation von 1, 2, 3 bedeuten. Zwischen den $\mathfrak{y}_k$ gilt die Beziehung

$$a_1\sqrt{1-a_1^2}\,\mathfrak{y}_1 + a_2\sqrt{1-a_2^2}\,\mathfrak{y}_2 + a_3\sqrt{1-a_3^2}\,\mathfrak{y}_3 = 0. \tag{14}$$

Aus (12), (13) folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 &= a_1\,\mathfrak{a} - a_3\sqrt{1-a_2^2}\,\mathfrak{y}_2 + a_2\sqrt{1-a_3^2}\,\mathfrak{y}_3,\\
\mathfrak{x}_2 &= \frac{1}{a_1}\left\{a_1 a_2\,\mathfrak{a} - a_2 a_3\sqrt{1-a_2^2}\,\mathfrak{y}_2 - (1-a_2^2)\sqrt{1-a_3^2}\,\mathfrak{y}_3\right\},\\
\mathfrak{x}_3 &= \frac{1}{a_1}\left\{a_1 a_3\,\mathfrak{a} + (1-a_3^2)\sqrt{1-a_2^2}\,\mathfrak{y}_2 + a_2 a_3\sqrt{1-a_3^2}\,\mathfrak{y}_3\right\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Lassen wir nun den Punkt $\mathfrak{x}_0$ längs der Richtung $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{a}$ verrücken, so sind $(\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{y}_2) = (\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{y}_3) = 0$, und es folgt aus (15)

$$(\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x}_1) = a_1\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{a}). \tag{16}$$

Wir setzen nun

$$\dot{s} = (\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{a}), \qquad \cos\omega = a_1. \tag{17}$$

Dann ist ω der Winkel zwischen $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{a}$ und der Normalen $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x}_1$ von $\mathfrak{E}$. Ferner setzen wir

$$(\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_3) = \dot{F}', \tag{18}$$

[3]) Siehe etwa J. L. Coolidge, The Elements of Non-Euclidean Geometry (1909), London, S. 171. „Eckensinus“ bei von Staudt.

so daß $\dot{F}'$ das von dem Pol $\mathfrak{x}_1$ von $\mathfrak{E}$ auf der Polarebene $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_2$ von $\mathfrak{x}_0$ beschriebene Flächenelement bedeutet. Aus (11), (16) bis (18) erhält man endlich

$$\boxed{\dot{\mathfrak{E}} = \cos\omega\, \dot{s}\, \dot{F}'} \tag{19}$$

Als eine unmittelbare Anwendung von (19) berechnen wir die Anzahl der Ebenen, die eine gegebene Kurve $\mathfrak{C}$ treffen. Zunächst bemerkt man, daß man eine elliptische Ebene erhält, wenn man die Diametralpunkte einer Einheitskugel identifiziert. Hält man vorläufig den Punkt $\mathfrak{x}_0$ fest, so haben wir

$$\int \cos\omega\, \dot{F}' = \pi, \tag{20}$$

wenn man über die halbe Einheitskugel integriert. Ist nun L die Länge der Kurve $\mathfrak{C}$, so folgt aus (19)

$$\boxed{\int n\,\dot{\mathfrak{E}} = \pi L}, \tag{21}$$

wobei n die Anzahl der Treffpunkte der Ebene $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{C}$ bedeutet.

Ist $\mathfrak{C}$ eine Gerade, so ist $n = 1$, $L = \pi$, und man hat

$$\boxed{\int \dot{\mathfrak{E}} = \pi^2}. \tag{22}$$

Dies ist also die „Anzahl" der Ebenen im elliptischen Raum. Wegen der Dualität ist die Anzahl der Punkte im ganzen Raum auch π^2.

§ 2.

Geradendichte.

Wir nehmen wieder das selbstkonjugierte Tetraeder $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ von Fig. 1. Als die Dichte der Gerade $\mathfrak{G} = \mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1$ nehmen wir die Differentialform vierten Grades

$$\dot{\mathfrak{G}} = (\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_3)\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_3). \tag{23}$$

Nehmen wir statt $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ zwei beliebige verschiedene Punkte $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$ auf $\mathfrak{G}$, die auf $\mathfrak{G}$ auch beweglich sein können:

$$\mathfrak{z}_i = \cos t_i\,\mathfrak{x}_0 + \sin t_i\,\mathfrak{x}_1, \qquad (i = 0, 1), \tag{24}$$

dann finden wir

$$\dot{\mathfrak{z}}_i = \cos t_i\,\dot{\mathfrak{x}}_0 + \sin t_i\,\dot{\mathfrak{x}}_1 + (-\sin t_i\,\mathfrak{x}_0 + \cos t_i\,\mathfrak{x}_1)\,\dot{t}, \tag{25}$$

und somit

$$\begin{aligned}(\dot{\mathfrak{z}}_i\mathfrak{x}_2) &= \cos t_i\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_2) + \sin t_i\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_2),\\ (\dot{\mathfrak{z}}_i\mathfrak{x}_3) &= \cos t_i\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_3) + \sin t_i\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_3).\end{aligned} \tag{26}$$

Daraus folgt

$$(\dot{\mathfrak{z}}_0\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{z}}_0\mathfrak{x}_3)\,(\dot{\mathfrak{z}}_1\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{z}}_1\mathfrak{x}_3) = \sin^2(t_1 - t_0)\,\mathfrak{G}. \tag{27}$$

Oder, wenn $t = t_1 - t_0$ der Abstand zwischen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ ist,

$$\dot{\mathfrak{G}} = \frac{(\dot{\mathfrak{z}}_0 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{z}}_0 \mathfrak{x}_3)(\dot{\mathfrak{z}}_1 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{z}}_1 \mathfrak{x}_3)}{\sin^2 t}. \tag{28}$$

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} \dot{F}_0 &= (\dot{\mathfrak{z}}_0 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{z}}_0 \mathfrak{x}_3), \\ \dot{F}_1 &= (\dot{\mathfrak{z}}_1 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{z}}_1 \mathfrak{x}_3) \end{aligned} \tag{29}$$

die Flächenelemente, die die Punkte $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1$ normal zu $\mathfrak{G}$ beschreiben, so kann man (28) auch in der Form

$$\dot{\mathfrak{G}} = \frac{\dot{F}_0 \dot{F}_1}{\sin^2 t} \tag{30}$$

schreiben.

Sind $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1$ orthogonal, so ist $\sin t = 1$ und es folgt aus (28) die Wahlinvarianz von $\dot{\mathfrak{G}}$.

Wir möchten nun einen zu (19) analogen Ausdruck für $\dot{\mathfrak{G}}$ herleiten. Wir nehmen wieder den Punkt $\mathfrak{a}$ in (12) (siehe Fig. 1). Lassen wir zuerst den Punkt $\mathfrak{x}_0$ beliebig verrücken, so haben wir nach (15) und mit Berücksichtigung von (14)

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_3) = \sqrt{1 - a_2^2}\sqrt{1 - a_3^2}(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_3) - \sqrt{1 - a_1^2}(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{a})(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_1). \tag{31}$$

Bezeichnet man mit $\dot{F}$ das auf der Ebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = 0$ von $\mathfrak{x}_0$ beschriebene Flächenelement, so sieht man leicht

$$\dot{F} = \frac{\sqrt{1 - a_2^2}\sqrt{1 - a_3^2}}{a_1}(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_3). \tag{32}$$

Ist ferner

$$\dot{S} = (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{a})(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{y}_1), \tag{33}$$

das auf der Ebene $\mathfrak{x}_0 \mathfrak{a} \mathfrak{y}_1$ von $\mathfrak{x}_0$ beschriebene Flächenelement, so folgt aus (23), (31) und (32) die Formel

$$\dot{\mathfrak{G}} = (\cos\omega \dot{F} - \sin\omega \dot{S})\dot{F}', \tag{34}$$

wobei ω der Winkel zwischen $\mathfrak{G}$ und der Normalen $\mathfrak{x}_0 \mathfrak{a}$ der Ebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = 0$ und $\dot{F}'$ das von $\mathfrak{x}_1$ auf der Polarebene $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3$ von $\mathfrak{x}_0$ beschriebene Flächenelement bedeutet. Bewegt sich der Punkt $\mathfrak{x}_0$ auf der Ebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = 0$, so ist $\dot{S} = 0$ und man hat

$$\dot{\mathfrak{G}} = \cos\omega \dot{F}\dot{F}'. \tag{35}$$

Den Geradeninhalt einer Fläche $\mathfrak{F}$ mit Oberfläche F berechnet man genau so wie in der Herleitung von (21). Man findet hier die Formel

$$\int n \dot{\mathfrak{G}} = \pi F, \tag{36}$$

wobei n die Anzahl der Schnittpunkte von der Geraden $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{F}$ bedeutet. Für konvexe geschlossene Flächen haben wir $n = 2$ oder 0 und also

$$\int_{\mathfrak{G}\mathfrak{F}\neq 0} \mathfrak{G} = \frac{\pi}{2} O, \tag{37}$$

wenn O die Oberfläche der Fläche ist.

Ist $\mathfrak{F}$ eine Ebene, so ist in (36) $O = 2\pi$ und $n = 1$ für alle Geraden, und es ergibt sich

$$\boxed{\int \dot{\mathfrak{G}} = 2\pi^2} \tag{38}$$

als die Anzahl der Geraden im Raum.

Betrachtet man wieder die zwei Punkte η_0 und η_1 in (24) auf $\mathfrak{G}$! Bewegen sich diese Punkte auf den Ebenen, deren Normalen die Winkel ω_0 und ω_1 mit $\mathfrak{G}$ bilden, und sind $\dot{F}_0$ und $\dot{F}_1$ die entsprechenden Flächenelemente, so folgt aus (28) und (34) die Formel

$$\boxed{\dot{\mathfrak{G}} = \frac{\dot{F}_0 \dot{F}_1 \cos\omega_0 \cos\omega_1}{\sin^2 t}}, \tag{39}$$

eine Verallgemeinerung von (30).

§ 3.

Die kinematische Dichte und die Abbildung von Fubini, Hjelmslev und Study.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein starrer, beweglicher Körper. Ist $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ ein mit $\mathfrak{K}$ starr verbundenes selbstkonjugiertes Tetraeder, so definiert man

$$\dot{\mathfrak{K}} = (\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_1)\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_3)\,(\dot{\mathfrak{x}}_2\mathfrak{x}_3)\,(\dot{\mathfrak{x}}_3\mathfrak{x}_1)\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_2) \tag{40}$$

als die *kinematische Dichte* von $\mathfrak{K}$. Man kann $\dot{\mathfrak{K}}$ offenbar in der Form schreiben

$$\dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{x}}, \tag{41}$$

wobei $\dot{\mathfrak{x}}$ die Dichte des Punktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ und $\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{x}}$ die kinematische Dichte um den Punkt $\mathfrak{x}$ bedeuten. Die Wahlinvarianz von $\dot{\mathfrak{K}}$ folgt aus der von $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{x}}$[4]). Die „*Umkehrinvarianz*“ von $\dot{\mathfrak{K}}$ sieht man leicht.

Außer (41) haben wir ferner

$$\dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{G}}\,\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{G}}, \tag{42}$$

und

$$\dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{E}}\,\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{E}} \tag{43}$$

[4]) Siehe § 1 und das zweite Heft der unter [1]) genannten Vorlesung, S. 62–63.

bis auf ein Vorzeichen. Dabei bedeutet $\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{G}}$ und $\dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{E}}$ die kinematische Dichte um $\mathfrak{G}$ und in $\mathfrak{E}$. Man sieht gleich

$$\int \dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{x}} = 8\pi^2, \qquad \int \dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{G}} = 4\pi^2, \qquad \int \dot{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{E}} = 8\pi^2, \tag{44}$$

über alle möglichen Lagen. Die Anzahl der möglichen Lagen eines starren, beweglichen Körpers ist also $8\pi^4$.

Als unmittelbare Anwendungen der kinematischen Dichte leitet man genau so wie im Euklidischen Raum die folgende Formel[5]) her:

$$\int V_{01}\,\dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 V_0 V_1, \tag{45}$$

und

$$\int O_{01}\,\dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 \{O_0 V_1 + V_0 O_1\}. \tag{46}$$

Hierbei bedeuten V_0 und O_0 den Rauminhalt und die Oberfläche der Randfläche eines festen Gebietes $\mathfrak{K}_0$, V_1 und O_1 die entsprechenden Größen eines beweglichen Gebietes $\mathfrak{K}_1$, V_{01} und O_{01} die entsprechenden Größen des Durchschnittes $\mathfrak{K}_{01} = \mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1$, und $\dot{\mathfrak{K}}_1$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{K}_1$.

Wir möchten nun eine von Herrn Blaschke stammende Darstellung der Abbildung von Fubini, Hjelmslev und Study erklären, bei der die Bewegungen des elliptischen Raumes auf die Bewegungen zweier Einheitskugeln abgebildet sind.

Sind (x_0, x_1, x_2, x_3) die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}_0$ und $(x_0^\alpha, x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}_\alpha$, so hat die Gerade $\mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\alpha$ die folgenden Plückerschen Koordinaten

$$p_{0i}^\alpha = x_0 x_i^\alpha - x_i x_0^\alpha, \qquad p_{jk}^\alpha = x_j x_k^\alpha - x_k x_j^\alpha, \tag{47}$$

darin wird i, j, k eine zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 bedeuten. Wir bilden die Matrix aus den zwei Punkten $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_\alpha$ und deuten sie durch $\langle \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\alpha \rangle$ an. Dann schreiben wir die *Identität von Lagrange* etwa in der Gestalt

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\alpha \rangle \langle \mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_\beta \rangle &= \sum_{i<k} (x_i x_k^\alpha - x_k x_i^\alpha)(y_i y_k^\beta - y_k y_i^\beta) \\ &= \begin{vmatrix} (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0) & (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_\beta) \\ (\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{y}_0) & (\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{y}_\beta) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{48}$$

Somit ist

$$\langle \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\alpha \rangle \langle \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\beta \rangle = \sum_{i<k} p_{ik}^\alpha p_{ik}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{49}$$

Entwickelt man andererseits die Determinante der vier Punkte $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\beta$, so erhält man

$$|\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\beta| = \sum_i p_{0i}^\alpha p_{ji}^\beta + p_{0i}^\beta p_{ji}^\alpha = 0. \tag{50}$$

---

[5]) Siehe das unter [4]) genannte Heft.

Setzen wir

$$p_{0i}^{\alpha} - p_{jk}^{\alpha} = l_i^{\alpha}, \quad p_{0i}^{\alpha} + p_{jk}^{\alpha} = r_i^{\alpha} \qquad \binom{i=1,2,3}{\alpha=1,2,3}, \tag{51}$$

so ist

$$\sum_{i=1}^{3} l_i^{\alpha} l_i^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3} r_i^{\alpha} r_i^{\beta}. \tag{52}$$

Die Geraden $\mathfrak{G}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ sind also auf die Punkte $\mathfrak{l}_\alpha(l_1^\alpha, l_2^\alpha, l_3^\alpha)$ und $\mathfrak{r}_\alpha(r_1^\alpha, r_2^\alpha, r_3^\alpha)$ zweier Euklidischer Einheitskugeln $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$ so abgebildet, daß die drei Punkte $\mathfrak{l}_\alpha$ sowie die drei Punkte $\mathfrak{r}_\alpha$ paarweise orthogonal sind.

Auf den Kugeln $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$ bilden wir die Pfaffschen Formen

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{l}_i^{\alpha} l_i^{\beta} = \dot{\lambda}_\gamma \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i^{\alpha} r_i^{\beta} = \dot{\varrho}_\gamma, \tag{53}$$

wobei α, β, γ eine zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 bedeutet. Wir haben

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\gamma &= \sum_i \dot{l}_i^{\alpha} l_i^{\beta} = \sum_{i<k} \dot{p}_{ik}^{\alpha} p_{ik}^{\beta} - \sum_i (\dot{p}_{0i}^{\alpha} p_{jk}^{\beta} + \dot{p}_{jk}^{\alpha} p_{0i}^{\beta}) \\ &= (\langle \dot{\mathfrak{x}}_0, \mathfrak{x}_\alpha \rangle + \langle \mathfrak{x}_0, \dot{\mathfrak{x}}_\alpha \rangle) \langle \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_\beta \rangle - |\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\beta| - |\mathfrak{x}_0 \dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\beta| \\ &= \begin{vmatrix} (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_0) & (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\beta) \\ (\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_0) & (\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_0) & (\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\beta) \\ (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_0) & (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\beta) \end{vmatrix} + |\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta| \\ &= (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) - (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\gamma), \end{aligned} \tag{54}$$

wenn man die Koordinaten so wählt, daß $|\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3| = 1$ ist. Somit haben wir

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\gamma &= (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) - (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\gamma), \\ \dot{\varrho}_\gamma &= (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) + (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\gamma), \\ (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_\gamma) &= \tfrac{1}{2}(\dot{\varrho}_\gamma - \dot{\lambda}_\gamma), \\ (\dot{\mathfrak{x}}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) &= \tfrac{1}{2}(\dot{\varrho}_\gamma + \dot{\lambda}_\gamma). \end{aligned} \tag{55}$$

Dies ist eine analytische Abbildung der Bewegungen im elliptischen Raum auf die unabhängigen Bewegungen der beiden Kugeln $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$.

Als die kinematische Dichte auf den beiden Kugeln $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$ nehmen wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{K}}_l &= \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3, \\ \dot{\mathfrak{K}}_r &= \dot{\varrho}_1 \dot{\varrho}_2 \dot{\varrho}_3. \end{aligned} \tag{56}$$

Aus (40) und (55) folgt die Beziehung

$$\dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{K}}_l \dot{\mathfrak{K}}_r. \tag{57}$$

§ 4.

Sphärisches Bild einer Fläche.

Nach (55) kann man die Geradendichte (23) in folgender Weise ausdrücken

$$\dot{\mathfrak{G}} = \tfrac{1}{4} \dot{\lambda}_2 \dot{\lambda}_3 \dot{\varrho}_2 \dot{\varrho}_3. \tag{58}$$

Man setzt

$$\dot{\varphi}_l = \lambda_2 \dot{\lambda}_3, \quad \dot{\varphi}_r = \varrho_2 \dot{\varrho}_3, \tag{59}$$

dann sind $\dot{\varphi}_l$ und $\dot{\varphi}_r$ die von den Punkten l und r auf $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$ beschriebenen Flächenelemente. Wir haben also

$$\dot{\mathfrak{G}} = \tfrac{1}{4} \dot{\varphi}_l \dot{\varphi}_r. \tag{60}$$

Aus dieser Formel folgt wieder die Formel (38) für die Anzahl der nicht gerichteten Geraden im Raum.

Zwei Geraden heißen *links-* (*oder rechts-*) *Cliffordsche Parallelen*, wenn sie denselben Bildpunkt l (oder r) haben. Ist $\mathfrak{F}$ etwa eine feste Fläche, so kann man das folgende Integral betrachten:

$$\Phi_l = \int n \dot{\varphi}_r. \tag{61}$$

Dieses Integral ist über alle Geraden $\mathfrak{G}$ zu erstrecken, die zu einer gewissen $\mathfrak{G}_l$ links-Cliffordsch parallel sind, und n bezeichnet die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{F}$. Φ_l ist also im gewissen Sinne die Anzahl der zu $\mathfrak{G}_l$ links-Cliffordsch parallelen Geraden, die $\mathfrak{F}$ treffen. Aus (36) und (60) hat man somit für nicht gerichtete Gerade

$$\boxed{\int \Phi_l \dot{l} = 2\pi F = \int \Phi_r \dot{r}}. \tag{62}$$

Hierbei bedeutet F, wie früher, die Oberfläche von $\mathfrak{F}$, während die Bedeutung von Φ_r analog ist zu der von Φ_l.

Nehmen wir nun eine Fläche $\mathfrak{F}$. Ist $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt auf $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{x}_1$ der Pol von der Tangentenebene an $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$, so liegt $\mathfrak{x}_1$ auf der „Polarfläche“ $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_1$ ist die Flächennormale in $\mathfrak{x}_0$. Jede Flächennormale hat zwei sphärische Bilder, l und r. Es läßt sich gleich zeigen, daß die beiden sphärischen Bilder eigentlich flächentreu aufeinander abgebildet sind [6]).

Aus $(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_1) = 0$ folgt nämlich durch Differentiation

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0 \dot{\mathfrak{x}}_1) = 0. \tag{63}$$

Sind $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ zwei Punkte, die zusammen mit $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$ ein selbstkonjugiertes Tetraeder bilden, so haben wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{x}}_0 &= (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_1 + (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_2)\mathfrak{x}_2 + (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_3)\mathfrak{x}_3, \\ \dot{\mathfrak{x}}_1 &= (\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_0)\mathfrak{x}_0 + (\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_2)\mathfrak{x}_2 + (\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_3)\mathfrak{x}_3. \end{aligned} \tag{64}$$

Aus (63) folgt also

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_2) - (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_3)(\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_3) = 0 \tag{65}$$

oder wegen (55) und (59),

$$\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_l. \tag{66}$$

---

[6]) Vgl. etwa Coolidge, a. a. O., S. 229.

Da die Punkte $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$ sowohl auf der Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$ als auch auf der Tangentebene von $\mathfrak{F}'$ in $\mathfrak{x}_1$ liegen, so können wir für die Oberflächenelemente der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ folgende nehmen:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= (\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_0 \mathfrak{x}_3), \\ \dot{F}' &= (\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_1 \mathfrak{x}_3). \end{aligned} \tag{67}$$

Nach (55) und (59) folgt unmittelbar

$$\dot{F} + \dot{F}' = \tfrac{1}{2}(\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r). \tag{68}$$

Setzen wir gemäß (66) $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_l = \dot{\varphi}_r$, so haben wir

$$\boxed{\dot{F} + \dot{F}' = \dot{\varphi}}. \tag{69}$$

Diese Formel ist für konvexe Flächen von Herglotz gegeben worden. Der obige Beweis stammt von Blaschke [7]).

§ 5.

Relative und absolute Krümmung.

Man nimmt eine stetige gekrümmte Fläche $\mathfrak{F}$ mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{x}_0(u, v)$. Ist $\mathfrak{x}_1(u, v)$ der Pol der Tangentenebene an $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$, so haben wir als erste und zweite Grundform der Fläche $\mathfrak{F}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= +(d\mathfrak{x}_0\, d\mathfrak{x}_0) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ \mathrm{II} &= -(d\mathfrak{x}_0\, d\mathfrak{x}_1) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2. \end{aligned} \tag{70}$$

Sind $\frac{1}{r'}$ und $\frac{1}{r''}$ die Hauptkrümmungen von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$, so definiert man

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{r''}, \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) \end{aligned} \tag{71}$$

als die *relative Krümmung* und die *mittlere Krümmung* der Fläche $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{72}$$

Andererseits definiert man die Gaußsche Krümmung (oder die Krümmung der ersten Grundform I) als die *absolute Krümmung* von $\mathfrak{F}$ und bezeichnet sie mit K_a. Zwischen K_r und K_a besteht die Beziehung

$$K_a = 1 + K_r \text{ [8])}. \tag{73}$$

---

[7]) Vgl. auch W. Blaschke, Integralgeometrie 20. Zur elliptischen Geometrie Math. Zeitschr. (1936), S. 785—786.

[8]) Siehe etwa Coolidge, a. a. O., S. 204.

Die geometrischen Bedeutungen von K_r und K_a möchten wir nun untersuchen. Wir nehmen wieder zwei Punkte $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, die mit $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_2$ ein selbstkonjugiertes Tetraeder bilden. Nach (67) haben wir

$$\dot{F} = \{(\mathfrak{x}_{0u}\,\mathfrak{x}_2)\,\dot{u} + (\mathfrak{x}_{0v}\,\mathfrak{x}_2)\,\dot{v}\}\,\{(\mathfrak{x}_{0u}\,\mathfrak{x}_3)\,\dot{u} + (\mathfrak{x}_{0v}\,\mathfrak{x}_3)\,\dot{v}\} = \{(\mathfrak{x}_{0u}\,\mathfrak{x}_2)\,(\mathfrak{x}_{0v}\,\mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_{0u}\,\mathfrak{x}_3)\,(\mathfrak{x}_{0v}\,\mathfrak{x}_2)\}\,\dot{u}\,\dot{v}. \tag{74}$$

Ganz analog gilt

$$\dot{F}' = \{(\mathfrak{x}_{1u}\,\mathfrak{x}_2)\,(\mathfrak{x}_{1v}\,\mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_{1u}\,\mathfrak{x}_3)\,(\mathfrak{x}_{1v}\,\mathfrak{x}_2)\}\,\dot{u}\,\dot{v}. \tag{75}$$

Nehmen wir die Hauptkrümmungslinien als die Parameterkurven, so gelten etwa

$$\mathfrak{x}_{1u} = -\frac{1}{r'}\,\mathfrak{x}_{0u}, \qquad \mathfrak{x}_{1v} = -\frac{1}{r''}\,\mathfrak{x}_{0v}\,^{9}). \tag{76}$$

Aus (71), (74), (75) und (76) folgt die gewünschte Beziehung

$$\boxed{\dot{F}' = K_r \dot{F}}. \tag{77}$$

Vergleichen wir (69), (73) und (77), so haben wir weiter

$$\boxed{\dot{\varphi} = K_a \dot{F}}. \tag{78}$$

Gemäß den Relationen (77) und (78), definieren wir die Integrale

$$C_r = \int \dot{F}', \qquad C_a = \int \dot{\varphi} \tag{79}$$

als die relative und absolute Gesamtkrümmung der Fläche $\mathfrak{F}$. Ist $\mathfrak{F}$ stetig gekrümmt, so hat man

$$C_r = \int K_r \dot{F}, \qquad C_a = \int K_a \dot{F}. \tag{80}$$

Alle vier Integrale in (79) und (80) sind über die ganze Oberfläche von $\mathfrak{F}$ zu erstrecken. Die Relation (69) läßt sich nun in der folgenden integrierten Form schreiben

$$\boxed{C_a = F + C_r}. \tag{81}$$

Für geschlossene und orientierbare Flächen haben wir nach (80)

$$C_a = 4\pi Z, \tag{82}$$

wobei Z die *Eulersche Zusammenhangszahl* bedeutet. Der Beweis gelingt analog wie im Euklidischen Falle[10]). Daß die Formel (82) auch für nicht

---

[9]) Diese zu den Rodrigueschen Gleichungen analogen Formeln bekommt man genau so, wie im Euklidischen Falle, wenn man beachtet, daß ein Krümmungsstreifen die Bedingung $(\mathfrak{x}_0\,\dot{\mathfrak{x}}_0\,\mathfrak{x}_1\,\dot{\mathfrak{x}}_1) = 0$ erfüllen muß. Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (1930), Berlin, S. 94—95.

[10]) Siehe etwa das unter [9]) genannte Buch, S. 165—166. Dort ist $Z = 1 - p$ für eine zusammenhängende Fläche gesetzt worden, wobei p das Geschlecht der Fläche bedeutet.

stetig gekrümmte Flächen gilt, folgt aus der Tatsache, daß Z eine topologische Invariante der Fläche $\mathfrak{F}$ ist. Aus (81) und (82) ergibt sich die Gleichung

$$\boxed{O + Q' = 4\pi Z}, \tag{83}$$

wenn man $F = O$, $C_r = Q'$ setzt. Man kann Q' als die *relative Oberfläche* der Polarfläche $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ nennen: sie kann gelegentlich negative Bestandteile enthalten. Die gewöhnliche, immer positiv genommene Oberfläche von $\mathfrak{F}'$ nennen wir die *absolute Oberfläche* von $\mathfrak{F}'$ und bezeichnen sie mit O'. Unter der Oberfläche von $\mathfrak{F}$ verstehen wir immer die absolute Oberfläche.

Zum Schluß möchten wir zeigen, wie man eine Erweiterung der Gleichung (83) für nicht-orientierbare Polyeder in einer einfachen Weise machen kann. Es sei $\mathfrak{P}$ also ein geschlossenes Polyeder, das nicht notwendig orientierbar zu sein braucht. Sind n_0 bzw. n_1 bzw. n_2 die Anzahl der Ecken bzw. Kanten bzw. Flächen von $\mathfrak{P}$, so nennt man

$$N = n_0 - n_1 + n_2 \tag{84}$$

die Eulersche Charakteristik von $\mathfrak{P}$. Ist insbesondere $\mathfrak{P}$ orientierbar, so gilt $N = 2Z$ [11]).

Ist nun $\mathfrak{F}_i$ eine Fläche von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{F}_i$ ein Polygon. Es sei ϑ_i die Anzahl der Seiten und $\sigma\,(0 < \sigma < 2\pi)$ der innere Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Seiten von $\mathfrak{F}_i$. Für den Flächeninhalt F_i von $\mathfrak{F}_i$ haben wir dann

$$F_i = \sum_{\mathfrak{F}_i} \sigma - (\vartheta_i - 2)\pi. \tag{85}$$

Summiert man (85) nach allen Flächen von $\mathfrak{P}$, so hat man für die Oberfläche von $\mathfrak{P}$:

$$0 = \Sigma\sigma - 2\pi n_1 + 2\pi n_2, \tag{86}$$

wobei die Summe Σ über alle Winkel σ von $\mathfrak{P}$ zu erstrecken ist.

Andererseits betrachte man eine Ecke $\mathfrak{x}_j$ und die Flächen und Kanten von $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{x}_j$. Auf dem Polarpolyeder $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{P}$ haben wir entsprechend eine Fläche $\mathfrak{H}_j'$ und die Ecken und Seiten von $\mathfrak{H}_j'$. Ist $\sigma\,(0 < \sigma < 2\pi)$ der innere Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kanten durch $\mathfrak{x}_j$, so ist σ auch der äußere Winkel zwischen den entsprechenden Seiten von dem Polygon $\mathfrak{P}'$. Nach der Formel von Gauß-Bonnet haben wir für den relativen Flächeninhalt H_j' von $\mathfrak{H}_j'$:

$$H_j' = 2\pi - \Sigma\sigma. \tag{87}$$

Summiert man (87) nach allen Ecken von $\mathfrak{P}$, so erhält man die relative Oberfläche von $\mathfrak{P}'$

$$Q' = 2\pi n_0 - \Sigma\sigma. \tag{88}$$

[11]) Vgl. das unter [4]) genannte Heft, S. 95—96.

Aus (84), (86) und (88) folgt die Formel

$$O + Q' = 2\pi N \tag{89}$$

In der obigen Herleitung von (89) haben wir vorausgesetzt, daß das Vorzeichen von H_j' durch (87) gegeben ist. Ob diese Definition der relativen Oberfläche Q' als die Summe der H_j' mit der Definition (80) übereinstimmt, wenn man einen Grenzübergang von Polyedern zu krummen Flächen macht, bedarf noch genauer Überlegung.

§ 6.

Die Grundformel.

Die kinematische Dichte (40) ist das Produkt der drei infinitesimalen Schiebungen längs dreier paarweise orthogonaler Richtungen und dreier infinitesimaler Drehungen um dieselben Richtungen. Wir können hier einen Ausdruck für die kinematische Dichte genau wie im Euklidischen Raum[12]) herleiten, indem wir diese drei Schiebungen und drei Drehungen durch die Schiebungen längs dreier beliebiger Richtungen und die Drehungen um drei beliebige Richtungen ersetzen.

Es sei dann $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{x}_1 + a_2\mathfrak{x}_2 + a_3\mathfrak{x}_3$ ein beliebiger Punkt auf der Ebene $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$. Aus (14) folgt, wenn man die Verrückung des Punktes $\mathfrak{x}_0$ in der Richtung $\mathfrak{x}_0\mathfrak{a}$ (Fig. 1) betrachtet,

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_i) = a_i(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{a}) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{90}$$

Sind $\mathfrak{a}_k = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mathfrak{x}_i$ $(k = 1, 2, 3)$ irgend drei Punkte auf der Ebene $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ und $\dot{s}_k$ die Verrückung längs der Richtung $\mathfrak{x}_0\mathfrak{a}_k$, so haben wir

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_i) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\dot{s}_k \tag{91}$$

und also

$$(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_1)(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_2)(\dot{\mathfrak{x}}_0\mathfrak{x}_3) = A\,\dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_3, \tag{92}$$

wobei $A = |a_{ik}|$ ist.

Wir nehmen nun wieder die Ebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = 0$ durch $\mathfrak{x}_0$ und betrachten die infinitesimale Drehung $\dot{\sigma}$ um die Richtung $\mathfrak{x}_0\mathfrak{a}$. Dann ist

$$\dot{\sigma} = (\dot{\mathfrak{y}}_2\mathfrak{y}), \tag{93}$$

wobei $\mathfrak{y}$ den Punkt auf der Geraden $\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3$ orthogonal zu $\mathfrak{y}_2$ bedeutet:

$$(\mathfrak{y}\mathfrak{y}_3) = \frac{a_1}{\sqrt{1-a_2^2}\sqrt{1-a_3^2}}. \tag{94}$$

---

[12]) Siehe W. Blaschke, Integralgeometrie 17. Über Kinematik. Deltion, Athen 1936, S. 3—14. Der Inhalt dieses und des nächsten Paragraphen ist in der Hauptsache parallel zu dieser Abhandlung ausgearbeitet.

Wir haben also

$$(95) \qquad (\dot{\mathfrak{y}}_2\mathfrak{y}_3) = \frac{a_1}{\sqrt{1-a_2^2}\sqrt{1-a_3^2}}(\dot{\mathfrak{y}}_2\mathfrak{y}) = \frac{a_1}{\sqrt{1-a_2^2}\sqrt{1-a_3^2}}\dot{\sigma}.$$

Durch eine Drehung um $\mathfrak{x}_0 a$ wird a festgehalten. Aus (14) folgt dann

$$(96) \qquad \dot{\mathfrak{x}}_1 = -a_3\sqrt{1-a_2^2}\,\dot{\mathfrak{y}}_2 + a_2\sqrt{1-a_3^2}\,\dot{\mathfrak{y}}_3.$$

Da $(\dot{\mathfrak{y}}_2\mathfrak{y}_3) = -(\mathfrak{y}_2\dot{\mathfrak{y}}_3)$ ist, haben wir

$$(97) \qquad (\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_2) = \frac{a_3}{a_1}\sqrt{1-a_2^2}\sqrt{1-a_3^2}\,(\dot{\mathfrak{y}}_2\mathfrak{y}_3) = a_3\dot{\sigma}.$$

Durch zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 bekommt man zwei weitere Formeln.

Sind jetzt $\mathfrak{b}_k = \sum_{i=1}^{3} b_{ik}\mathfrak{x}_i$ $(k = 1, 2, 3)$ wieder drei Punkte auf der Ebene $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ und $\dot{\sigma}_k$ die infinitesimale Drehung um $\mathfrak{x}_0\mathfrak{b}_k$, so haben wir nach (97) und den entsprechenden Formeln für $(\dot{\mathfrak{x}}_2\mathfrak{x}_3)$ und $(\dot{\mathfrak{x}}_3\mathfrak{x}_1)$

$$(98) \qquad (\dot{\mathfrak{x}}_i\mathfrak{x}_j) = \sum_{k=1}^{3} b_{ki}\dot{\sigma}_i.$$

Daraus ergibt sich

$$(99) \qquad (\dot{\mathfrak{x}}_2\mathfrak{x}_3)(\dot{\mathfrak{x}}_3\mathfrak{x}_1)(\dot{\mathfrak{x}}_1\mathfrak{x}_2) = B\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2\dot{\sigma}_3$$

mit $B = |b_{ik}|$.

Aus (92) und (99) folgt der folgende Ausdruck für die kinematische Dichte:

$$(100) \qquad \dot{\mathfrak{K}} = A \cdot B\dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_3\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2\dot{\sigma}_3.$$

Wir möchten nun die sogenannte „Grundformel" herleiten.

Man betrachtet zunächst eine Fläche $\mathfrak{F}$ und einen Punkt $\mathfrak{x}_0$, der auf $\mathfrak{F}$ beweglich ist. Ist $\overrightarrow{\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3}$ eine gerichtete Tangente an $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{x}_0$ mit $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3) = 0$, so definiert $\overrightarrow{\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3}$ ein Linienelement $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{x}_0$ auf $\mathfrak{F}$.

Fig. 2.

Ist $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ ein selbstkonjugiertes Tetraeder, so daß $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1$ die Flächennormale an $\mathfrak{F}$ im Punkt $\mathfrak{x}_0$ ist und sind $\dot{t}_2, \dot{t}_3$ die Verrückungen des Punktes $\mathfrak{x}_0$ längs $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ und $\dot{\tau}_1$ die infinitesimale Drehung um $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1$, so definiert man

$$(101) \qquad \dot{\mathfrak{L}} = \dot{t}_2\dot{t}_3\dot{\tau}_1$$

als die Dichte des Linienelements $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{F}$.

Wir nehmen nun eine feste Fläche $\mathfrak{F}_0$, eine bewegliche Fläche $\mathfrak{F}_1$ und einen Punkt $\mathfrak{x}_0$ an, der auf dem Durchschnitt $\mathfrak{C}_{01}$ von $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ beweglich sein soll. Sei $\mathfrak{L} = \overrightarrow{\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3}$ eines von den beiden gemeinsamen Linienelementen von $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$, das die Kurve $\mathfrak{C}_{01}$ enthält. Seien $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_3$ zwei selbstkonjugierte Tetraeder,

wobei x_0x_1 und $x_0\eta_1$ die Flächennormalen an $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ in x_0 sind. Den Winkel zwischen x_0x_1 und $x_0\eta_1$ bezeichnet man mit σ. Setzt man nun

$$\begin{aligned} a_1 &= x_3, \\ a_2 &= x_2, \\ a_3 &= \eta_2 = -x_1\sin\sigma + x_2\cos\sigma; \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= x_3, \\ b_2 &= x_1, \\ b_3 &= \eta_1 = x_1\cos\sigma + x_2\sin\sigma, \end{aligned}$$

so haben wir $A = B = \sin\sigma$ und nach (100)

$$\dot{\mathfrak{F}}_0 = \sin^2\sigma\, \dot{s}_1\dot{s}_2\dot{s}_3\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2\dot{\sigma}_3. \tag{103}$$

Bezeichnet man mit

$$\dot{\mathfrak{L}}_0 = \dot{t}_2\dot{t}_3\dot{\tau}_1 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{L}}_1 = \dot{t}_2^*\dot{t}_3^*\dot{\tau}_1^* \tag{104}$$

die Dichte des Linienelements $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$, so sieht man gleich

$$\begin{aligned} \dot{t}_2 &= \dot{s}_2, \qquad \dot{t}_3 = \dot{s}, \qquad \dot{\tau}_1 = \dot{\sigma}; \\ \dot{t}_2^* &= \dot{s}_1, \qquad \dot{t}_3^* = \dot{s}_3 + \dot{s}, \qquad \dot{\tau}_1^* = \dot{\sigma}_2, \end{aligned} \tag{105}$$

wobei $\dot{s}$ die Verrückung des Punktes x_0 auf $\mathfrak{C}_{01}$ bedeutet. Aus (103), (104) und (105) folgt die Grundformel

$$\boxed{\dot{\mathfrak{F}}_1\dot{s} = \sin^2\sigma\,\dot{\mathfrak{L}}_0\dot{\mathfrak{L}}_1\dot{\sigma}}. \tag{106}$$

Die Grundformel (106) läßt sich in einer dualen Weise erklären. Man betrachtet zunächst eine einzige Fläche $\mathfrak{F}$. Ist $x_0x_1x_2x_3$ wieder ein selbstkonjugiertes Tetraeder mit x_0 auf $\mathfrak{F}$ und x_2, x_3 auf der Tangentenebene an $\mathfrak{F}$ in x_0, so liegt x_1 auf der Polarfläche $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$. Es sei $\mathfrak{E}_0 = x_1x_2x_3$, $\mathfrak{E}_3 = x_0x_1x_2$, so sind $\mathfrak{E}_0$ bzw. $\mathfrak{E}_3$ die Tangentenebene an die Flächen $\mathfrak{F}_0$ bzw. $\mathfrak{F}'$ in x_0 bzw. x_1. Als das Duale des Linienelements $\dot{\mathfrak{L}} = \overrightarrow{x_0x_3}$ definiert man $\mathfrak{T} = \overrightarrow{\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}_3}$ als ein Tangentialelement. Als Dichte $\dot{\mathfrak{T}}'$ dieses Tangentialelements um $\mathfrak{F}'$ definiert man $\dot{\mathfrak{T}}' = \dot{\mathfrak{L}}$, wobei $\dot{\mathfrak{L}}$ die Dichte von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{F}$ bedeutet. Nun kann man aber die Dichte $\dot{\mathfrak{L}}$ (abgesehen von einem Vorzeichen) als das Produkt von infinitesimalen Drehungen um x_1x_0, x_1x_2, x_1x_3 ansehen. Bezeichnet man diese infinitesimalen Drehungen mit $\dot{\tau}_0, \dot{\tau}_2, \dot{\tau}_3$, so haben wir

$$\dot{\mathfrak{T}}' = \dot{\tau}_0\tau_2\tau_3. \tag{107}$$

Wir nehmen nun wieder die zwei oben betrachteten Flächen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ (Fig. 2). Die beiden Polarflächen $\mathfrak{F}_0'$ und $\mathfrak{F}_1'$ haben die gemeinsame Tangentenebene $\mathfrak{E}_0 = x_1x_2x_3 = \eta_1\eta_2x_3$, also das gemeinsame Tangentialelement $\mathfrak{T} = \overrightarrow{\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}_3}$. Ist t' die Entfernung zwischen den beiden Berührungspunkten x_1 und η_1 und $\dot{\tau}'$ die infinitesimale Drehung der Tangentenebene $\mathfrak{E}_0$ um

$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$, so hat man $t' = \sigma$ und $\dot{\tau}' = \dot{s}$. Bezeichnet man ferner mit $\dot{\mathfrak{T}}_0'$ bzw. $\dot{\mathfrak{T}}_1'$ die Dichte des Tangentilaelements $\mathfrak{T}'$ um $\mathfrak{F}_0$ bzw. $\mathfrak{F}_1'$, so sind $\dot{\mathfrak{T}}_0' = \dot{\mathfrak{L}}_0$ und $\dot{\mathfrak{T}}_1' = \dot{\mathfrak{L}}_1$. Es folgt also aus (106) die duale Formel

$$\dot{\mathfrak{F}}'\dot{\tau}' = \sin^2 t'^2\,\dot{\mathfrak{T}}_0'\dot{\mathfrak{T}}_1'\dot{t}' \quad (108)$$

[13]),

da $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1'$ ist. Diese Formel kann man natürlich auch ohne Striche schreiben.

Als erste Anwendung der Grundformel (106), erwähnen wir die folgenden zwei Ergebnisse, die sich hier ebenso wie im Euklidischen Falle herleiten lassen.

1. Es seien $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ stetig gekrümmte Flächen mit Oberflächen F_0 und F_1, und L_{01} sei die Länge ihrer Schnittkurve $\mathfrak{C}_{01}$. Betrachtet man $\mathfrak{F}_0$ als fest und $\mathfrak{F}_1$ als beweglich, so hat man

$$\int L_{01}\dot{\mathfrak{F}}_1 = 2\pi^3 F_0 F_1. \quad (109)$$

2. Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein festes Gebiet und $\mathfrak{K}_1$ ein bewegliches. Die Randfläche von $\mathfrak{K}_i\,(i = 0, 1)$ bezeichnet man mit $\mathfrak{R}_i$, ihre Oberfläche mit O_i. Ist ferner

$$M_i = \int H_i \dot{F}_i \quad (110)$$

das Flächenintegral der mittleren Krümmung H_i von $\mathfrak{R}_i$, und V_i der Rauminhalt von $\mathfrak{K}_i$, so haben wir

$$\int M_{01}\dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2\left\{M_0 V_1 + \frac{\pi^2}{16} O_0 O_1 + V_0 M_1\right\}, \quad (111)$$

wobei M_{01} das Integral der mittleren Krümmung der Randfläche des Durchschnittes $\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1$ bedeutet.

Aus (109) kann man eine neue Formel herleiten. Die Polarfigur einer Kurve $\mathfrak{C}$ ist eine Torse $\mathfrak{D}$ und die Länge der Kurve ist gleich dem Integral

$$W = \int |\dot{\tau}|, \quad (112)$$

wobei $\dot{\tau}$ der infinitesimale Winkel zwischen zwei benachbarten Ebenen von $\mathfrak{D}$ bedeutet. Einfachheitshalber nennen wir W den *Gesamtwinkel* von $\mathfrak{D}$. Wir nehmen nun wieder zwei Flächen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$, und bilden für die beiden Polarflächen $\mathfrak{F}_0'$ und $\mathfrak{F}_1'$ die Formel (109). Ersetzen wir L_{01}' durch den Gesamtwinkel W_{01} der Torse $\mathfrak{D}_{01}$, die die gemeinsamen Tangentebenen von $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ bilden, so bekommen wir die Formel

$$\int W_{01}\dot{\mathfrak{F}}_1 = 2\pi^3 F_0' F_1', \quad (113)$$

---

[13]) Eine entsprechende Formel gilt auch im Euklidischen Raum, aber dort läßt sie sich nicht aus (106) herleiten.

da $\dot{\mathfrak{F}} = \dot{\mathfrak{F}}'$ ist. Hierbei bedeutet $F_i'\,(i = 0, 1)$ die absolute Oberfläche von $\mathfrak{F}_i'$; und die absolute bzw. relative Oberfläche von $\mathfrak{F}_i'$ ist genau so definiert wie die absolute bzw. relative Oberfläche der Polarfläche einer geschlossenen Fläche. Diese Formel läßt sich auch direkt aus (108) herleiten.

§ 7.

Die kinematische Hauptformel.

Wir nehmen wieder zwei Gebiete $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ mit den stetig gekrümmten Randflächen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$. Ist $\mathfrak{R}_{01}$ die Randfläche des Durchschnittes $\mathfrak{K}_{01} = \mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1$, so möchten wir die beiden Integrale

$$\int C_\alpha(\mathfrak{R}_{01})\,\dot{\mathfrak{K}}_1 \quad \text{und} \quad \int C_r(\mathfrak{R}_{01})\,\dot{\mathfrak{K}}_1 \tag{114}$$

berechnen.

Nehmen wir zunächst das zweite dieser Integrale. Die relative Gesamtkrümmung $C_r(\mathfrak{R}_{01})$ von $\mathfrak{R}_{01}$ besteht aus drei Bestandteilen: $C_r(\mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{K}_1)$, $C_r(\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{R}_1)$ und dem Betrag B längs der Schnittkurve $\mathfrak{C}_{01} = \mathfrak{R}_0\,\mathfrak{R}_1$. Es seien J_1, J_2, J_3 die entsprechenden Bestandteile des Integrals $\int C_r(\mathfrak{R}_{01})\,\mathfrak{K}_1$, so haben wir

$$\int C_r(\mathfrak{R}_{01})\;\dot{\mathfrak{K}}_1 = J_1 + J_2 + J_3. \tag{115}$$

Man berechnet unmittelbar J_1 und J_2:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int C_r(\mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{K}_1)\,\dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 C_{0r}\,V_1, \\ J_2 &= \int C_r(\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{R}_1)\,\dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 V_0\,C_{1r}, \end{aligned} \tag{116}$$

wobei C_{ir} $(i = 0, 1)$ die relative Gesamtkrümmung von $\mathfrak{R}_i$, und V_i den Rauminhalt von $\mathfrak{K}_i$ bedeutet.

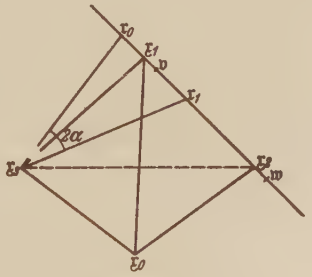


Fig. 3.

Es bleibt also noch J_3 zu berechnen. Es sei $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt auf der Schnittkurve $\mathfrak{C}_{01}$, und $\mathfrak{x}_2$ der Punkt orthogonal zu $\mathfrak{x}_0$ auf der Tangente an $\mathfrak{C}_{01}$ in $\mathfrak{x}_0$. Ferner, sei $\mathfrak{r}_i\,(i = 0, 1)$ der Punkt orthogonal zu $\mathfrak{x}_0$ auf der Flächennormale an $\mathfrak{R}_i$ in $\mathfrak{x}_0$. Dann ist $\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{r}_1$ die Polargerade von $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x}_2$. Ist $2\alpha\,(0 \leqq \alpha < \pi)$ der Abstand zwischen $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{r}_1$ (oder der Winkel zwischen den Flächennormalen $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{r}_1$), so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_0 &= \mathfrak{v}\cos\alpha - \mathfrak{w}\sin\alpha, \\ \mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{v}\cos\alpha + \mathfrak{w}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{117}$$

wobei $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ die Mittelpunkte der beiden Strecken $\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{r}_1$ bedeuten.

Ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{v}\cos\varphi + \mathfrak{w}\sin\varphi, \\ \mathfrak{x}_2 &= -\mathfrak{v}\sin\varphi + \mathfrak{w}\cos\varphi, \end{aligned} \qquad -\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha \tag{118}$$

so liegt $\mathfrak{x}_1$ zwischen $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{r}_1$ auf der Geraden $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1$, also auf der Polarfläche $\mathfrak{R}'_{01}$ von $\mathfrak{R}_{01}$, und die Punkte $\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ bilden ein selbstkonjugiertes Tetraeder. Wir haben also

$$B = \int_{\substack{\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{C}_{01} \\ -\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha}} (\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2)\,(\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_3). \tag{119}$$

Aus (118) folgt

$$\dot{\mathfrak{x}}_1 = \dot{\mathfrak{v}}\cos\varphi + \dot{\mathfrak{w}}\sin\varphi + (-\mathfrak{v}\sin\varphi + \mathfrak{w}\cos\varphi)\,\varphi. \tag{120}$$

Nun gilt $(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{v}) = 0$ und $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{x}_3) = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}_3) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_2) &= \dot{\varphi}, \\ (\dot{\mathfrak{x}}_1\,\mathfrak{x}_3) &= (\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x}_3)\cos\varphi + (\dot{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{x}_3)\sin\varphi \end{aligned} \tag{121}$$

und somit

$$\begin{aligned} B &= -\int_{\substack{\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{C}_{01} \\ -\alpha \leqq \varphi \leqq \alpha}} \{(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x}_3)\cos\varphi + (\dot{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{x}_3)\sin\varphi\}\,\dot{\varphi} \\ &= -2\int_{\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{C}_{01}} (\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{x}_3)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{122}$$

Da wegen (117)

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1}{2} \tag{123}$$

ist, haben wir

$$B = -\int_{\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{C}_{01}} \{(\dot{\mathfrak{r}}_0\,\mathfrak{x}_3) + (\dot{\mathfrak{r}}_1\,\mathfrak{x}_3)\}\tan\alpha. \tag{124}$$

Nach der Frenetschen Formel im elliptischen Raum[14]),

$$\frac{d\,\mathfrak{x}_3}{d\,s} = \frac{\mathfrak{z}}{\varrho} - \mathfrak{x}_0 \tag{125}$$

und der Relation $(\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{x}_3) = 0$ $(i = 0, 1)$, folgt

$$(\dot{\mathfrak{r}}_i\,\mathfrak{x}_3) = -(\mathfrak{r}_i\,\dot{\mathfrak{x}}_3) = -\frac{(\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{z})}{\varrho}\,\dot{s}. \tag{126}$$

Dabei bedeutet $\dot{s}$ das Längenelement der Kurve $\mathfrak{C}_{01}$, $\frac{1}{\varrho}$ ihre Krümmung und $\mathfrak{z}$ den Punkt orthogonal zu $\mathfrak{x}_0$ auf ihren Hauptnormalen in $\mathfrak{x}_0$. Ist ferner $\frac{1}{R_i}$ die Normalkrümmung der Kurve $\mathfrak{C}_{01}$ in $\mathfrak{x}_0$ auf der Fläche $\mathfrak{R}_i$, so folgt nach dem Meunierschen Satze:

$$\frac{(\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{z})}{\varrho} = \frac{1}{R_i}. \tag{127}$$

---

[14]) Für die Theorie der Kurven und Flächen im nichteuklidischen Raume, siehe Coolidge, a. a. O., Kap. XV.

Aus (124), (126) und (127) folgt

$$B = \int_{\mathfrak{C}_{01}} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right) \tan\alpha \, \dot{s}. \tag{128}$$

Setzen wir $\sigma = 2\alpha$, so haben wir nach der Grundformel (106)

$$\int B \, \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8 \int \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right) \sin^3\alpha \cos\alpha \, \dot{\mathfrak{L}}_0 \, \dot{\mathfrak{L}}_1. \tag{129}$$

Es gilt nun nach der Eulerschen Gleichung

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\cos^2\tau_i}{r_i'} + \frac{\sin^2\tau_i}{r_i''}, \tag{130}$$

wobei $\frac{1}{r_i'}, \frac{1}{r_i''}$ die Hauptkrümmungen der Fläche $\mathfrak{R}_i$ und τ_i die Winkel zwischen $\mathfrak{C}_{01}$ und einer Hauptrichtung von $\mathfrak{R}_i$ bedeuten. Andererseits ist nach der Definition (101)

$$\dot{\mathfrak{L}}_i = \dot{F}_i \, \dot{\tau}_i, \tag{131}$$

wobei $\dot{F}_i$ das Flächenelement von $\mathfrak{R}_i$ ist. Wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha \cos\alpha \, \dot{\alpha} = \tfrac{1}{4}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\tau_i \, \tau_i = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\tau_i \, \dot{\tau}_i = \pi, \tag{132}$$

folgt aus (129)

$$\int B \, \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 \{M_0 O_1 + O_0 M_1\}. \tag{133}$$

Dabei bedeutet O_i wie sonst die Oberfläche von $\mathfrak{R}_i$ und M_i das Integral der mittleren Krümmung H_i von $\mathfrak{R}_i$.

Aus (116) und (133) folgt die Formel

$$\boxed{\int C_r(\mathfrak{R}_{01}) \, \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 \{C_{r0} V_1 + M_0 O_1 + O_0 M_1 + V_0 C_{r1}\}}. \tag{134}$$

Der Wert des ersten Integrals (114) folgt aus (48), (81) und (134). Man erhält damit die *„kinematische Hauptformel im elliptischen Raume“*

$$\boxed{\int C_a(\mathfrak{R}_{01}) \, \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 \{C_{a0} V_1 + M_0 O_1 + O_0 M_1 + V_0 C_{a1}\}}. \tag{135}$$

§ 8.

Spezielle Fälle.

Eine Ebene im elliptischen Raum ist nichtorientierbar. Aber zwei Ebenen zerlegen offenbar den Raum in zwei Gebiete, die beide konvex sind. Ist α einer der beiden Winkel zwischen den zwei Ebenen, so sieht man leicht, daß das entsprechende Gebiet den Rauminhalt $\pi\alpha$ hat. Für ein solches Gebiet haben wir also

$$C_a = 4\pi, \quad C_r = 0, \quad M = \pi\alpha, \quad O = 4\pi, \quad V = \pi\alpha. \tag{136}$$

Es ist nämlich $H = 0$ überall auf den beiden Ebenen und die Kantenkrümmung längs der Schnittlinie ist $\pi\alpha$, denn diese Schnittlinie ist ja eine doppelt gezählte Gerade. Insbesondere für eine doppelt gezählte Ebene $\mathfrak{E}$ können wir $\alpha = 0$ setzen und

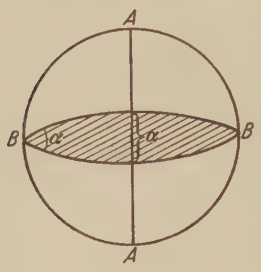


Fig. 4.

$$C_a = 4\pi, \quad C_r = 0, \quad M = 0, \quad O = 4\pi, \quad V = 0. \tag{137}$$

Ist nun $\mathfrak{K}$ irgendein Gebiet, so haben wir nach (44) und (135), wenn wir mit $C_a(\mathfrak{K}, \mathfrak{E})$ die absolute Gesamtkrümmung der Randfläche des „Gebietes" $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{E}$ bezeichnen,

$$\int C_a(\mathfrak{K}, \mathfrak{E})\, \dot{\mathfrak{E}} = 4\pi (M + V), \tag{138}$$

wobei V der Rauminhalt von $\mathfrak{K}$, und M das Integral der mittleren Krümmung der Randfläche von $\mathfrak{K}$ sind. Ist $Z(\mathfrak{K}, \mathfrak{E})$ die Eulersche Zusammenhangszahl von $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{E}$, so hat man mittels (82)

$$\boxed{\int Z(\mathfrak{K}, \mathfrak{E})\, \dot{\mathfrak{E}} = M + V}. \tag{139}$$

Ist $\mathfrak{K}$ konvex, so ist $Z = 1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{K}\mathfrak{E} \neq 0$ oder $= 0$ und

$$\boxed{\int\limits_{\mathfrak{K}\mathfrak{E} \neq 0} \dot{\mathfrak{E}} = M + V}\ [15]). \tag{140}$$

In diesem Falle ist die Polarfläche der Randfläche $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ wieder konvex und umschließt also einen Rauminhalt V'. Man sieht gleich, daß V' dem Ebeneninhalt des äußeren Gebietes von $\mathfrak{R}$ gleich ist. Da die Gesamtheit der Ebenen im Raume das Maß π^2 hat, so folgt

$$V' + \int\limits_{\mathfrak{K}\mathfrak{E} \neq 0} \dot{\mathfrak{E}} = \pi^2. \tag{141}$$

Vergleichen wir (140) und (141), so erhalten wir

$$\boxed{M = \pi^2 - V - V'}. \tag{142}$$

Aus der Symmetrie dieser Gleichung in bezug auf V und V' folgt die Gleichung

$$\boxed{M' = M} \tag{143}$$

für konvexe Flächen, wobei M' das Integral der mittleren Krümmung für die Polarfläche bedeutet.

Wir möchten nun die Werte von C_a, C_r, M, O, V für einige andere speziellen Gebiete geben.

---

[15]) Diese Formel ist schon von Herglotz angegeben worden.

Einen Punkt betrachtet man als Grenzfall eines konvexen Körpers: seine Polarfläche ist also eine doppelt gezählte Ebene. Wir haben also nach (143) für den Punkt

(144) $$C_a = 4\pi, \quad C_r = 4\pi, \quad M = 0, \quad O = 0, \quad V = 0.$$

Die Polarfläche einer geradlinigen Strecke besteht aus zwei Ebenen. Ist $L < \pi$ die Länge der Strecke, so hat man nach (136) und (143)

(145) $$C_a = 4\pi, \quad C_r = 4\pi, \quad M = \pi L, \quad O = 0, \quad V = 0.$$

Indem man die Polarfläche betrachtet, findet man für ein Dreieck entsprechend

(146) $$C_a = 4\pi, \quad C_r = 4\pi - 2F, \quad M = \frac{\pi}{2} U, \quad O = 2F, \quad V = 0,$$

wobei F die (einmal gezählte) Oberfläche und U den Umfang des Dreiecks bedeuten.

Für ein Tetraeder haben wir endlich ohne weiteres

(147) $$C_a = 4\pi, \quad C_r = 4\pi - O, \quad M = \tfrac{1}{2} \Sigma \alpha L, \quad O = O, \quad V = V.$$

Dabei ist die betreffende Summe über alle Kanten zu erstrecken, während L die Kantenlänge bedeutet und α die Kantenwinkel.

Nach (144) bis (147) können wir die Werte C_a, C_r, M, O, V für beliebige „Komplexe" definieren und ebenso wie im Euklidischen Raum die kinematische Hauptformel für Komplexe beweisen[16]).

Die Polarfläche einer Geraden ist wieder eine Gerade. Für eine Gerade hat man also

(148) $$C_a = 0, \quad C_r = 0, \quad M = \pi^2, \quad O = 0, \quad V = 0.$$

Man vergleiche (148) mit (145).

Aus (145) folgt für beliebige Kurven von der Länge L, $M = \pi L$, $O = V = 0$. Ist die Kurve einfach bzw. einfach und geschlossen, so ist $C_a = C_r = 4\pi$ bzw. 0. Aus (146) folgt für eine beliebige Fläche mit dem Umfang U, $M = \frac{\pi}{2} U$. Damit kann man verschiedene, spezielle Fälle der Formel (135) bekommen.

Ist z. B. $\mathfrak{K}_0$ eine Fläche $\mathfrak{F}$ von der Oberfläche F und $\mathfrak{K}_1$ eine Kurve $\mathfrak{C}$ von der Länge L, so hat man

(149) $$\boxed{\int n \dot{\mathfrak{C}} = 4\pi^2 F L},$$

wobei n die Anzahl der Schnittpunkte der Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{C}$ bedeutet. Nimmt man nun eine Fläche $\mathfrak{F}$ und die Schmiegtorse $\mathfrak{D}$ einer Kurve $\mathfrak{C}$, so hat man die Dualformel

(150) $$\boxed{\int n' \dot{\mathfrak{C}} = 4\pi^2 F' W}.$$

---

[16]) Vgl. das unter [4]) genannte Heft, S. 105—113.

Hierbei bedeutet n' die Anzahl der Schmiegebenen von $\mathfrak{C}$, die zu gleicher Zeit Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ sind, F' die absolute Oberfläche der Polarfläche $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$ und W den Gesamtwinkel der Torse $\mathfrak{D}$.

Ist insbesondere C eine Gerade $\mathfrak{G}$, so ist n' die Anzahl der Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{G}$, und mittels (44) folgt

$$\boxed{\int n' \dot{\mathfrak{G}} = \pi F'}. \tag{151}$$

Betrachtet man andererseits die Kurve $\mathfrak{C}$ als fest und $\mathfrak{F}$ beweglich, so kann man nach der Umkehrinvarianz der kinematischen Dichte in der Gleichung (150) $\dot{\mathfrak{C}}$ durch $\dot{\mathfrak{K}}$ ersetzen. Schrumpft nun die Fläche in einen Punkt x zusammen, so ist $F' = 2\pi$[17]) und n' ist die Anzahl der Schmiegebenen von $\mathfrak{C}$ durch x. Nach (44) folgt

$$\boxed{\int n' \dot{x} = \pi W}. \tag{152}$$

Die Formeln (151) und (152) kann man natürlich dual aus den Formeln (35) und (21) bekommen.

Zum Schluß möchten wir noch eine Bemerkung machen. Bildet man die Formel (135) für ein Gebiet $\mathfrak{K}$ und eine Gerade $\mathfrak{G}$, so bekommt man hauptsächlich die Formel (36). Dieses Integral mißt aber nicht die Gesamtanzahl der Geraden, die gemeinsame Punkte mit $\mathfrak{K}$ haben, sondern die Anzahl nur derjenigen Geraden, die wirklich die Randfläche von $\mathfrak{K}$ treffen. Die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{G}$ ist ja null, wenn $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

§ 9.

Formeln für drei Gebiete.

Es seien $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ drei Gebiete, wobei $\mathfrak{K}_0$ fest und $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ beweglich sind. Die Randflächen $\mathfrak{R}_i$ von $\mathfrak{K}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ setzen wir als stetig gekrümmt voraus. Ferner bezeichnen wir mit C_{a_i} bzw. M_i bzw. O_i die absolute Gesamtkrümmung bzw. das Integral der mittleren Krümmung bzw. Oberfläche der Fläche $\mathfrak{R}_i$ und mit V_i den Rauminhalt von $\mathfrak{K}_i$. Ist nun $C_a(\mathfrak{R}_{012})$ die Gesamtkrümmung der Randfläche $\mathfrak{R}_{012}$ des Durchschnittes $\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1 \cdot \mathfrak{K}_2$, so haben wir nach der Hauptformel (135), wenn wir $\mathfrak{K}_1$ zunächst festhalten,

$$\begin{aligned} \int C_a(\mathfrak{R}_{012})\, \dot{\mathfrak{K}}_1 \dot{\mathfrak{K}}_2 = 8\pi^2 \{ & V_2 \int C_a(\mathfrak{R}_{01})\, \dot{\mathfrak{K}}_1 \\ & + O_2 \int M_{01} \dot{\mathfrak{K}}_1 + M_2 \int O_{01} \dot{\mathfrak{K}}_1 + C_{a_2} \int V_{01} \dot{\mathfrak{K}}_1 \}, \end{aligned} \tag{153}$$

wobei $C_a(\mathfrak{R}_{01}), M_{01}, O_{01}, V_{01}$ wie früher die Werte von den Größen C_a, M, O, V von der Randfläche $\mathfrak{R}_{01}$ des Durchschnittes $\mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{K}_1$ bedeuten.

[17]) Hier hat man $F' = 2\pi$ statt 4π, denn man betrachtet den Punkt x als den Grenzfall nicht eines Gebietes, sondern eines Flächenstücks.

Nach (45), (46), (111), (135) folgt die „kinematische Hauptformel für drei Gebiete“

$$(154)\quad \boxed{\begin{aligned}&\int C_a(\mathfrak{R}_{012})\,\dot{\mathfrak{R}}_1\,\dot{\mathfrak{R}}_2\\ &= 8\pi^2\left\{\begin{aligned}&8\pi^2(V_0V_1C_{a2}+V_0C_{a1}V_2+C_{a0}V_1V_2\\ &+8\pi^2\begin{pmatrix}V_0O_1M_2+O_0M_1V_2+M_0V_1O_2\\ V_0M_1O_2+M_0O_1V_2+O_0M_1V_2\end{pmatrix}+\frac{\pi^4}{2}O_0O_1O_2\end{aligned}\right\}.\end{aligned}}$$

Für die relative Gesamtkrümmung $C_r(\mathfrak{R}_{012})$ von $\mathfrak{R}_{012}$ gilt offenbar eine ganz analoge Formel.

Betrachtet man den Sonderfall, wobei alle drei Gebiete Flächen sind, etwa $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ mit der Oberfläche F_0, F_1, F_2, und ist n die Anzahl der Schnittpunkte der drei Flächen, so nimmt (154) hier die einfache Form an:

$$(155)\quad \boxed{\int n\,\dot{F}_1\,\dot{F}_2 = 8\pi^5 F_0F_1F_2}.$$

(155) entspricht dual:

$$(156)\quad \boxed{\int n'\,\dot{F}_1\,\dot{F}_2 = 8\pi^5 F_0'F_1'F_2'}.$$

Dabei bedeutet n' die Anzahl der gemeinsamen Tangentenebenen der Flächen $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ und F_0', F_1', F_2' die absolute Oberfläche ihrer Polarflächen.

Wir möchten noch eine weitere Formel für drei Gebiete geben. Wir nehmen die drei oben betrachteten Gebiete $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ und bilden das Integral

$$(157)\quad \int C_a(\mathfrak{R}_{02})\,C_a(\mathfrak{R}_{12})\,\dot{\mathfrak{K}}_1\,\dot{\mathfrak{K}}_2 = \int \Phi_{01}^2\,\dot{\mathfrak{K}}_1,$$

wobei man

$$(158)\quad \Phi_{01}^2 = \int C_a(\mathfrak{R}_{02})\,C_a(\mathfrak{R}_{12})\,\dot{\mathfrak{K}}_2$$

gesetzt hat.

In der linken Form läßt sich das Integral (157) aus der Hauptformel (135) gleich berechnen. Man hat

$$(159)\quad \boxed{\begin{aligned}\int \Phi_{01}^2\,\dot{\mathfrak{K}}_1 &= 64\pi^3\{C_{a0}V_2+M_0O_2\\ &\quad +O_0M_2+V_0C_{a2}\}\{C_{a1}V_2+M_1O_2+O_1M_2+V_1C_{a2}\}\end{aligned}}.$$

Betrachten wir einige Sonderfälle! Sind $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1$ zwei Flächen $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ mit den Oberflächen F_0, F_1, und ist $\mathfrak{K}_2$ eine Kurve C mit der Länge L, die die Fläche $\mathfrak{F}_i$ $(i = 0, 1)$ in n_i Punkten trifft, so kann man die Formel (159) in der Form

$$(160)\quad \boxed{\int \Psi_{01}\,\dot{\mathfrak{F}}_1 = 16\pi^4 F_0F_1L^2}, \qquad \Psi_{01} = \int n_0n_1\,\dot{\mathfrak{C}}$$

schreiben. Ψ_{01} ist im gewissen Sinne die Anzahl der Lagen der Kurven $\mathfrak{C}$ die die beiden Flächen $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ treffen. Ist $\mathfrak{C}$ eine Gerade $\mathfrak{G}$, so hat man

$$\boxed{\int G_{01} \dot{F}_1 = 4\pi^4 F_0 F_1}, \qquad G_{01} = \int n_0 n_1 \dot{\mathfrak{G}}. \tag{161}$$

Für den dualen Fall bezeichne man mit n_i' $(i = 0, 1)$ die Anzahl der Schmiegebenen der Kurve $\mathfrak{C}$, die zu gleicher Zeit auch Tangentenebenen der Fläche $\mathfrak{F}_i$ sind. Dann gilt

$$\boxed{\int \Psi_{01}' \dot{\mathfrak{F}}_1 = 16\pi^4 F_0' F_1' W^2}, \qquad \Psi_0' = \int n_0' n_1' \dot{\mathfrak{C}}, \tag{162}$$

wobei F_i' $(i = 0, 1)$ die absolute Oberfläche der Polarfläche F_i' von $\mathfrak{F}_i$ und W den Gesamtwinkel der Schmiegtorse von $\mathfrak{C}$ bedeutet. Ist $\mathfrak{C}$ eine Gerade $\mathfrak{G}$, so hat man

$$\boxed{\int G_{01}' \dot{F}_1 = 4\pi^4 F_0' F_1'}, \qquad G_{01}' = \int n_0' n_1' \dot{\mathfrak{G}}. \tag{163}$$

Hierin ist n_i' $(i = 0, 1)$ die Anzahl der Tangentenebenen von $\mathfrak{F}_i$ durch $\mathfrak{G}$.

Sind andererseits $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$ zwei Kurven $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$ mit den Längen L_0, L_1 und ist $\mathfrak{K}_2$ eine Fläche $\mathfrak{F}$ mit der Oberfläche F, die die Kurve $\mathfrak{C}_i$ $(i = 0, 1)$ in n_i Punkten trifft, so hat man wegen (159)

$$\boxed{\int \Psi_{01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = 16\pi^4 L_0 L_1 F^2}, \qquad \Psi_{01} = \int n_0 n_1 \dot{\mathfrak{F}}, \tag{164}$$

und ist $\mathfrak{F}$ eine Ebene $\mathfrak{E}$, so gilt

$$\boxed{\int E_{01} \dot{\mathfrak{C}}_1 = 8\pi^4 L_0 L_1}, \qquad E_{01} = \int n_0 n_1 \dot{\mathfrak{E}}. \tag{165}$$

Für den dualen Fall nehmen wir wieder zwei Kurven $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1$ und eine Fläche $\mathfrak{F}$. Dann hat man

$$\boxed{\int \Psi_{01}' \dot{\mathfrak{C}}_1 = 16\pi^4 W_0 W_1 F'^2}, \qquad \Psi_{01}' = \int n_0' n_1' \dot{\mathfrak{F}}. \tag{166}$$

Schrumpft $\mathfrak{F}$ in einen Punkt $\mathfrak{x}$ zusammen, so gilt

$$\boxed{\int X_{01}' \dot{\mathfrak{C}}_1 = 8\pi^4 W_0 W_1}, \qquad X_{01}' = \int n_0' n_1' \dot{\mathfrak{x}}. \tag{167}$$

Die Bezeichnungen brauchen hier wohl nicht mehr erklärt zu werden.

Sind endlich $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$ konvexe Gebiete und $\mathfrak{K}_2$ eine Ebene $\mathfrak{E}$, so gilt nach (159)

$$\boxed{\int E_{01} \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 (M_0 + V_0)(M_1 + V_1)}, \qquad E_{01} = \int\limits_{\substack{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{E} \neq 0 \\ \mathfrak{K}_1 \mathfrak{E} = 0}} \dot{\mathfrak{x}}, \tag{168}$$

oder wegen (142)

$$\int E_{01} \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 (\pi^2 - V_0')(\pi^2 - V_1'). \tag{169}$$

§ 10.

Einige Ungleichheiten für konvexe Körper.

Betrachtet man zunächst eine Kugel $\mathfrak{S}$ mit dem Halbmesser R. Für die relative Krümmung und die mittlere Krümmung gilt überall

$$\bar{K}_r = \frac{1}{\tan^2 R}, \qquad H = \frac{1}{\tan R}. \tag{170}$$ [18])

Somit ergeben sich nach (73), (78) und (110) die folgenden Formeln für die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung von $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} O &= \int \sin^2 R\, \dot{\varphi} = 4\pi \sin^2 R, \\ M &= \int \sin R \cos R\, \dot{\varphi} = 4\pi \sin R \cos R. \end{aligned} \tag{171}$$

Für den Rauminhalt von $\mathfrak{S}$ haben wir dann

$$V = \int_0^R O\, \dot{R} = 4\pi \int_0^R \sin^2 R\, \dot{R} = \pi (2R - \sin 2R). \tag{172}$$

Ferner haben die beiden Gesamtkrümmungen von $\mathfrak{S}$ die Werte

$$C_a = 4\pi, \qquad C_r = 4\pi \cos^2 R. \tag{173}$$

Lassen wir $\mathfrak{S}$ bewegen, so können wir offenbar

$$\int \dot{\mathfrak{S}} = 8\pi^2 \int \dot{\mathfrak{x}} \tag{174}$$

setzen, wobei $\dot{\mathfrak{x}}$ die Dichte des Mittelpunktes $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{S}$ bedeutet, da die Lage von $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{x}$ eindeutig bestimmt ist.

Nun nehmen wir ein festes, konvexes Gebiet $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{U}$ die kleinste $\mathfrak{K}$ enthaltende Kugel und r_u ihr Halbmesser, so sieht man leicht, daß der Durchschnitt $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{U}$ immer konvex ist, wenn $R \leqq \frac{\pi}{2} - r_u$. Unter dieser Beschränkung von R hat man also stets $C_a(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) = 4\pi$ für die absolute Gesamtkrümmung der Randfläche des Durchschnittes $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{S}$. Daraus folgt wegen (174)

$$\int C_a(\mathfrak{K}, \mathfrak{S})\, \dot{\mathfrak{S}} = 32\pi^2 \int_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}_R} \dot{\mathfrak{x}} = 32\pi^2 V_R. \tag{175}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{K}_R$ das konvexe Gebiet, dessen Randfläche die „Parallelfläche vom Abstand R" der Randfläche von $\mathfrak{K}$ ist und V_R ist sein Rauminhalt. V_R ist offenbar die Anzahl der Lagen von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{K}$ treffen. Nach (135), (170). (172) und (173) haben wir

$$\boxed{V_R = V + O \sin R \cos R + M \sin^2 R + \pi (2R - \sin 2R)}, \tag{176}$$

---

[18]) Die Hauptkrümmungen sind überall beide $\frac{1}{\tan R}$. Siehe Coolidge, a. a. O., S. 134.

oder mittels (83)

$$V_R = V + \tfrac{1}{4} O(2R + \sin 2R) + \tfrac{1}{4} M(1 - \cos 2R) + \tfrac{1}{4} O'(2R - \sin 2R). \tag{177}$$

Darin ist wie sonst V der Rauminhalt von $\mathfrak{R}$, O die Oberfläche und M das Flächenintegral der mittleren Krümmung der Randfläche von $\mathfrak{R}$, und O' die (absolute und relative) Oberfläche der Polarfläche von dieser Randfläche. In der Form (177) hat Herglotz die Formel gegeben. Sie gilt für alle R mit $0 \leqq R \leqq \frac{\pi}{2} - r_u$.

Ist $\mathfrak{U}_R$ die mit $\mathfrak{U}$ konzentrische Kugel mit Halbmesser $r_u + R$ und ist $V(\mathfrak{U}_R)$ ihr Rauminhalt, so ist

$$\mathfrak{R}_R \subset \mathfrak{U}_R, \qquad V_R \leqq V(\mathfrak{U}_R), \tag{178}$$

und folglich nach (172) und (176)

$$V + O \sin R \cos R + M \sin^2 R \leqq \pi \{2 r_u - \sin r_u \cos(2R + r_u)\}, \tag{179}$$

$$0 \leqq R \leqq \frac{\pi}{2} - r_u.$$

Setzt man insbesondere $R = \frac{\pi}{2} - r_u$, so hat man

$$\boxed{V + O \sin r_u \cos r_u + M \cos^2 r_u \leqq V_u}, \tag{180}$$

wenn V_u der Rauminhalt $\mathfrak{U}$ von ist.

Ist $\mathfrak{I}$ andererseits die größte in $\mathfrak{R}$ enthaltene Kugel und r_i ihr Halbmesser, so ergibt sich aus

$$\mathfrak{R}_R \supset \mathfrak{I}_R, \qquad V_R \geqq V(\mathfrak{I}_R), \tag{181}$$

worin $\mathfrak{I}_R$ die mit $\mathfrak{I}$ konzentrische Kugel mit Halbmesser $r_i + R$ und $V(\mathfrak{I}_R)$ ihr Rauminhalt ist, die Ungleichheit

$$V + O \sin R \cos R + M \sin^2 R \geqq \pi \{2 r_i - \sin r_i \cos(2R + r_i)\}. \tag{182}$$

Diese Ungleichheit gilt aber für $0 \leqq R \leqq \frac{\pi}{2} - r_i$. Für einen solchen Wert von R bildet der Durchschnitt $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}$ nämlich kein Ringgebiet, und danach gilt stets $C_a(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) \geqq 4\pi$. Andererseits ist $C_a(\mathfrak{I}, \mathfrak{S}) = 4\pi$. Man hat also

$$\int C_a(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})\, \dot{\mathfrak{S}} \geqq \int C_a(\mathfrak{I}, \mathfrak{S})\, \dot{\mathfrak{S}}. \tag{183}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist gleich der rechten Seite von (176), und die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich $32\pi^2 V(\mathfrak{I}_R)$. Daraus folgt die Gültigkeit von (182) für $0 \leqq R \leqq \frac{\pi}{2} - r_i$. Setzt man nun $R = \frac{\pi}{2} - r_i$, so hat man

$$\boxed{V + O \sin r_i \cos r_i + M \cos^2 r_i \geqq V_i}, \tag{184}$$

wobei V_i den Rauminhalt von $\mathfrak{I}$ bedeutet.

Aus (180) und (184) bekommt man durch Subtraktion die weitere Ungleichung

$$O(\sin r_u \cos r_u - \sin r_i \cos r_i) + M(\cos^2 r_u - \sin^2 r_i) \leqq V_u - V_i, \tag{185}$$

oder ausführlicher

$$O(\sin 2r_u - \sin 2r_i) + M(\cos 2r_u - \cos 2r_i) \leqq \pi\{2(r_u - r_i) - (\sin 2r_u - \sin 2r_i)\}. \tag{186}$$

Betrachten wir endlich die Ebenenmaße der drei konvexen Körper $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{U}$, so hat man nach (140)

$$M_i + V_i \leqq M + V \leqq M_u + V_u, \tag{187}$$

worin M_u, V_u und M_i, V_i für $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{I}$ dieselbe Bedeutung haben wie M, V für $\mathfrak{K}$. Da andererseits

$$V_i \leqq V \leqq V_u \tag{188}$$

ist, so ergibt sich durch Subtraktion von (187)

$$\boxed{r_i - r_u \leqq \frac{M}{2\pi} - \sin(r_u + r_i)\cos(r_u - r_i) \leqq r_u - r_i}. \tag{189}$$

Hamburg, im Juni 1937.

(Eingegangen am 6. Juni 1937.)

Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

T. Ważewski in Kraków.

Wir betrachten die Gleichung

(1) $$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$$

in der Umgebung des Punktes $M^0(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, z^0, q_1^0, \ldots, q_n^0)$. Die Veränderlichen sind reell.

Cauchys Problem besteht darin, das Integral $\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ dieser Gleichung zu finden, welches stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und welches für $x = x^0$ mit einer gegebenen Funktion $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ identisch ist, wobei $\omega(y_1^0, \ldots, y_n^0) = z^0$ und $\omega_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) = q_i^0$ ist[1]). Die allgemeinsten bisher bekannten Bedingungen der Lösbarkeit dieses Problems sind die folgenden Bedingungen B_1.

B_1. Die Funktionen $f_x, f_{y_i}, f_z, f_{q_i}, f_{y_i y_j}, f_{y_i z}, f_{y_i q_j}, f_{zz}, f_{z q_i}, f_{q_i q_j}$ sind stetig in der Umgebung des Punktes M^0 und die Ableitungen $\omega_{y_i y_j}$ sind stetig in der Umgebung des Punktes $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ [2]).

In der vorliegenden Abhandlung zeigen wir, daß folgende geringeren Bedingungen B_2 genügen[3]) (Satz 1).

B_2. In der Umgebung des Punktes M^0 sind die Funktionen f, f_{y_i}, f_z, f_{q_i} stetig und die Funktionen f_{y_i}, f_z, f_{q_i} genügen der Lipschitz-Bedingung in bezug auf die Veränderlichen y_i, z, q_i; die Ableitungen ω_{y_i} erfüllen in der Umgebung des Punktes $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ die Lipschitz-Bedingung in bezug auf die Veränderlichen y_i.

Der Beweis beruht auf der Zurückführung des Falles B_2 auf den Fall B_1 durch Approximation der Funktionen f und ω mit Hilfe gewisser Polynome;

---

[1]) Mit $\varphi_{u_i}(u_1, \ldots, u_n)$, $\varphi_{u_i u_j}(u_1, \ldots, u_n)$ bezeichnen wir die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}$.

[2]) Siehe z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930), S. 352 und 359, (Fall $n = 1$).

[3]) Diese Bedingungen sind auch im gewissen Sinne wesentlich für die Existenz der aus Charakteristiken gebildeten Lösungen des Cauchyschen Problems. Vgl. die Beispiele 1 und 2, welche die Antwort auf eine von Herrn Biernacki in bezug auf den Satz 1 gestellte Frage darstellen.

der Beweis für diesen Approximationssatz wird in § 2 erbracht. Der Grenzübergang stützt sich auf eine unter den Bedingungen B_1 richtige und vorher von uns angegebene Abschätzung des Existenzbereiches des Integrals χ, sowie auf die Abschätzung von $|\chi_{v_i}|$ und $|\chi_{v_i v_j}|$ in diesem Bereiche.

Es erweist sich, daß unter den Bedingungen B_2 das Integral unserer Gleichung aus Charakteristiken gebildet ist. Es zeigt sich außerdem, daß die Ableitungen χ_{v_i} die Lipschitz-Bedingungen in bezug auf die Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ in der Umgebung des Punktes $(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ erfüllen. Die Ableitungen $\chi_{v_i x}$, $\chi_{v_i v_j}$, sowie $\chi_{x v_i}$ existieren daher fast überall in der Umgebung dieses Punktes. Wir gelangen weiter zu einer Abschätzung des Existenzbereiches des Integrals χ, sowie zu einer Abschätzung von $|\chi|$, $|\chi_x|$, $|\chi_v|$ und der erwähnten Lipschitz-Konstanten für χ_x und χ_{v_i}.

§ 1.

Wir machen folgende *Voraussetzungen V*. Zwischen den Konstanten K, K_1, M, M_1 sollen die Beziehungen

$$0 < K < K_1, \quad 0 < M_1 < M \tag{2}$$

bestehen. Die Funktion $f(x, y_1, \ldots, z, \ldots, q_n)$ und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung nach $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ [4]) sollen in dem Würfel

$$|x - x_0| \leqq K_1, \; |y_i - y_i^0| \leqq K_1, \quad |z - z^0| \leqq K_1, \quad |q_i - q_i^0| \leqq K_1 \tag{3}$$

stetig sein. Die Funktion $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ soll in dem Würfel

$$|y_i - y_i^0| \leqq K_1, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $y_1, \ldots, y_n$ besitzen. In dem Würfel (3) sollen die Ungleichungen

$$|f|, \; |f_{v_i}|, \; |f_z|, \; |f_{q_i}| < M_1 \tag{5}$$

und in dem Würfel (4) die Ungleichungen

$$|\omega_{y_i}| < M_1, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

bestehen. Die Funktionen f_{v_i}, f_z, f_{q_i} sollen in dem Würfel (3) die Lipschitz-Bedingung in bezug auf $y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n$ mit der Konstanten M_1 [5]) und die Funktionen ω_i sollen in dem Würfel (4) die Lipschitz-Bedingung

[4]) Die Existenz der Ableitung f_x wird nicht vorausgesetzt.

[5]) Das bedeutet $|f_{v_i}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{z}, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) - f_{v_i}(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)| \leqq M_1 \{\Sigma |\bar{y}_j - y_j| + |\bar{z} - z| + \Sigma |\bar{q}_j - q_j|\}$ etc.

in bezug auf $y_1, \ldots, y_n$ mit derselben Konstanten M_1 erfüllen. Außerdem sollen die folgenden Ungleichungen

$$(7) \quad |q_i^0| < M_1, |\omega(y_1^0, \ldots, y_n^0) - z^0| < \frac{K}{4}, |\omega_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{K}{4}$$

bestehen[6]).

Satz 1. *Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen V erfüllt sind, und betrachten die Gleichung*

$$(8) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right),$$

das ist die Gleichung (1) *in anderer Form geschrieben. Wir bezeichnen mit G das durch folgende Ungleichungen definierte Gebiet*

$$|x - x^0| \leqq \delta, |y_i - y_i^0| \leqq \frac{K}{4n(M+1)} - M|x - x^0| \ldots \text{(Gebiet } G\text{)},$$

wobei

$$\delta = \delta(n, K, M) = \frac{K^2}{[(n+1)(M+K+1)]^5} \text{ ist.}$$

Wir behaupten, daß bei diesen Voraussetzungen V die Gleichung (8) *eine Lösung* $\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ *hat, welche* 1. *in G existiert und in diesem Gebiete stetige Ableitungen erster Ordnung nach* $x, y_1, \ldots, y_n$ *besitzt, und welche* 2. *in dem Würfel*

$$(9) \quad x = x^0, |y_i - y_i^0| \leqq \frac{K}{4n(M+1)}$$

mit der Funktion $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ *identisch ist.*

Beweis. Bei unseren Voraussetzungen existieren (s. § 2) gewisse Folgen von Polynomen F^ν und Ω^ν, welche folgende Eigenschaften besitzen:

I. Die Folgen $F^\nu, F^\nu_{y_i}, F^\nu_z, F^\nu_{q_i}$ konvergieren gleichmäßig in dem Würfel

$$(10) \quad |x - x^0| \leqq K, \quad |y_i - y_i^0| \leqq K, \quad |z - z^0| \leqq K, \quad |q_i - q_i^0| \leqq K$$

gegen f, f_{y_i}, f_z, f_{q_i}. Daher bestehen in diesem Würfel für alle hinreichend großen ν die Ungleichungen (s. (2), (5))

$$(11) \quad |F^\nu|, |F^\nu_{y_i}|, |F^\nu_z|, |F^\nu_{q_i}| < M.$$

Außerdem bestehen in dem Würfel (10) wegen der vorausgesetzten Lipschitz-Bedingung für f_{y_i}, f_z, f_{q_i} mit der Konstanten $M_1 < M$ für alle hinreichend großen ν die Ungleichungen (s. § 2)

$$|F^\nu_{y_i y_j}|, |F^\nu_{zz}|, |F^\nu_{q_i q_j}|, |F^\nu_{y_i z}|, |F^\nu_{y_i q_j}|, |F^\nu_{z q_i}| < M.$$

II. Die Folgen $\Omega^\nu, \Omega^\nu_{y_i}$ konvergieren in dem Quader

$$(12) \quad |y_i - y_i^0| \leqq K$$

[6]) Es ist leicht zu sehen, daß bei den Bedingungen B_2 Konstante K, K_1, M, M_1 existieren, für welche die Voraussetzungen V erfüllt sind.

gleichmäßig entsprechend gegen ω und ω_{y_i} (s. § 2); daher bestehen in diesem Würfel für alle hinreichend großen ν die Ungleichungen (s. (2), (6))

$$|\Omega^\nu_{y_i}| < M.$$

Überdies bestehen wegen der vorausgesetzten Lipschitz-Bedingung für ω_{y_i} mit der Konstanten $M_1 < M$ in dem Quader (12) für alle hinreichend großen ν die Ungleichungen (s. § 2)

$$|\Omega^\nu_{y_i y_j}| < M.$$

Endlich gelten wegen (7) für alle hinreichend großen ν die Ungleichungen

$$|\Omega^\nu(y_1^0, \ldots, y_n^0) - z^0| < \frac{K}{4}, \; |\Omega^\nu_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{K}{4}.$$

Man kann annehmen, daß obige Eigenschaften I und II von dem Index $\nu = 1$ an erfüllt sind.

Für die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F^\nu\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right)$$

existiert auf Grund der Eigenschaften I, II und eines früher von uns bewiesenen Satzes [7]) im Gebiet G ein Integral $\chi^\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$,

$$\frac{\partial \chi^\nu}{\partial x} \equiv F^\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \chi^\nu, \chi^\nu_{y_1}, \ldots, \chi^\nu_{y_n}) \quad \text{(in } G\text{)}, \tag{13}$$

welches stetige Ableitungen erster Ordnung [8]) nach $x, y_1, \ldots, y_n$ besitzt und in dem Würfel (9) die Gleichung

$$\chi^\nu(x^0, y_1, \ldots, y_n) \equiv \Omega^\nu(y_1, \ldots, y_n) \tag{14}$$

identisch erfüllt. Außerdem existieren [9]) gewisse positive und von ν unabhängige Zahlen $\sigma_0(n, K, M)$, $\sigma_1(n, K, M)$ und $\sigma_2(n, K, M)$, so daß im Gebiet G folgende Ungleichungen gelten:

$$|\chi^\nu| \leqq \sigma_0(n, K, M), \; |\chi^\nu_{y_i}| \leqq \sigma_1(n, K, M), \; |\chi^\nu_{y_i y_j}| \leqq \sigma_2(n, K, M), \tag{15}$$

$$|\chi^\nu - z^0| \leqq \tfrac{3}{4} K, \; |\chi^\nu_{y_i} - q_i^0| \leqq \tfrac{3}{4} K. \tag{16}$$

Wegen (11) und (13) haben wir noch in dem Gebiet G

$$|\chi^\nu_x| < M. \tag{17}$$

Aus der nach y_i differenzierten Gleichung (13) folgern wir auf Grund von (11) und (15), daß eine Zahl $\tau(n, K, M)$ existiert, für welche die Ungleichung

$$|\chi^\nu_{x y_i}| \leqq \tau(n, K, M) \tag{18}$$

---

[7]) T. Ważewski, Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. Annales de la Soc. Polon. de Math. T. XIV (1935), S. 152.

[8]) Die Funktionen χ^ν sind sogar analytisch, weil F^ν und Ω^ν Polynome sind.

[9]) T. Ważewski, loc. cit. S. 169—170.

im Gebiet G erfüllt ist. Wegen (15), (17) und (18) sind die Folgen χ^ν und $\chi^\nu_{y_i}$ in G beschränkt und gleichgradig stetig. Daher enthalten sie gleichmäßig konvergente Teilfolgen χ^{α_ν}, $\chi^{\alpha_\nu}_{y_i}$. Bezeichnen wir den Grenzwert der Folge χ^{α_ν} mit χ, so ist auf Grund eines wohlbekannten Satzes

$$\chi^{\alpha_\nu} \to \chi, \quad \chi^{\alpha_\nu}_{y_i} \to \chi_{y_i} \quad \text{(gleichmäßig in } G\text{)}. \tag{19}$$

Mit Rücksicht auf (13) und wegen der gleichmäßigen Konvergenz $F^\nu \to F$ in dem Würfel (10) folgern wir daraus, daß auch

$$\chi^{\alpha_\nu}_x \to \chi_x \quad \text{(gleichmäßig in } G\text{)}. \tag{20}$$

Auf Grund von (13) erhalten wir daher durch einen Übergang zur Grenze

$$\chi_x \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, \chi, \chi_{v_1}, \ldots, \chi_{v_n}) \quad \text{(im Gebiet } G\text{)}.$$

Die Funktion χ besitzt selbstverständlich stetige partielle Ableitungen nach $x, y_1, \ldots, y_n$ in G. Da $\Omega^\nu \to \omega$ gleichmäßig in dem Würfel (12) ist, so folgt auf Grund von (14), daß in dem Würfel (9) die Gleichung

$$\chi(x^0, y_1, \ldots, y_n) \equiv \omega(y_1, \ldots, y_n)$$

identisch erfüllt ist. — Unser Satz ist damit bewiesen.

Anmerkung 1. Wegen der Ungleichungen (15), (17) und (16) erhalten wir folgende in G gültige Ungleichungen

$$|\chi - z_0| \leqq \tfrac{3}{4}K; \ |\chi_{y_i} - q_i^0| \leqq \tfrac{3}{4}K, \ |\chi_x| \leqq M.$$

Anmerkung 2. Das Integral χ ist das einzige in G vorhandene Integral der Gleichung (8), welches für $x = x^0$ mit ω identisch ist. Dies folgt aus einem Satz von Haar[10]).

Anmerkung 3. Es ist

$$\chi^\nu \to \chi, \quad \chi^\nu_x \to \chi_x, \quad \chi^\nu_y \to \chi_y \quad \text{(gleichmäßig in } G\text{)}. \tag{21}$$

Eine analoge Eigenschaft ist für die Teilfolgen χ^ν, $\chi^{\alpha_\nu}_x$, $\chi^{\alpha_\nu}_y$ bewiesen (s. (19) und (20)). Wäre die Beziehung (21) falsch, so könnte man, indem man dieselbe Beweisführung wie vorher anwendet, aus der Folge χ^ν eine Teilfolge χ^{β_ν} bilden, die gegen ein von χ verschiedenes und dennoch für $x = x^0$ mit ω identisches Integral der Gleichung (8) konvergiert. Dies ist aber unmöglich nach der Anmerkung 2.

Anmerkung 4. Die Integrale χ^ν sind bekanntlich durch die Charakteristiken gebildet[11]). Daraus folgt nun leicht[12]), daß das Integral χ auch durch Charakteristiken gebildet ist.

---

[10]) A. Haar, Zur Charakteristikentheorie, Acta Lit. ac Scient. Univ. Szeged, T. IV (1928), S. 103. Vgl. auch T. Ważewski. Sur l'unicité etc., Rendiconti Lincei, T. XVIII (1933), S. 372.

[11]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 351.

[12]) Ebenda S. 149. Es ist zu beachten, daß durch jedes Flächenelement höchstens ein charakteristischer Streifen der Gleichung (8) geht.

Anmerkung 5. Aus der Ungleichung (15) folgt, daß die Ableitungen $\chi^{\nu}_{y_i}$ in G die Lipschitz-Bedingung in bezug auf die Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ mit der Konstanten σ_2 erfüllen. Durch Übergang zur Grenze folgt daraus, daß auch die Ableitungen χ_{y_i} in G die Lipschitz-Bedingung in bezug auf dieselben Veränderlichen mit derselben Konstanten erfüllen. Daraus folgt wiederum, daß die Ableitungen $\chi_{y_i y_j}$ fast überall in G existieren[13]) und die Ungleichungen

$$|\chi_{y_i y_j}| \leqq \sigma_2 (n, K, M)$$

erfüllen. Mit Rücksicht auf (18) und auf

$$\chi^{\nu}_{x y_i} \equiv \chi^{\nu}_{y_i x}{}^{8})$$

folgern wir analog, daß χ_x in G die Lipschitz-Bedingung in bezug auf $y_1, \ldots, y_n$ mit der Konstanten τ und daß χ_{y_i} die Lipschitz-Bedingung in bezug auf x mit derselben Konstanten erfüllt. Fast überall in G gilt noch

$$|\chi_{x y_i}|, \quad |\chi_{y_i x}| \leqq \tau (n, K, M).$$

Würden wir in dem Satz 1 noch voraussetzen, daß f in dem Würfel (3) auch die Lipschitz-Bedingung in bezug auf x erfüllt, so können wir leicht beweisen, daß χ_x in G die Lipschitz-Bedingung in bezug auf x erfüllt und daß daher χ_{xx} fast überall in G existiert.

Beispiel 1. Setzen wir voraus, daß $\omega (y)$ eine stetige Ableitung $\omega' (y)$ in der Umgebung von $y = 0$ besitzt, so ist für die Existenz eines Integrals $\chi (x, y)$ der Gleichung

$$p = q^2, \tag{22}$$

welches 1. in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ existiert, 2. die Gleichung $z (0, y) \equiv \omega (y)$ identisch erfüllt und 3. durch die charakteristischen Streifen gebildet ist, notwendig und hinreichend, daß die Ableitung $\omega' (y)$ die Lipschitz-Bedingung in der Umgebung von $y = 0$ erfüllt. Auf Grund des Satzes 1 genügt es, zu zeigen, daß diese Bedingung notwendig ist. Setzen wir, um dieses indirekt zu beweisen, voraus, daß 4. $\omega' (y)$ in der Umgebung von $y = 0$ stetig ist, der Lipschitz-Bedingung aber in keiner Umgebung von $y = 0$ genügt, sowie, daß ein Integral $\chi (x, y)$ existiert, welches die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt. Auf Grund des ersten Teiles der Voraussetzung 4. existieren zwei Zahlenfolgen $\eta_\nu, \bar{\eta}_\nu$, für welche

$$\eta_\nu \to 0, \ \bar{\eta}_\nu \to 0, \ \eta_\nu \neq \bar{\eta}_\nu, \ \omega' (\eta_\nu) \neq \omega' (\bar{\eta}_\nu), \ \left| \frac{\omega' (\bar{\eta}_\nu) - \omega' (\eta_\nu)}{\bar{\eta}_\nu - \eta_\nu} \right| \to + \infty. \tag{23}$$

Es sei $C (\eta)$ der charakteristische Streifen, der durch das Flächenelement

$$x = 0, \quad y = \eta, \quad z = \omega (\eta), \quad q = \omega' (\eta) \tag{24}$$

---

[13]) Siehe z. B. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen S. 589.

geht, und

$$y = \overline{y}(x, \eta), \quad z = \bar{z}(x, \eta), \quad q = \bar{q}(x, \eta) \tag{25}$$

die Gleichung dieses Streifens. Wir haben

$$\overline{y}(x, \eta) \equiv \eta - 2\,\omega'(\eta)\,x.$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß in einer gewissen Umgebung von $x = 0$, $\eta = 0$ die folgenden Gleichungen

$$\chi(x, \overline{y}(x, \eta)) \equiv \bar{z}(x, \eta), \quad \chi_y(x, \overline{y}(x, \eta)) \equiv \bar{q}(x, \eta) \tag{26}$$

identisch erfüllt sind. Für

$$x_\nu = \frac{\bar{\eta}_\nu - \eta_\nu}{2\,(\omega'(\bar{\eta}_\nu) - \omega'(\eta_\nu))}.$$

ist $x_\nu \to 0$ und $\overline{y}(x_\nu, \eta_\nu) = \overline{y}(x_\nu, \bar{\eta}_\nu)$. Wir haben daher wegen (26) für alle hinreichend großen ν

$$\bar{z}(x_\nu, \eta_\nu) = \bar{z}(x_\nu, \bar{\eta}_\nu), \quad \bar{q}(x_\nu, \eta_\nu) = \bar{q}(x_\nu, \bar{\eta}_\nu). \tag{27}$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt, daß die charakteristischen Streifen $C(\eta_\nu)$ und $C(\bar{\eta}_\nu)$ ein Flächenelement gemein haben, also — da es sich um die Gleichung (22) handelt — identisch sind. Dies ist aber unmöglich, weil $\overline{y}(0, \eta_\nu) \neq \overline{y}(0, \bar{\eta}_\nu)$.

Beispiel 2. Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$p = \varphi(q) \tag{28}$$

und setzen wir voraus, daß die Ableitung φ' in einer gewissen Umgebung von q^0 stetig ist und daß φ' in keiner Umgebung von q^0 die Lipschitz-Bedingung erfüllt[14]). Es folgt daraus die Existenz von zwei Zahlenfolgen η_ν, $\bar{\eta}_\nu$, für welche

$$\eta_\nu \to 0, \ \bar{\eta}_\nu \to 0, \ \eta_\nu \neq \bar{\eta}_\nu, \ 0 \neq \alpha_\nu = \frac{\varphi'(\bar{\eta}_\nu + q^0) - \varphi'(\eta_\nu + q^0)}{\bar{\eta}_\nu - \eta_\nu} \to \pm\infty.$$

Es sei, anders als im Beispiel 1,

$$\omega(y) = 0{,}5\,y^2 + q^0\,y + z^0. \tag{29}$$

Wir behaupten, daß es kein Integral $\chi(x, y)$ der Gleichung (28) gibt, welches 1. in gewisser Umgebung des Punktes (0, 0) existiert, 2. die Gleichung $\chi(0, y) \equiv \omega(y)$ identisch erfüllt und 3. durch charakteristische Streifen gebildet ist.

Um dieses indirekt zu beweisen, nehmen wir an, daß ein solches Integral $\chi(x, y)$ existiert. Bemerken wir, daß durch jedes Flächenelement höchstens

[14]) Nach Weierstraß gibt es eine in einer gewissen Umgebung von q^0 stetige und nirgends differenzierbare Funktion $\Phi(q)$, die daher in keiner Umgebung von q^0 die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Wir können $\varphi(q) = \int_{q_0}^{q} \Phi(t)\,dt + C$ annehmen. (Siehe z. B. Caratheodory, loc. cit. S. 590.)

ein charakteristischer Streifen der Gleichung (28) geht und bezeichnen wir mit $C(\eta)$ den einzigen charakteristischen Streifen, der durch das Flächenelement (24) (wobei $\omega(y)$ die neue Bedeutung (29) hat) geht. Die Gleichungen dieses Streifens werden die Gestalt (25) haben. Wir haben jetzt

$$\overline{y}(x, \eta) \equiv \eta - \varphi'(\eta + q^0)\, x.$$

Auch jetzt werden die Gleichungen (26) in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = 0$, $\eta = 0$ identisch erfüllt. Für $x_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ ist $x_\nu \to 0$ und $\overline{y}(x_\nu, \eta_\nu) = \overline{y}(x_\nu, \overline{\eta}_\nu)$. Auf genau dieselbe Weise wie im Beispiel 1 erhalten wir nun den Widerspruch, daß die Streifen $C(\eta_\nu)$ und $C(\overline{\eta}_\nu)$ identisch sein müßten.

Diese Beispiele zeigen, daß die für die Ableitungen f_{y_j}, f_z, f_{q_j} in bezug auf y_i, z, q_i und für die Ableitungen ω_{y_j} in bezug auf $y_1, \ldots, y_n$ vorausgesetzte Lipschitz-Bedingung für die Richtigkeit des Satzes 1 in gewissem Sinne wesentlich ist.

§ 2.

Wir wollen uns jetzt mit dem Existenzbeweis der Folgen F^ν und Ω^ν befassen, welcher wir uns in dem Beweis des Satzes 1 bedient haben.

I. Wir setzen voraus, daß $l > 0$ ist, und betrachten den Würfel

$$|u_\nu| \leqq l, \quad (\nu = 1, \ldots, n) \qquad \text{(Würfel } W(l)\text{)}.$$

Mit ψ^i bezeichnen wir das folgende Polynom des $2ni$-ten Grades

$$\psi^i(u_1, \ldots, u_n) = t_i \Big[\prod_{\nu=1}^{n} \Big(1 - \Big(\frac{u_\nu}{l}\Big)^2\Big)\Big]^i,$$

wobei die Konstanten t_i durch die Gleichung

$$\int_{W(l)} \psi^i(u)\, du = 1$$ [15])

bestimmt werden. Es sei $0 < s < l$. Die Polynome $\psi^i(u)$ und ihre partiellen Ableitungen jeder Ordnung konvergieren gleichmäßig gegen Null in dem durch die Ungleichungen

$$s \leqq |u_n|; \quad |u_\nu| \leqq l \quad (\nu = 1, \ldots, n) \qquad \text{(Bereich } E_n(s)\text{)}$$

bestimmten Bereich $E_n(s)$ [16]).

II. Mit A, B, C bezeichnen wir die Punktmengen, die durch folgende Bedingungen bestimmt sind

(A) $\quad a_\nu \leqq v_\nu \leqq b_\nu; \quad (\nu = 1, \ldots, n),$

(B) $\quad a_\nu - 2e \leqq v_\nu \leqq b_\nu + 2e, \quad (\nu = 1, \ldots, n),$

(C) $\quad a_\nu - 3e \leqq v_\nu \leqq b_\nu + 3e, \quad (\nu = 1, \ldots, n),$

---

[15]) Wir schreiben so kurz statt $\int_{-l}^{l} \ldots \int_{-l}^{l} \psi^i(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$.

[16]) De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, Tome II (deuxième édition), Louvain-Paris (1912), S. 126—135.

wobei

$$0 < b_\nu - a_\nu + 4e < l, \quad e > 0$$

sein soll. Es sei weiter $g(v_1, \ldots, v_n)$ eine in B stetige Funktion. Wir betrachten die Folge der Polynome

$$G^i(v) = \int_B g(w)\, \psi^i(w - v)\, dw\ ^{17}).$$

III. Es ist bekannt, daß gleichmäßig in (A)

$$G^i(v) \to g(v),$$

insbesondere also

$$\int_B \psi^i(w - v)\, dw \to 1 \tag{1}$$

gilt. Wenn außerdem die partielle Ableitung $g_{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_r}}$ stetig in B ist, so ist auch[18])

$$G^i_{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_r}}(v) \to g_{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_r}}(v) \qquad \text{(gleichmäßig in } A).$$

IV. Wir setzen jetzt voraus, daß die Funktion $h(v)$ in C stetig ist und daß sie dort in bezug auf eine Veränderliche v_j die Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten N erfüllt und betrachten die Polynome

$$H^i(v) = \int_B h(w)\, \psi^i(w - v)\, dw.$$

Wir behaupten, daß für jedes $\varepsilon > 0$ von einem Index i angefangen die Ungleichungen

$$|H^i_{v_j}(v)| = \left| \int_B h(w)\, \psi^i_{u_j}(w - v)\, dw \right| \leqq N + \varepsilon \tag{2}$$

in A erfüllt werden.

Es genügt natürlich, den Fall $j = n$ zu betrachten. Es sei

$$0 < \Delta < e. \tag{3}$$

Zur Abkürzung werde

$$\bar{v} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \Delta), \quad \bar{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n + \Delta)$$

gesetzt. Bezeichnen wir mit S und T die folgenden Mengen von Punkten $(u_1, \ldots, u_n)$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu - 2e - v_\nu \leqq u_\nu \leqq b_\nu + 2e - v_\nu, \quad (\nu = 1, \ldots, n-1) \\ a_n - 2e - v_n - \Delta \leqq u_n \leqq a_n - 2e - v_n, \end{aligned}\right\} (S)$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu - 2e - v_\nu \leqq u_\nu \leqq b_\nu + 2e - v_\nu, \quad (\nu = 1, \ldots, n-1) \\ b_n + 2e - v_n - \Delta \leqq u_n \leqq b_n + 2e - v_n, \end{aligned}\right\} (T)$$

---

[17]) Wir schreiben $\psi^i(w - v)$ statt $\psi^i(w_1 - v_1, \ldots, w_n - v_n)$.

[18]) De la Vallée Poussin, loc. cit.

so ist leicht zu zeigen, daß

$$H^i(\bar{v}) - H^i(v) = \Omega_1^i + \Omega_2^i + \Omega_3^i,$$

wo

$$\Omega_1^i = \int_B [h(\bar{w}) - h(w)]\, \psi^i(w - v)\, dw,$$

$$\Omega_2^i = \int_S h(u + \bar{v})\, \psi^i(u)\, du,$$

$$\Omega_3^i = -\int_T h(u + \bar{v})\, \psi^i(u)\, du.$$

Es sei $\eta > 0$. Es ist (s. (1)) von einem i an

$$|\Omega_1^i| \leqq N \Delta \int_B \psi^i(w - v)\, dw \leqq N \Delta (1 + \eta).$$

Da v ein veränderlicher Punkt in der Menge A ist, stellen wir leicht fest (s. (3)), daß für die Punkte der Mengen S und T die Ungleichung $|u_n| \geqq e > 0$ erfüllt ist. Die Mengen S und T sind daher in $E_n(e)$ enthalten, wo gleichmäßig $\psi^i(u) \to 0$. Wenn wir bemerken, daß die Volumina der Mengen S und T nicht größer als Δl^{n-1} sind, und wenn wir mit R das Maximum von $|h(v)|$ in der Menge C bezeichnen, dann erhalten wir für alle hinreichend hohen Indices i

$$|\Omega_2^i| \leqq \Delta l^{n-1} R\eta, \quad |\Omega_3^i| \leqq \Delta l^{n-1} R\eta.$$

Wir haben daher in A für alle hinreichend großen i

$$\left| \frac{H^i(\bar{v}) - H^i(v)}{\Delta} \right| \leqq N + (N + 2l^{n-1} R)\, \eta,$$

und daraus erhalten wir für $\Delta \to 0$

$$|H_{v_n}^i| \leqq N + (N + 2l^{n-1} R)\, \eta$$

und damit (2).

V. Sind die Funktion $g(v_1, \ldots, v_n)$ und ihre Ableitung g_{v_α} in C stetig und erfüllt g_{v_α} in bezug auf die Veränderliche v_j die Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten N in der Menge C, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ von einem gewissen i an in A die Ungleichung (vgl. II und III)

$$|G_{v_\alpha v_j}^i(v)| \leqq N + \varepsilon \tag{4}$$

erfüllt.

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, kann man annehmen, daß $\alpha = n$ ist. In der Menge A ist

$$G_{v_n}^i = -\int_B g(w)\, \psi_{u_n}^i(w - v)\, dw.$$

Durch partielle Integration nach w_n erhalten wir

$$G_{v_n}^i = \beta^i + \gamma^i + \delta^i, \tag{5}$$

wo

$$\beta^i = \int_B g_{v_n}(w)\,\psi^i(w-v)\,dw,$$

$$\gamma^i = -\int_{a_1-2e}^{b_1+2e} \cdots \int_{a_{n-1}-2e}^{b_{n-1}+2e} g(w_1, \ldots, w_{n-1}, b_n + 2e)$$
$$\psi_i(w_1 - v_1, \ldots, b_n + 2e - v_n)\,dw_1 \ldots dw_{n-1},$$

$$\delta^i = \int_{a_1-2e}^{b_1+2e} \cdots \int_{a_{n-1}-2e}^{b_{n-1}+2e} g(w_1, \ldots, w_{n-1}, a_n - 2e)$$
$$\psi^i(w_1 - v_1, \ldots, a_n - 2e - v_n)\,dw_1 \ldots dw_{n-1}$$

ist. Es sei η eine beliebige positive Zahl. Indem wir $h(v) = g_{v_n}(v)$ annehmen, erhalten wir auf Grund von (2) folgende, von einem gewissen i an in A geltende Ungleichung

$$|\beta^i_{v_j}| \leqq N + \eta.$$

Andererseits haben wir in A:

$$\gamma^i_{v_j} = -\int_{a_1-2e}^{b_1+2e} \cdots \int_{a_{n-1}-2e}^{b_{n-1}+2e} g(w_1, \ldots, w_{n-1}, b_n + 2e)$$
$$\psi^i_{u_j}(w_1 - v_1, \ldots, b_n + 2e - v_n)\,dw_1 \ldots dw_{n-1}.$$

Der Punkt $(w_1 - v_1, \ldots, w_{n-1} - v_{n-1},\ b_n + 2e - v_n)$, in welchem der Wert von $\psi^i_{u_j}$ unter dem Integralzeichen genommen ist, liegt in $E_n(e)$. Wir haben nämlich in A die Ungleichungen $a_\nu \leqq v_\nu \leqq b_\nu$ und daher

$$b_n + 2e - v_n \geqq 2e > e.$$

Ist ζ das Maximum von $|g|$ in C, so haben wir also für alle hinreichend großen i folgende in A geltende Ungleichung

$$|\gamma^i_{v_j}| \leqq \zeta l^{n-1}\eta \quad \text{und analog} \quad |\delta^i_{v_j}| \leqq \zeta l^{n-1}\eta.$$

Daraus, sowie aus (5) und (6) schließen wir, daß für alle hinreichend großen i die Ungleichung

$$|G^i_{v_n v_j}| \leqq N + (1 + 2\zeta l^{n-1})\eta$$

in A gilt. Damit ist (4) also bewiesen.

Es ist leicht zu ersehen, daß aus den Erwägungen dieses Paragraphen die Existenz der Folgen F^ν und Ω^ν, welcher wir uns in dem Beweis des Satzes I bedienten, folgt.

(Eingegangen am 7. Juni 1937.)

Über Existenz und Darstellung impliziter Funktionen bei singulären Anfangswerten.

Von

Hermann Schmidt in Jena.

Einleitung.

Es handelt sich im folgenden ständig um die Untersuchung von Nullgebilden analytischer Funktionen $f(x, y)$ zweier komplexer Veränderlicher im kleinen. Geht man, wie üblich, von einer *regulären* Stelle (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ aus, so gibt der Weierstraßsche Vorbereitungssatz zusammen mit dem Satz von den Puiseuxschen Entwicklungen erschöpfend Auskunft über die Nullstellen in der Nachbarschaft von (x_0, y_0). Wir fragen jedoch hier nach Lösungen $y = \varphi(x)$ von $f(x, y) = 0$, für die lediglich $y \to y_0$, wenn $x \to x_0$ in einem geeigneten (gegebenenfalls gewundenen) Gebiet mit dem Randpunkt x_0, während (x_0, y_0) ein *singulärer* Punkt von $f(x, y)$ sein darf („*singuläre Anfangswerte*"; wir sagen auch, das Nullgebilde (x, y) — oder auch: die Lösung $y = \varphi(x)$ — „*mündet*" im (singulären) Punkt (x_0, y_0)).

In § 1 wird insbesondere $f(x, y)$ als *Laurentsche Reihe* nach Potenzen von x, y angenommen, bei der $(0, 0)$ auf dem Rand des Gebiets absoluter Konvergenz liegt. Wir knüpfen hier an die Lettenmeyersche Methode der unendlichen Newtonschen Polygone an[1]) und geben hinreichende Bedingungen für die Existenz bei $x = 0$ algebroider Lösungen, die in $(0, 0)$ münden. Der Anfangs*exponent* wird durch eine Polygonseite, der Anfangs*koeffizient* durch eine (algebraische oder) *transzendente Gleichung* bestimmt[2]).

---

[1]) F. Lettenmeyer [6], [7]. Wir brauchen diese Arbeiten indes nur für die Gegenüberstellung[2]) heranzuziehen.

[2]) Herr Lettenmeyer betrachtet a. a. O. *abstrakte* Koeffizientenkörper, und demgemäß nur „*formale*" Lösungen. Dieser Begriff ist ziemlich eng; einerseits werden nämlich Polynome im gewöhnlichen Sinne als Lösungen ausgeschlossen, vielmehr ausschließlich Potenzreihen (nach steigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen, auch mit negativem Anfangsexponenten und allenfalls nur endlich vielen Koeffizienten $\neq 0$) zugelassen, andererseits ist im Koeffizientenkörper eine Addition unendlich vieler Nullen nicht erklärt. Dieses doppelte Verbot bewirkt, daß z. B. die Gleichung

$$0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^{-\nu}}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{-\nu}}{\nu!}$$

In § 2 geben wir in aller Kürze — auch unmittelbar begründbare — Anwendungen unseres Verfahrens auf Nullgebilde gewisser (Kummerscher und Gaußscher) *hypergeometrischer Reihen*, wobei das Argument und der negative reziproke Wert eines der Parameter die Rolle der Veränderlichen y, x spielen, ein anderer Parameter willkürlich, aber fest bleibt. Als Sonderfälle der erhaltenen Lösungsentwicklungen entstehen dann für $x = \frac{1}{n}$ (n ganz, > 0) für große n konvergente Potenzreihenentwicklungen für die Nullstellen kleinen Betrages der allgemeinen Laguerreschen (insbesondere Hermiteschen) *Polynome* — diese scheinen neu zu sein — bzw. die in der Nähe von 1 gelegenen Nullstellen der Legendreschen Polynome und ihrer Zugeordneten; hier ist eine im wesentlichen gleichwertige Entwicklung schon früher aufgestellt worden[10]).

In § 3 wird $f(x, y)$ als regulär angenommen, wenn x in einer *vollen Umgebung* von $x_0 = 0$, y aber nur in einem *Winkelraum* vom Scheitel $y_0 = 1$ variiert. Wir geben Bedingungen, die auf die Existenz einer Lösung schließen lassen, für die bei $x \to 0$, $y \to 1$ (beides in passenden Winkelräumen), insbesondere für den Fall, daß $f(x, y)$ im ganzen Dizylinder $|x| < \xi$, $|y| < 1$ regulär ist. (Satz 2, 3. Die Bedingungen enthalten stets $f(0, y) \to 0$ für $y \to 1$: $(0, 1)$ ist „Randnullstelle".) Die erhaltenen Lösungen gestatten für $x \to 0$ im Winkelraum asymptotische Darstellungen (bzw. Entwicklungen), die durch eine Art Koeffizientenvergleichung aus der Entwicklung von $f(x, y)$

($\equiv e^{\frac{1}{y}} - e^{\frac{1}{x}}$ bei analytischer Auffassung) keine Lösung hat (weder $y = x$, noch $y = x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots$ kommt in Frage!). Allgemein müssen für die Existenz einer Lösung *notwendige* Bedingungen bestehen ([7], S. 465, vgl. auch [6], S. 352, Fußnote [2]) [3]), die bei unserem *analytischen* Problem kein Gegenstück haben (daß nämlich a) der Anfangsexponent durch eine Polygonseite bestimmt sein muß, b) jede Gerade parallel dieser Seite nur endlich viele Gitterpunkte enthalten darf, so daß also insbesondere der Anfangskoeffizient aus einer *algebraischen* Gleichung entspringt); vgl. demgegenüber unsere viel beschränktere Vollständigkeitsaussage 4., S. 538. — Auf die *analytische Verwertung* seiner Ergebnisse verzichtet Herr Lettenmeyer völlig, doch scheint mir auch diese nicht ohne Interesse; man vergleiche etwa die Berechnung der formalen Lösungen von

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x^{\nu^2} y^{\nu} = 0 \qquad ([7],\ \text{S. } 468)$$

mit der bekannten Produktdarstellung von

$$\vartheta_3(v, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x^{\nu^2} y^{\nu} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - x^{2\nu})(1 + x^{2\nu-1} y)(1 + x^{2\nu-1} y^{-1})$$

$$(x = e^{\pi i \tau},\ y = e^{2\pi i v},\ |x| < 1,\ 0 < |y| < \infty).$$

Soweit unsere Reihen überhaupt formale Lösungen sind, geben unsere Betrachtungen nunmehr Aufschluß über die analytische Bedeutung der letzteren (konvergente oder — § 3 — asymptotische Darstellungen von Lösungen im Sinne der Analysis).

nach Potenzen von x hervorgehen. Als Hilfssätze werden hier eine — wohl neue — Verschärfung eines Satzes von W. B. Ford[12]) sowie ein früherer Satz des Verfassers[15]) über asymptotische Darstellung impliziter Funktionen herangezogen.

§ 1.

Algebroide Lösungen bei Unbestimmtheitsstellen von f (x, y).

Bezeichnungen. Wenn eine (formale) Laurentreihe in zwei Veränderlichen

$$\sum_{\nu,\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda}\, x^\nu\, y^\lambda \tag{1}$$

vorliegt, so bezeichnen wir als das zugehörige *Gitter* Γ die Gesamtheit der Punkte mit den (rechtwinkeligen) Koordinaten (λ, ν), für die $a_{\nu\lambda} \neq 0$; hierbei denken wir uns die positive λ-Achse nach links, die positive ν-Achse nach oben gerichtet[3]). *Stützgerade* (bzw. *Stützsehne*) von Γ heiße jede Gerade, die mindestens *einen* (bzw. mindestens *zwei*) Gitterpunkte enthält, während auf einer Seite derselben gar kein Punkt von Γ gelegen ist. Liegen insbesondere *unterhalb* einer (nicht zur ν-Achse parallelen) Stützgeraden (-sehne) keine Gitterpunkte, so heiße sie eine *untere* Stützgerade (-sehne). Als *Newtonsches Polygon II* zu Γ bezeichnen wir die (höchstens abzählbare) Menge aller (etwa vorhandenen) unteren Stützsehnen.

Satz 1. *Vorgelegt sei die Laurentreihe* (1) *mit komplexen* $a_{\nu\lambda}$ *und dem Gitter* Γ; *es gebe*

1. *eine untere Stützsehne* $\mathfrak{s}_0$ *mit der Gleichung* $\nu + \lambda\alpha_0 = \gamma_0$ $(\alpha_0 > 0)$,

2. *zwei Punkte* (x_0, y_1), (x_0, y_2) *mit* $x_0 \neq 0$, $0 < |y_1| < |y_2|$, *für die* $a_{\nu\lambda}\, x_0^\nu\, y_q^\lambda = O(1)$ $(-\infty < \nu, \lambda < +\infty)$.

Dann hat (1) *ein Gebiet absoluter Konvergenz, und dieses ist von der Gestalt*

$$\mathfrak{G}: \quad 0 < |x| < \Delta, \quad \psi_1(|x|) < |y| < \psi_2(|x|), \quad \lim_{|x| \to 0} \psi_1(|x|) = 0;^{3a})$$

ferner ist die Funktion

$$g_0(w) = \sum_{(\lambda,\nu) \in \mathfrak{s}_0} a_{\nu\lambda}\, w^\lambda$$

in einem gewissen Ringgebiet $\mathfrak{R}$: $(0 \leqq) R_1 < |w| < R_2 (\leqq \infty)$ *regulär. Besitzt dann*

3. $g_0(w)$ *in* $\mathfrak{R}$ *eine m-fache Nullstelle* w_0 $(m \geqq 1)$, *so hat die Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \sum_{\nu,\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda}\, x^\nu\, y^\lambda = 0$$

---

[3]) Alsdann ist bei Spezialisierung zu einem Polynom in y das Gitter (abgesehen von einer Parallelverschiebung) genau so angelegt, wie bei Ostrowski [12] (woselbst ein besonders einfacher Beweis des Puiseuxschen Satzes).

[3a]) Fehlen negative Potenzen einer Veränderlichen, so ist jeweils $\leqq$ statt des ersten $<$-Zeichens zu setzen.

$s\,(\leqq m)$ *verschiedene, bei* $x = 0$ *algebroide Lösungselemente* $y = x^{\alpha_0}\,\mathfrak{P}_j\,(x^{\frac{1}{k\,m_j}})$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, *wobei* $\alpha_0 = \frac{h}{k}$, $(h, k) = 1$, $\sum_{j=1}^{s} m_j \leqq m$, *und die Reihen für* $0 < |x| < \Delta' \leqq \Delta$ *konvergieren,* $\mathfrak{P}_j(0) = w_0$ *und* $(x, y) \in \mathfrak{G}$ *ist.*

Beweis. $\mathfrak{s}_0$ enthalte die beiden verschiedenen Gitterpunkte (λ_q, ν_q) $(q = 1, 2)$, so daß $\nu_q + \alpha_0 \lambda_q = \gamma_0$, $\alpha_0 = -\frac{\nu_2 - \nu_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{h}{k}$ $(h, k > 0, (h, k) = 1)$, und γ_0 von der Form $\frac{g}{k}$ wird $(g \geqq 0$, ganz). Setzt man nun in (1)

$$x = z^k, \quad y = z^h w, \tag{2}$$

so geht die Reihe zunächst formal über in

$$\sum_{\nu,\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda}\, z^{k\nu + h\lambda}\, w^{\lambda} = z^{g} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} b_{\nu\lambda}\, z^{\nu}\, w^{\lambda}, \tag{3}$$

da ja $\nu + \lambda\,\alpha_0$, wenn (λ, ν) auf Γ variiert, das Minimum γ_0 hat. Hierbei ist

$$\begin{aligned} b_{\nu\lambda} &= a_{\frac{\nu - h\lambda + g}{k},\,\lambda} \quad \text{für} \quad \nu \equiv h\lambda - g \;\; (k) \\ &= 0 \qquad\qquad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{4}$$

Nun gibt Vor. 2. wegen (2) und (4) zwei Punkte (z_0, w_q) mit $z_0 \neq 0$, $0 < |w_1| < |w_2|$, für die $b_{\nu\lambda}\, z^{\nu}\, w^{\lambda} = O(1)$. Das (genaue) Gebiet absoluter Konvergenz für die Doppelreihe rechts in (3) ist daher durch Ungleichungen folgender Art zu beschreiben[4]):

$$\begin{gathered} (0 \leqq)\; R_1 < |w| = r < R_2 \;(\leqq \infty) \quad {}^{3a}) \\ 0 \leqq |z| < \varrho\,(r), \end{gathered} \tag{5}$$

wo für $R_1 < r < R_2$ entweder $\varrho\,(r) \equiv \infty$, oder aber $\lg \frac{1}{\varrho\,(r)}$ eine (endliche) stetige, konvexe Funktion von $\lg r$ ist. Das Gebiet (5) kann daher (bei Vertauschung der Anordnung der Veränderlichen) auch so gegeben werden:

$$\begin{gathered} |z| = \varrho < \mathsf{P} \;(\leqq \infty) \\ (R_1 \leqq)\; r_1(\varrho) < |w| < r_2(\varrho)\;(\leqq R_2)\;{}^{3a}); \end{gathered} \tag{6}$$

$r_1(\varrho)$, $r_2(\varrho)$ sind dabei stetig und es gilt für $\varrho \to +0$

$$r_1(\varrho) \downarrow R_1,\; r_2(\varrho) \uparrow R_2$$

(monoton im weiteren Sinne).

Daraus folgt weiter, daß

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} b_{0\lambda}\, w^{\lambda} \quad \text{in} \quad \{R_1 < |w| < R_2\} = \mathfrak{R}$$

konvergiert, und daß (1) das Gebiet absoluter Konvergenz

$$\begin{gathered} 0 < |x| = \varrho^k < \Delta = \mathsf{P}^k \\ \varrho^h\, r_1(\varrho) < |y| < \varrho^h\, r_2(\varrho) \;{}^{3a}) \end{gathered} \tag{7}$$

besitzt; damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

---

[4]) Vgl. Nakano [10], S. 136ff., woselbst x statt w, y statt z geschrieben ist.

Sei nun $g_0(w_0) = 0$, $R_1 < |w_0| < R_2$. Mit Rücksicht auf (6) ergibt der Weierstraßsche Vorbereitungssatz die Existenz zweier positiver Zahlen δ, ε derart, daß mit $w - w_0 = v$

$$F(w, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} b_{\nu\lambda} z^\nu w^\lambda = P(v, z) E(v, z) \tag{8}$$

in $\{|z| < \delta, \ |v| < \varepsilon\}$; dabei ist $E(v, z)$ dort regulär und $\neq 0$, $P(v, z) = v^m + \mathfrak{Q}_1(z) v^{m-1} + \ldots + \mathfrak{Q}_m(z)$, $\mathfrak{Q}_l(z)$ Potenzreihen, $\mathfrak{Q}_l(0) = 0$. Hieraus folgt nun nach dem Satz von den Puiseuxschen Entwicklungen zunächst die Existenz folgender Lösungen von $F(w, z) = 0$:

$$w = \mathfrak{P}_j\left(z^{\frac{1}{m_j}}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, s, \ 0 < |z| < \delta' \leqq \delta, \ \mathfrak{P}_j(0) = w_0),$$

$$m - \sum_{j=1}^{s} m_j = \operatorname*{Grad}_v \left(P(v, z), \ P'_v(v, z)\right) \geqq 0.$$

Die Gebilde (z, w) liegen in (6), schließlich gilt also mit

$$y = x^{\alpha_0} \mathfrak{P}_j\left(x^{\frac{1}{k m_j}}\right)$$

in

$$0 < |x| < \Delta' = \delta'^{\,k}: \ (x, y) \in \mathfrak{G}, f(x, y) = 0,$$

w. z. b. w.

Zusätze. 1. (Spezielles Gebiet.) Ist von vornherein

$$f(x, y) = \sum_{\nu, \lambda=-\infty}^{+\infty} a_{\nu\lambda} x^\nu y^\lambda$$

in einem „Dizylinder ohne Achsen“ $0 < |x| < \delta_1$, $0 < |y| < \delta_2$ regulär, so wird wegen (7) $r_1(\varrho) = 0$ für $\varrho^k < \delta_1$, $r_2(\varrho) \geqq \delta_2 \varrho^{-h}$, also nach (6) $R_1 = 0$, $R_2 = \infty$. Jede Wurzel $w_0 \neq 0$ von $g_0(w) = 0$ ist alsdann brauchbar. Im allgemeinen kann aber natürlich sehr wohl $g_0(w)$ über das Ringgebiet $\mathfrak{R}$ hinaus regulär sein, ohne daß aber für etwaige außerhalb oder auf dem Rande gelegene Nullstellen der Satz etwas aussagte.

2. (Weitere Lösungen.) Um alle für Satz 1 in Frage kommenden α_0, w_0 zu finden, hat man alle von links nach rechts ansteigenden Seiten von Π zu betrachten, und zu jeder einer solchen zugeordneten Funktion $g_0(w)$ alle jeweils in dem betreffenden $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\alpha_0}$, gelegenen Nullstellen zu suchen. Es kann offenbar unendlich viele solche Polygonseiten geben, aber höchstens zwei mit nicht rationalem $g_0(w)$, aus denen dann gegebenenfalls unendlich viele Lösungen zum gleichen Anfangsexponenten entspringen[5]). Der Kon-

[5]) Beispiel: $\sin\frac{y^2}{x} - a \sin\frac{x^2}{y} = 0$ $(a \neq 0)$ mit den unendlich vielen Lösungen

$$y = \sqrt{n\pi}\, x^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}\left(x^{\frac{3}{2}}\right), \quad y = \frac{x^2}{n\pi} \mathfrak{P}(x^3), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots, |x| < \delta_n)$$

$$y = e^{\frac{2n\pi i}{3}} a^{\frac{1}{3}} x \, \mathfrak{P}(x) \qquad (n = 0, 1, 2; \ |x| < \delta)$$

$\mathfrak{P}(x)$ Potenzreihen, $\mathfrak{P}(0) = 1$.

Nur die letzten drei Reihen sind zugleich formale Lösungen im Sinne von 3.

vergenzradius kann den unteren Limes Null haben, vgl. die Fälle des § 2, S. 541. Hat Π eine horizontale Seite ($\alpha_0 = 0$), und ist Vor. 2. 3. erfüllt, so wird $x^{-\gamma_0} f(x, y)$ bei $x = 0, y = w_0$ regulär. Die betreffenden Lösungen sind für Satz 1 unbeachtet geblieben, da sie nicht in den uns hier interessierenden (singulären) Punkt $(0, 0)$ münden. — Sind nach Ausführung einer *Transformation* $y = 1/\tilde{y}$ die Voraussetzungen erfüllt, so erhält man Lösungen mit *negativem* Anfangsexponenten, ebenfalls für die Umgebung von $x = 0$. Dabei wird Γ an der ν-Achse gespiegelt, so daß man auch die von links nach rechts *fallenden* Seiten des alten Π betrachten kann. Endlich liefert $x = 1/\tilde{x}$ allenfallsige Entwicklungen bei $x = \infty$ (das alte Π habe eine obere Stützsehne!).

3. (Formale Lösungen.) Sind alle $g_\nu(w) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} b_{\nu\lambda} w^\lambda$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ Polynome in w und w^{-1}, so ist die betreffende Lösungsreihe zugleich eine formale Lösung im Sinne von Lettenmeyer [6], [7]. Eine solche definiert also gewiß eine Lösung im Sinne des Analysis, wenn der Anfangskoeffizient dem Ringgebiet $\mathfrak{R}_2$ angehört.

4. (Vollständigkeit.) Unter den Vor. 1., 2. von Satz 1 sei $\mathsf{A}_1 = \underline{\text{fin}}\,\alpha$, $\mathsf{A}_2 = \overline{\text{fin}}\,\alpha$, wo $-\alpha$ die Menge der Richtungsfaktoren aller unteren, von links nach rechts ansteigenden Stütz*geraden* durchläuft. Dann liefert das Verfahren *jede* bei $x = 0$ algebroide Lösung von $f(x, y) = 0$: $y = x^\alpha w(x) = x^\alpha c_0 + \ldots (c_0 \neq 0)$, *für die* $\mathsf{A}_1 \leqq \alpha \leqq \mathsf{A}_2$ *und für die in* $0 < |x| < \delta_0$ (x, y) *im absoluten Konvergenzgebiet* $\mathfrak{G}$ *verbleibt*[6]). Zum Nachweis genügt es zu zeigen, daß $\alpha =$ einem α_0, $c_0 =$ einem w_0 sein muß ($\nu + \alpha_0 \lambda = \gamma_0$ untere Stützsehne; $g_0(w_0) = 0$, $w_0 \in \mathfrak{R}_{\alpha_0}$), da dann eine Identität (8) besteht. Nun wird

$$(9) \qquad f(x, x^\alpha w) = x^\gamma \Big\{ \sum_{\nu+\alpha\lambda=\gamma} a_{\nu\lambda} w^\lambda + \sum_{\nu+\alpha\lambda>\gamma} a_{\nu\lambda} x^{\nu+\alpha\lambda-\gamma} w^\lambda \Big\},$$

wo γ das auch jetzt sicher vorhandene $\min_{(\lambda,\nu)\in\Gamma}(\nu + \alpha\lambda)$ bedeutet. Da nun $w(x)$ entweder $\equiv c_0$ ist, oder aber in jeder (unter Umständen gewundenen) Umgebung von $x = 0$ alle Werte einer vollen Umgebung von c_0 annimmt, dabei

---

[6]) Die etwaige analytische Fortsetzung von f über $\mathfrak{G}$ hinaus bleibt also außer Betracht, sonst kann es in der Tat noch andere Lösungen zum Exponenten α geben: sei etwa $f(x, y)$ für $0 < |y| < |x|$ durch $1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{y}{x}\right)^\nu$ erklärt, dann analytisch fortgesetzt $\left(= \frac{x-y}{x+y}$ für $x + y \neq 0\right) \cdot f = 0$ hat für $0 < |x|$ die Lösung $y = x$, die aber für keine Umgebung von $x = 0$ in $\mathfrak{G}$ verbleibt, und in der Tat unserem Verfahren entgeht, obwohl die Polygonseite $\nu + \lambda = 0$ vorhanden ist: der Anfangskoeffizient liegt auf dem Rande von $\mathfrak{R} = \{0 < |w| < 1\}$.

aber für $x \neq 0$ $(x, x^\alpha w(x)) \in \mathfrak{G}$ sein soll, so muß c_0 *innerer* Punkt des zu α entsprechend wie in (5) gehörigen Ringgebiets $\mathfrak{R}_\alpha$ sein; ferner ist $\sum_{\nu+\alpha\lambda=\gamma} a_{\nu\lambda} c_0^\lambda = 0$, d. h. wegen $c_0 \neq 0$: $\alpha = \alpha_0$ entspringt einer unteren Stütz*sehne*.

Man erkennt leicht noch folgendes: Sei $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ eine Folge von Nullstellen mit $R_1^* < \overline{\lim} |y_n x_n^{-\alpha}| < R_2$ für ein α aus $\mathsf{A}_1 \leqq \alpha \leqq \mathsf{A}_2$, $R_\varrho = R_\varrho(\alpha)$ wie soeben. Dann folgt: $\alpha =$ einem α_0, $\lim_{\varkappa\to\infty} w_{n_\varkappa} =$ einem w_0 für jede konvergente Teilfolge $w_{n_\varkappa} = y_{n_\varkappa} x_{n_\varkappa}^{-\alpha}$; ferner wird für $n > n^*$ y_n durch eine der zu α_0 und den jetzt nur endlich vielen Werten w_0 gehörigen Puiseuxreihen geliefert (nicht notwendig durch die nämliche für jedes n). Beweis auf Grund von (9), (8).

Bemerkung. Es kann bei $x = 0$ algebroide, in $(0, 0)$ mündende Lösungen geben, ohne daß überhaupt eine untere Stützsehne von Γ vorhanden ist, vgl. das 1. Beispiel in [2]). — Es kann zu einem dem Polygon entspringenden α_0 eine in einem Winkelraum vom Scheitel 0 reguläre, aber bei $x = 0$ *nicht algebroide* Lösung geben, für die bei $x \to 0$

$$y = x^{\alpha_0}(c_0 + o(1)),$$

vgl. das Beispiel § 3, S. 549.

§ 2.

Nullgebilde hypergeometrischer Reihen, Nullstellen hypergeometrischer Polynome.

Wir beginnen mit einer Hilfsformel, die später die Rechnungen erleichtert, und deren (der elementaren Differenzenrechnung angehörigen) Beweis wir unterdrücken.

Man setze für ganze positive p, n

$$\prod_{\varkappa=1}^{n-1} (1 + \varkappa^p x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_{n\nu}^{(p)} x^\nu.$$

Dann gilt für $\nu \geqq 1$

$$(10) \quad s_{n\nu}^{(p)} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu p} d_{\nu\varkappa}^{(p)} \binom{n}{\nu+\varkappa}, \qquad \frac{d_{\nu\varkappa}^{(p)}}{\nu+\varkappa-1} \text{ ganz, } > 0, \text{ unabhängig von } n^7).$$

Die $d_{\nu\varkappa}^{(p)}$ bestimmen sich dabei aus

$$d_{1\varkappa}^{(p)} = \Delta^\varkappa x^p|_{x=0} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq p)$$

und der Rekursionsformel

$$(11) \quad d_{\nu\varkappa}^{(p)} = \sum_{q=0}^{p} \Delta^q x^p|_{x=\nu+\varkappa-q-1} \cdot \binom{\nu+q-1}{q} \cdot d_{\nu-1,\varkappa-q}^{(p)}, \qquad (\nu \geqq 2)$$

[7]) Für $p = 1$ erhält man die sogenannte Stirlingschen Zahlen 1. Art, vgl. Nielsen [11], S. 67 (4), S. 74 (15).

wobei noch $d_{\nu\varkappa}^{(p)} = 0$ gesetzt wird für $\varkappa < 1$ und $\varkappa > \nu p$. Zur späteren Verwendung schreiben wir (10) noch in der Gestalt

$$(10') \qquad s_{n\nu}^{(p)} = \sum_{\varkappa=0}^{\nu p} \binom{n-1}{\nu+\varkappa} (d_{\nu\varkappa} + d_{\nu,\varkappa+1}).$$

Wir merken ferner an, daß

$$(12) \qquad \sum_{\lambda=l}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-l} w^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,(\lambda-l)!} = w^{\frac{l-\alpha}{2}} J_{\alpha+l}(2\sqrt{w}) \qquad (-\pi < \arg w \leqq \pi);$$

hier bedeutet $J_{\sigma}(u)$ die Besselsche Funktion 1. Art vom Parameter σ, der beliebig komplex sein darf, wenn, wie stets im folgenden, für $m = 0, 1, 2, \ldots$ $1/\Gamma(-m)$ durch Null ersetzt wird.

Wir benützen die Pochhammersche Bezeichnung ${}_pF_q$ für hypergeometrische Reihen mit p Zähler-, q Nennerparametern, sowie die Abkürzung $(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $(\alpha, 0) = 1$.

Für $p = q = 1$ geht die *Kummersche Reihe* hervor; wir setzen

$$f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1\Big(-\frac{1}{x},\ \alpha+1,\ y\Big) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Big(-\frac{1}{x},\ \lambda\Big) y^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\lambda!}$$

(α beliebig komplex — für $\alpha = -m-1 < 0$, ganz ist das mittlere Glied durch das letzte zu erklären —, $0 < |x| < \infty$, $|y| < \infty$). Für $x = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ erhält man insbesondere

$$f\Big(\frac{1}{n}, y\Big) = (-1)^n \frac{L_n(y, \alpha)}{\Gamma(\alpha+n+1)},$$

wenn $L_n(y, \alpha)$ das n-te Kummersche (verallgemeinerte Laguerresche) *Polynom* vom Parameter α bedeutet $\Big(f\Big(\frac{1}{n}, y\Big) \equiv 0$ für $\alpha = -m-1$, $n \leqq m$; auf die Definition von $L_n(y, \alpha)$ für diesen Fall brauchen wir nicht einzugehen, da uns später bei festem α nur kleine Werte von $|x|$ interessieren$\Big)$. — Aus der absoluten Konvergenz der durch Einsetzen von $|x|$, $|y|$, $|\Gamma(\alpha+\lambda+1)|$ für $-x, y, \Gamma(\alpha+\lambda+1)$ (in den Gliedern $\neq 0$) entstehenden Reihe sieht man sofort die Zulässigkeit der Umgestaltung in eine Laurentreihe durch Ausmultiplizieren von $\Big(-\frac{1}{x}, \lambda\Big)$ und dementsprechende Aufspaltung der Reihenglieder. Die Laurentreihe konvergiert absolut für $0 < |x| < \infty$, $|y| < \infty$, $\nu + \lambda = 0$ ist Polygonseite (§ 1, Satz 1), und es wird

$$(13) \qquad f(x, xw)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1\cdot(1-x)\ldots(1-(\lambda-1)x)\,(-1)^{\lambda} w^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\lambda!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} g_{\nu}(w)$$

eine ganze Funktion von x, w. Dabei ist nach (12)

$$g_0(w) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda w^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\lambda!} = w^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{w}),$$

und nach (10) und (12) für $\nu \geqq 1$

$$(14) \qquad g_\nu(w) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda\nu}^{(1)}(-1)^{\nu+\lambda} w^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\lambda!}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{a_{\nu\varkappa}^{(1)}}{(\nu+\varkappa)!} \sum_{\lambda=\nu+\varkappa}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\lambda} w^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,(\lambda-\nu-\varkappa)!}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\nu} (-1)^\varkappa \frac{a_{\nu\varkappa}^{(1)}}{(\nu+\varkappa)!} w^{\frac{\nu+\varkappa-\alpha}{2}} J_{\alpha+\nu+\varkappa}(2\sqrt{w}).$$

Es seien jetzt μ_j^2 $(j = 1, 2, \ldots)$ die sämtlichen voneinander und von Null verschiedenen Nullstellenquadrate der Funktion $J_\alpha(\mu)$. Dann erhält man die unendlich vielen Lösungen von $f(x, y) = 0$ (unter denen keine zwei identisch sind):

$$(15) \qquad y = \varphi_j(x) = \frac{\mu_j^2}{4} x - \frac{\mu_j^2}{8}(\alpha+1) x^2$$

$$+ \frac{\mu_j^2}{96}\left((\alpha+1)(7\alpha+5) + \frac{\mu_j^2}{2}\right) x^3 + \ldots \qquad (|x| < \delta_j).$$

Zur Berechnung der angeschriebenen Glieder sind dabei die Werte (11), (14) für $\nu \leqq 2$ benützt. Wir bemerken, daß der *Konvergenzradius* für $j \to \infty$ notwendig *gegen Null* geht. Andernfalls gäbe es nämlich zu geeignetem $\delta > 0$ eine Indexfolge $j_\varkappa \to \infty$, für die $\varphi_{j_\varkappa}(x)$ in $|x| < \delta$ regulär wäre. Sei dann n ganz, $> \frac{1}{\delta}$ (und $> m$ für $\alpha = -m-1$). Für $x = \frac{1}{n}$ entsteht ein Widerspruch; denn das Polynom $f\left(\frac{1}{n}, y\right)$ hat ja nur n Nullstellen, also hat $f(x, y)$ auch nur endlich viele verschiedene, bei $x = \frac{1}{n}$ reguläre Auflösungselemente, während die Entwicklungen der $\varphi_{j_\varkappa}(x)$ nach Potenzen von $x - \frac{1}{n}$ ja sämtlich voneinander verschieden ausfallen würden.

Wählt man dagegen jetzt k fest, und so, daß $|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$, dann konvergieren alle Reihen (15) mit $1 \leqq j \leqq k$ für $|x| < \varepsilon_k$, und sie stellen für geeignetes $\varepsilon_k' \leqq \varepsilon_k$ in $0 < |x| < \varepsilon_k'$ die *k Nullstellen kleinsten positiven Betrages* dar, genauer: ist in $0 < |x| < \varepsilon_k'$ jedem x *auf irgend eine Weise* eine Lösung $y = \Phi(x)$ zugeordnet, für die stets $|\Phi(x)| \leqq$ einem $|\varphi_j(x)|$ $(1 \leqq j = j(x) \leqq k)$, so ist $\Phi(x)$ für jedes x mit einem der $\varphi_j(x)$ identisch. Gäbe es nämlich kein solches ε_k', so wäre eine Folge von Nullstellen $(x_\varkappa, y_\varkappa) \to (0, 0)$ vorhanden, für die $|y_\varkappa| \leqq$ einem $|\varphi_{j_\varkappa}(x_\varkappa)|$, aber $y_\varkappa \neq \varphi_j(x_\varkappa)$ $(j = 1, 2, \ldots k)$.

Dann wäre $\overline{\lim}\,|y_\varkappa x_\varkappa^{-1}| < |\mu_{k+1}|^2$, andererseits aber $\underline{\lim}\,|y_\varkappa x_\varkappa^{-1}| > 0$ (wie sofort aus (13), auch für $\alpha = -m-1$, wo die Reihe mit $w^{m+1}(A_{m+1} + o(1))$ beginnt, $A_{m+1} \neq 0$), nach S. 539, 4., Ende wäre also doch schließlich $y_\varkappa =$ einem $\varphi_{i_\varkappa}(x)$, gegen die Annahme. — Insbesondere liefert also (15) für $x = \frac{1}{n}$, $n > N_k$ konvergente Potenzreihen für die k *Nullstellen* kleinsten Betrages *der Polynome* $L_n(y, \alpha)$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe für $f(x, xw)$ bei x, w beschränkt (13) die asymptotische Darstellung enthält

$$(16) \qquad f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{l-1} x^\nu g_\nu\left(\frac{y}{x}\right) + O(x^l) \quad \text{für} \quad x \to 0,\ \frac{y}{x} = O(1)$$

die insbesondere auf die Laguerreschen Polynome für $n \to \infty$, $ny = O(1)$ anwendbar ist[8]).

Da α hier keiner Einschränkung unterliegt, kann insbesondere ohne weiteres Anwendung auf die Hermiteschen Funktionen gemacht werden; wir beschränken uns auf die Angabe der Nullstellenentwicklungen für die *Hermiteschen Polynome*

$$H_{2n}(y) = 2^n L_n\left(\frac{y^2}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ H_{2n+1}(y) = 2^n L_n\left(\frac{y^2}{2}, +\frac{1}{2}\right).$$

Man erhält für die j-te positive Nullstelle bei $n > n_j$

$$\text{für } H_{2n}\colon\ y_j = \frac{(j-\frac{1}{2})\pi}{\sqrt{2n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + \left(\frac{1}{128} + \frac{(j-\frac{1}{2})^2\pi^2}{96}\right)\frac{1}{n^2} + \dots\right),$$

$$\text{für } H_{2n+1}\colon\ y_j = \frac{j\pi}{\sqrt{2n}}\left(1 - \frac{3}{8n} + \left(\frac{25}{128} + \frac{j^2\pi^2}{96}\right)\frac{1}{n^2} + \dots\right)^{9}).$$

---

[8]) Im Sonderfalle $x = \frac{1}{n}$, $\alpha = 0$, y reell ist die asymptotische Darstellung (16) (ohne die Konvergenz) auf andere Weise bei Moecklin [9], S. 45/46 gezeigt, sie fließt aber ohne weiteres ganz allgemein aus der letzteren. Daß die dort durch die Entwicklung $\exp\left[\zeta\frac{\lg(1-\xi)^{-1}-\xi}{\xi}\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_{\nu\varkappa}\zeta^\nu\xi^\varkappa$ erklärten Koeffizienten $c_{\nu\varkappa}$ für $\nu \geqq 1$ mit unseren $\frac{d_{\nu\varkappa}^{(1)}}{(\nu+\varkappa)!}$ übereinstimmen, kann auf Grund einer Formel über Stirlingsche Zahlen (Nielsen [11], S. 70, (7)) auch leicht rechnerisch bestätigt werden. — Den Hinweis auf [9] danke ich Herrn W. Hahn.

[9]) Herr van Veen [16], S. 430 gibt eine Annäherung vermittels der Wurzeln gewisser elementar-transzendenter Gleichungen; vgl. den Hinweis hierauf bei W. Hahn [3], S. 229/230 und meine Berichtigung zu diesem (Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 60II (1934), S. 1037).

Wir wenden uns nun zur *Gaußschen Reihe* $p = 2$, $q = 1$ und betrachten den Fall, der mit den zugeordneten Legendreschen Funktionen (von beliebigen Indizes) in folgendem Zusammenhang steht (Definition wie bei Hobson [5], S. 188 (10), (11)):

$$f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{x},\ 1+\frac{1}{x},\ \beta+1,\ y\right)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x},\ \lambda\right)\left(1+\frac{1}{x},\ \lambda\right) y^{\lambda}}{\Gamma(\beta+\lambda+1)\,\lambda!} = P_{\frac{1}{x}}^{-\beta}(1-2y)\cdot\left(\frac{y}{y-1}\right)^{\frac{-\beta}{2}}$$

(β beliebig komplex — für $\beta = -m-1$ ist wie oben zu verfahren —, $0 < |x| < \infty$, $|y| < 1$, ferner rechts $0 \leqq \arc y < 2\pi$, $0 \leqq \arc(y-1) < 2\pi$). Für $x = \frac{1}{n}$ gehen die Zugeordneten der *Legendreschen Polynome*, für $\beta = 0$ diese selbst hervor $\left(\text{für } \beta = -m-1,\ n \leqq m \text{ wird } f\left(\frac{1}{n}, y\right) = P_n^{m+1}(1-2y) \equiv 0\right)$. Für $1-2y = z = \cos\vartheta$ $(0 < \vartheta < \pi)$ wird $y = \sin^2\frac{\vartheta}{2}$. Geht man für diesen Fall zur Ferrerschen Definition der Zugeordneten über (die dann für reelles β reell werden), so wird

$$P_{\frac{1}{x}}^{-\beta}(\cos\vartheta) = \left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)^{\beta} f\left(x, \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Analog wie im Kummerschen Falle ergibt sich

$$f(x, x^2 w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} g_{\nu}(w) \qquad (|x| < \infty,\ |x^2 w| < 1), \tag{17}$$

$$g_0(w) = w^{-\frac{\beta}{2}} J_{\beta}(2\sqrt{w}), \quad g_1(w) = -w^{\frac{1-\beta}{2}} J_{\beta+1}(2\sqrt{w}),$$

und für $\nu \geqq 1$

$$g_{2\nu}(w) = \sum_{\varkappa=1}^{2\nu} \frac{(-1)^{\varkappa} d_{\nu\varkappa}^{(2)}}{(\nu+\varkappa)!}\, w^{\frac{\nu+\varkappa-\beta}{2}} J_{\beta+\nu+\varkappa}(2\sqrt{w}) \qquad \text{(wegen (10))}, \tag{18}$$

$$g_{2\nu+1}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{2\nu} (-1)^{\varkappa} \frac{d_{\nu\varkappa}^{(2)} + d_{\nu,\varkappa+1}^{(2)}}{(\nu+\varkappa)!}\, w^{\frac{\nu+\varkappa+1-\beta}{2}} J_{\beta+\nu+\varkappa+1}(2\sqrt{w})$$

(wegen (10')).

Sind jetzt μ_j^2 die voneinander und von Null verschiedenen Nullstellenquadrate von $J_{\beta}(\mu)$, so erhält man die folgenden Lösungen:

$$y = \psi_j(x) = \frac{\mu_j^2}{4}x^2 - \frac{\mu_j^2}{4}x^3 + \frac{\mu_j^2}{48}(4\beta^2 + 8 - \mu_j^2)x^4 + \ldots (|x| < \gamma_j). \tag{19}$$

Für ein k mit $|\mu_k| < |\mu_{k+1}|$ geben die k ersten Reihen für kleine $|x|$ die k Lösungen kleinsten Betrages, oder also die Reihen $z = 1 - 2\psi_j(x)$ die k am nächsten bei 1 gelegenen Lösungen von $P_{\frac{1}{x}}^{-\beta}(z) = 0$. Aus der gleich-

mäßigen Konvergenz von (17) etwa für $|w| \leqq R$, $|x|^2 \leqq \frac{1}{R+1}$ folgt entsprechend (16)

$$(20) \qquad f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{l-1} x^\nu g_\nu\left(\frac{y}{x^2}\right) + O(x^l) \quad \text{für } x \to 0,\ \frac{y}{x^3} = O(1),$$

bei $x = \frac{1}{n}$, $z = \cos\vartheta$ also insbesondere

$$P_n^{-\beta}(\cos\vartheta) = \left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)^\beta \left\{ \sum_{\nu=0}^{l-1} n^{-\nu} g_\nu\left(n^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + O(n^{-l}) \right\}$$

für $n \to \infty$, $n\vartheta = O(1)$[10]).

§ 3.

Lösungen, die in Randnullstellen münden.

Wir knüpfen wieder an § 1 an und betrachten zunächst eine Gleichung $f(x,y) = 0$, wo jetzt $f(x,y) = \sum_{\nu,\lambda=0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x^\nu y^\lambda$, und die Reihe für $|x| < \xi$, $|y| < \infty$ konvergieren möge. Man kann nach einer Lösung fragen, die für $x \to 0$ unendlich wird, für die sich also (x, y) dem *Rand* des Konvergenzgebiets nähert; vermöge $y|\frac{1}{y}$ kommt man auf die Untersuchung von $\sum_{\nu,\lambda=0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x^\nu y^{-\lambda}$ in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $(0, 0)$, so daß Satz 1 einschlägig wird. Stellt man eine entsprechende Frage für eine Potenzreihe, bei der der „Maximalradius“[11]) in der y-Ebene endlich, etwa gleich 1 ist, so ändern sich die Verhältnisse, weil jetzt von vornherein für die Werte einer Lösung mit $y \to y_0$ ($|y_0| = 1$) nicht mehr eine volle „punktierte Umgebung“ $0 < |y - y_0| < \varepsilon$ zur Verfügung steht, sondern nur der Durchschnitt einer solchen mit $|y| < 1$. Wir bringen in dieser Richtung zwei

---

[10]) Einige Glieder einer (17) bzw. (20) für $z = \cos\vartheta$, sowie einer der Umkehrung von (19) entsprechenden Reihe finden sich, wie ich nachträglich bemerkte, bei Macdonald [3], S. 269—272, allerdings ohne das allgemeine Bildungsgesetz (18) und ohne völlig klare Angaben über die Konvergenz- und Approximationsverhältnisse. Vgl. auch den Hinweis bei Hobson [5], S. 406/407. — Die asymptotische Darstellung (20) dürfte vielleicht *in ihrem Gültigkeitsbereich* Vorzüge gegenüber der Szegöschen Entwicklung nach Besselfunktionen des Arguments $(n + \frac{1}{2})\vartheta$ besitzen (Szegö [14], Satz I, [15], Satz IV, S. 49 und Anhang, S. 110/111) da die Berechnung der dortigen Koeffizienten $\varphi_m(\vartheta)$ (a. a. O. [15], S. 51, (6); 45, (34)) wegfällt.

[11]) Vgl. Hartogs [4], S. 14, Behnke-Thullen [1], S. 37. Die Annahme, 1 sei der genaue Maximalradius, schließt nur den trivialen Fall aus, daß $(0, y_0)$ für jedes y_0 mit $|y_0| = 1$ ein regulärer Punkt ist, braucht also im folgenden nicht ausdrücklich gemacht zu werden.

Sätze, deren erster nicht auf Potenzreihen beschränkt ist. Zuvor beweisen wir den

Hilfssatz[12]). Es sei $f(z)$ regulär für $z \in \mathfrak{S} = \{0 < |z| \leqq R;\ \gamma_1 \leqq \arg z \leqq \gamma_2\}$. Ist 1. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} = a_\nu$ vorhanden $(0 \leqq \nu \leqq l)$, so gilt für $z \to 0$

$$R_l(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{l} a_\nu z^\nu = o(z^l);$$

ist 2. überdies $f^{(l+1)}(z) = o(z^\beta)$ $(\beta > -1)$, so ist schärfer

$$R_l(z) = o(z^{l+1+\beta})^{13}) \qquad \text{[ebenso mit } O \text{ statt } o\text{]}.$$

Beweis. Der Taylorsche Satz mit Integralrestglied ergibt, zunächst für den Ausgangspunkt $z_0 \neq 0$ angesetzt, bei $z_0 \to 0$ nach Vor. 1. $(l \geqq 1$, Integrationsweg geradlinig):

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu z^\nu + \frac{1}{(l-1)!} \int_0^z f^{(l)}(t)\,(z-t)^{l-1}\,dt, \tag{21}$$

ferner ist

$$a_l z^l = l \int_0^z a_l (z-t)^{l-1}\,dt,$$

also

$$f(z) - \sum_{\nu=0}^{l} a_\nu z^\nu = \frac{z^l}{(l-1)!} \int_0^z \left(f^{(l)}(t) - l!\,a_l\right) \left(\frac{z-t}{z}\right)^{l-1} \frac{dt}{z}.$$

Nun ist aber auf dem Integrationsweg $\left|\frac{z-t}{z}\right| \leqq 1$ und $|f^{(l)}(t) - l!\,a_l| < \varepsilon$ für $z \in \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{k}_\delta$, da dann auch $t \in \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{k}_\delta$, somit die rechte Seite vom Betrag $< \frac{1}{(l-1)!} |z|^l \cdot \varepsilon \cdot 1 \leqq \varepsilon |z|^l$, womit die 1. Behauptung bewiesen ist. Die 2. (aber nicht die 1.) ergibt sich unmittelbar nach dem Fordschen Verfahren, nämlich aus (21), für $l+1$ statt l angesetzt.

Bezeichnungen. $\mathfrak{T}_\eta$ sei ein Winkelraum

$$\left(\frac{\pi}{2} <\right) \gamma_1 \leqq \arg(y-1) \leqq \gamma_2 \left(< \frac{3\pi}{2}\right),\ 0 < |y-1| \leqq \eta,$$

bei dem $\eta > 0$ so klein ist, daß

$$\mathfrak{T}_\eta \subset \{|y| < 1,\ \Re(y) > 0\}.$$

---

[12]) Verschärfung eines Satzes von W. B. Ford [2].

[13]) Grenzbegriff: $F(z) \to A$ bedeutet: $|F(z) - A| < \varepsilon$ für alle $z \in \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{k}_\delta$, $\mathfrak{k}_\delta = \{|z| \leqq \delta\}$; entsprechend ist o, O zu verstehen; für $R_l(z) = o(z^l)$ schreiben wir auch $f(z) \underset{l}{\sim} \sum_{\nu=0}^{l} a_\nu z^\nu$.

$\mathfrak{S}_\varrho^{(j)}$ sei der Winkelraum

$$\frac{1}{n}(\gamma_1' + 2j\pi) \leqq \arg x \leqq \frac{1}{n}(\gamma_2' + 2j\pi)$$

$$0 < |x| \leqq \varrho \qquad (j = 1, 2, \ldots n).$$

$\mathfrak{S}_{\varrho,\delta}^{(j)}$ entstehe hieraus durch Verkleinerung des Winkels um 2δ, indem man γ_1' durch $\gamma_1' + \delta$, γ_2' durch $\gamma_2' - \delta$ ersetzt $(0 < 2\delta < \gamma_2' - \gamma_1')$. Grenzübergänge für $x \to 0$, $y \to 1$; o, O sind mit Bezug auf die angegebenen Winkelräume so zu verstehen wie in [13]). Für $\lim_{y \to 1} F(y)$ schreiben wir auch $F(1)$.

Satz 2. *Es sei $f_\nu(y)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für $y \in \mathfrak{T}_\eta$ regulär, ferner*

$1)_a$ *$f_\nu^{(\lambda)}(1)$ vorhanden für $0 \leqq \nu + n\lambda \leqq k$ (n, k ganz, fest, $1 \leqq n \leqq k$);*

$1)_b$ *$f_\nu(1) = 0$ $(0 \leqq \nu \leqq n-1)$, $f_n(1) \neq 0$, $f_0'(1) \neq 0$;*

$2)_a$ *für $\nu \leqq k$, $l_\nu = \frac{k-\nu}{n}$ nicht ganz: $f_\nu^{[l_\nu]+1}(y) = o(1 - |y|)^{l_\nu - [l_\nu] - 1}$;*

$2)_b$ *für $\nu \geqq k+1$: $f_\nu(y) = o(1 - |y|)^{l_\nu}$;*

3) $\overline{\lim_{\substack{y \to 1 \\ \nu \to \infty}}} |f_\nu(y)|^{\frac{1}{\nu}} (1 - |y|)^{\frac{\alpha}{\nu n}} < \infty$ *für ein $\alpha > 0$.*

Bezeichnen wir dann den Wert $-\frac{f_n(1)}{f_0'(1)}$ mit c_n und setzen wir $\gamma_q - \arg c_n = \gamma_q'$, so gilt:

Nach Festlegung eines beliebigen positiven $\delta \left(< \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right)$ gibt es bei geeigneter Wahl von $\varrho, r > 0$ zu jedem $x \in \mathfrak{S}_{\varrho,\delta}^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ je genau eine Lösung $y = y_j(x)$ der Gleichung

$$f(x, y) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu f_\nu(y) = 0,$$

für die

$$\frac{y-1}{x^n} \in \mathfrak{R}_r = \{|w - c_n| \leqq r\}, \quad y \in \mathfrak{T}_\eta.$$

Für diese gilt

$$y_j \underset{k}{\sim} 1 + \sum_{\mu=n}^{k} c_\mu x^\mu \quad (x \to 0 \text{ in } \mathfrak{S}_{\varrho,\delta}^{(j)}).$$

Die Koeffizienten c_μ berechnen sich durch „Koeffizientenvergleichung k-ter Ordnung" (d. h. durch Nullsetzen des Koeffizienten von x^ν $(0 \leqq \nu \leqq k)$ in der Entwicklung des Polynoms

$$\sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{[l_\nu]} \frac{f_\nu^{(\lambda)}(1)}{\lambda!} x^\nu (c_n x^n + \ldots + c_{k-\nu} x^{k-\nu})^\lambda$$

nach Potenzen von x).

Zum *Beweis* sei zunächst nach Vor. 3) $\eta' (\leqq \eta)$ und die Konstante A so gewählt, daß für $y \in \mathfrak{T}_{\eta'}$, $\nu > \nu'$

$$|f_\nu(y)| \leqq A^\nu (1 - |y|)^{-\frac{\alpha}{n}}.$$

Es gibt dann ein $G\,(>1)$ derart, daß in $\mathfrak{T}_{\eta'}$

$$1-|y| \leqq |1-y| \leqq G\,(1-|y|). \tag{22}$$

Für $0<\eta_0 \leqq |\,y-1\,|$, $y \in \mathfrak{T}_{\eta'}$ ist $1-|y| \geqq \frac{\eta_0}{G}$, somit ist jedenfalls $f(x,y)=\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu f_\nu(y)$ für $|x|<\frac{1}{A}$, $y \in \mathfrak{T}_{\eta'}$ regulär.

Nun liege x in $\mathfrak{S}^{(\vartheta)}_{\varrho,\vartheta}$, und es variiere w auf der Kreisscheibe $\mathfrak{K}_r$. Bei geeigneter Wahl von ϱ, r wird wegen $c_n \neq 0$

$$1+x^n w \in \mathfrak{T}_{\eta'},$$

und aus einer Beziehung $F(y) \to C$ für $y \to 1$ in $\mathfrak{T}_{\eta'}$ folgt $F(1+x^n w) \to C$ für $x \to 0$ in $\mathfrak{S}^{(\vartheta)}_{\varrho,\vartheta}$, gleichmäßig hinsichtlich $w \in \mathfrak{K}_r$.

Nach diesen Vorbemerkungen bilden wir mit $k'=\operatorname{Max}(k+[\alpha], \nu')$

$$f(x, 1+x^n w)=\left\{\sum_{\nu=0}^{k}+\sum_{\nu=k+1}^{k'}+\sum_{\nu=k'+1}^{\infty}\right\} x^\nu f_\nu(1+x^n w). \tag{23}$$

Es wird für $\nu \leqq k$

$$f_\nu(1+x^n w)=\sum_{\lambda=0}^{[l_\nu]} \frac{f_\nu^{(\lambda)}(1)}{\lambda!}\, x^{n\lambda} w^\lambda + o(x^{k-\nu})$$

gleichmäßig hinsichtlich $w \in \mathfrak{K}_r$. Dies folgt, je nachdem l_ν ganz oder nicht, nach Vor. $1)_a$ bzw. $2)_a$ aus dem Hilfssatz, Beh. 1. bzw. 2.; dabei ist $z=x^n w$ zu nehmen, l durch $[l_\nu], \beta$ durch $l_\nu-[l_\nu]-1$ zu ersetzen. Damit wird

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{k} x^\nu f_\nu(1+x^n w) &= \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{[l_\nu]} \frac{f_\nu^{(\lambda)}(1)}{\lambda!}\, x^{\nu+n\lambda} w^\lambda + o(x^k) \\ &= x^n f_0'(1)\,(w-c_n) + \sum_{\mu=n+1}^{k} x^\mu h_\mu(w) + o(x^k),\end{aligned} \tag{24}$$

wenn man setzt

$$h_\mu(w)=\sum_{\lambda=0}^{[\mu/n]} f_{\mu-n\lambda}^{(\lambda)}(1)\, w^\lambda.$$

Für die zweite Summe in (23) beachte man, daß nach (22)

$$1-|1+x^n w| \geqq \frac{1}{G}\,|x^n w| \qquad (x \in \mathfrak{S}^{(\vartheta)}_{\varrho,\vartheta},\ w \in \mathfrak{K}_r), \tag{25}$$

daß also wegen Vor. $2)_b$ (es ist $l_\nu<0$)

$$f_\nu(1+x^n w)=o\left((x^n w)^{l_\nu}\right)=o(x^{k-\nu}) \quad (\nu>k),$$

also

$$\sum_{\nu=k+1}^{k'} x^\nu f_\nu(1+x^n w)=o(x^k) \tag{26}$$

gleichmäßig in w. Endlich wird wegen Vor. 3) und (25)

$$27) \qquad \Big|\sum_{\nu=k'+1}^{\infty} x^\nu f_\nu(1+x^n w)\Big| \leqq \sum_{\nu=k'+1}^{\infty} |x|^\nu A^\nu G^{\frac{\alpha}{n}} |x|^{-\alpha} |w|^{-\frac{\alpha}{n}}$$
$$\leqq A' |x|^{k'+1+[\alpha]-\alpha} = o(x^k)$$

gleichmäßig in w. Wegen (24), (26), (27) kann man daher auf die Funktion

$$(28) \quad F(x,w) = \frac{f(x, 1+x^n w)}{f_0'(1)\, x^n} = w - c_n + \sum_{\mu=1}^{k-n} x^\mu h_{n+\mu}(w) + o(x^{k-n})$$

einen früheren Satz des Verfassers anwenden[14]); man nehme dort $n=1$, ersetze w durch $w - c_n$, k durch $k-n$, mache $X = x$, $\varphi_\nu(x) = x^\nu$, $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{S}^{(\varphi)}_{\varrho,\vartheta} \cdot \left\{|x| < \frac{\varrho}{\sigma+1}\right\}$[15]). Zu jedem $x \in \mathfrak{M}_\sigma$ $(\sigma \geqq \bar\sigma)$, d. h. $\in \mathfrak{S}^{(\varphi)}_{\bar\varrho,\vartheta}$ bei passendem $\bar\varrho$ hat also $F(x,w) = 0$ genau eine Lösung w in $\mathfrak{K}_{\bar r}$, $\bar r \leqq r$, und für diese gilt

$$w = w_j \underset{k-n}{\sim} c_n + c_{n+1} x + \ldots c_k x^{k-n} \text{ in } \mathfrak{S}^{(\varphi)}_{\varrho,\vartheta},$$

woraus die folgende Lösung von $f(x,y) = 0$:

$$y_j = 1 + x^n w_j \sim 1 + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + c_k x^k,$$

w. z. b. w. Die Methode der Koeffizientenvergleichung ist für F a. a. O., S. 643 begründet und kann offenbar auch direkt an $f(x,y)$ vorgenommen werden.

Besondere Fälle. Für $n=1$ wird Vor. $2)_a$ inhaltsleer und kann daher wegfallen. $2)_a$ ist ferner sicher erfüllt, wenn $f_\nu^{(\lambda)}(1)$ für $\nu + n\lambda \leqq k+n-1$ vorhanden ist; denn dann ist, falls l_ν nicht ganz,

$$\nu + n([l_\nu]+1) < \nu + k - \nu + n = k+n,$$

also sogar $f_\nu^{[l_\nu]+1}(1)$ vorhanden. — Die asymptotische Darstellung k-ter Ordnung nach Satz 2 gilt weiter für jedes $k \geqq 1$, so daß eine asymptotische *Entwicklung* vorliegt, falls 1) für jedes k und 3) gelten; denn 2) ist dann von selbst erfüllt. Ist insbesondere $f_\nu(y) = \sum_{\lambda=0}^{h_\nu} a_{\nu\lambda} y^\lambda$ ein *Polynom* (oder $\equiv 0$), so ist $1)_a$ von selbst erfüllt; gilt $1)_b$, so existiert eine *formale Lösungsreihe* $1 + c_n x^n + \ldots$ im Sinne von Lettenmeyer; 3) ist dann eine hinreichende Bedingung dafür, daß diese Reihe zu jedem δ in einem Winkelraum $\mathfrak{S}^{(\varphi)}_{\varrho,\vartheta}$ eine Lösung im Sinne der Analysis asymptotisch darstellt. Daß hierbei auch wirklich *divergente* Reihen als asymptotisch erkannt werden, mag durch folgendes *Beispiel* belegt werden:

$$f(x,y) = 1 - y + \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu \sum_{\lambda=0}^{h_\nu} y^\lambda, h_1 \geqq 0,\ h_\nu \geqq -1$$[15]), $\overline{\lim}\ \sqrt[\nu]{h_\nu} = \infty$.

---

[14]) [13], Satz 8, S. 642/643.

[15]) Leere Summen bedeuten Null.

Vor. 3) gilt mit $\alpha = n = 1$, und es ist $f(x, y)$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$ regulär. γ_1, γ_2 können in $\frac{\pi}{2} < \gamma_1 < \gamma_2 < \frac{3\pi}{2}$ beliebig angenommen werden. Die Lösungsreihe divergiert beständig; sie entsteht nämlich durch formale Gleichsetzung von

$$c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

mit

$$x \sum_{\lambda=0}^{h_1} (1 + c_1 x + \ldots)^\lambda + x^2 \sum_{\lambda=0}^{h_2} (1 + c_1 x + \ldots)^\lambda + \ldots,$$

so daß

$$c_1 = h_1 + 1 > 0, \quad c_2 \geqq h_2 + 1, \ldots, c_\nu \geqq h_\nu + 1, \quad \overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{c_\nu} = \infty.$$

Es sei hier eine kleine *Anwendung* auf das Problem des § 1 eingeschaltet. Sei $0 < \lambda_m \uparrow \infty$, $\sqrt[m]{\lambda_m} \to \infty$, λ_m ganz $(m = 1, 2, \ldots)$

$$f(x, y) = x - y + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=n_\lambda}^{\infty} x^\nu y^\lambda,$$

wobei sein soll:

$n_\lambda = -\lambda + 2$ $(0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1)$, $n_\lambda = -\lambda + m + 1$ $(\lambda_{m-1} < \lambda \leqq \lambda_m,\ m \geqq 2)$.

Es wird formal

$$\frac{f(x, xw)}{x} = 1 - w + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=n_\lambda}^{\infty} x^{\nu+\lambda-1} w^\lambda$$

$$= 1 - w + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} x^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{\lambda_\varkappa} w^\lambda.$$

Dies zeigt, daß das absolute Konvergenzgebiet $0 \leqq |y| < |x| < 1$ ist, daß ferner in $\mathfrak{S}_{\varrho,\vartheta}^{(f)}$ eine Lösung existiert, für die (siehe das letzte Beispiel):

$$y \sim x + (\lambda_1 + 1) x^2 + \ldots.$$

Da die Reihe divergiert, verhält sich die Lösung bei $x = 0$ gewiß nicht algebroid (vgl. § 1, S. 539. Es ist klar, wie allgemein Satz 2 durch Anwendung auf die Reihe (3) zur Ergänzung von § 1 dienen kann.

Die Bedeutung der Vor. 2) mag durch folgendes *Gegenbeispiel* erläutert werden:

$$f(x, y) = 1 - y - x + x^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} y^\nu \quad (|x| < \infty, |y| < 1).$$

Es gilt 1) nur für $n = k = 1$, 3) nur für $\alpha = 1$, 2) *nicht* für $\nu = 2$. In der Tat gibt es zwar in sofort anzugebenden Winkelräumen die Lösungen

$$y_1 = 1 + \varepsilon x, \quad y_2 = 1 + \varepsilon^2 x \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}),$$

aber der Faktor von x geht nicht durch Koeffizientenvergleichung 1. Ordnung hervor.

Es sei nunmehr insbesondere $f(x, y)$ für $|x| < \xi$, $|y| < 1$ regulär; die Gültigkeit unserer Voraussetzungen kann dann natürlich durch Bedingungen für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $f(x, y) = \sum_{\nu, \lambda = 0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x^\nu y^\lambda$ erreicht werden. So gilt $1)_a$ nach dem Abelschen Grenzwertsatze sicher für jedes $\mathfrak{T}_{\eta_1}$, wenn die betreffenden Reihen $\sum_{\lambda = \varkappa}^{\infty} a_{\nu\lambda} \varkappa! \binom{\lambda}{\varkappa} y^{\lambda - \varkappa}$ noch für $y = 1$ konvergieren; 3) ist z. B. erfüllt wenn

$$|a_{\nu\lambda}| \leqq C \beta^\nu \lambda^{\alpha - 1} \quad (\nu \geqq \nu_1,\ \lambda \geqq \lambda_1,\ \alpha > 0),$$

wegen $(-1)^\lambda \binom{-\alpha}{\lambda} \sim \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ für $\lambda \to \infty$. Eine andere Koeffizientenbedingung, die Fälle umgreift, für die Satz 2 versagt, geben wir in

Satz 3. *Sei* $f(x, y) = \sum_{\nu, \lambda = 0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x^\nu y^\lambda = \sum_{\nu = 0}^{\infty} x^\nu f_\nu(y)$ *für* $|x| < \xi$, $|y| < 1$, *und Vor.* 1), $2)_a$ *des Satzes* 2 *erfüllt. Die Aussage des Satzes gilt dann bei geeigneter Auswahl von* $\mathfrak{T}_\eta$, *wenn für eine positive Zahl* $p > \frac{1}{|c_n|}$ *die (für kleine* $t > 0$ *sicher konvergente) Reihe*

$$\sum_{\nu = k+1}^{\infty} \sum_{\lambda = 0}^{\infty} |a_{\nu\lambda}| (p t)^{\frac{\nu - \lambda}{n}} (1 - t)^\lambda \to 0 \quad \text{für } t \to +0.$$

Dies letztere ist insbesondere der Fall, wenn die Reihe

$$\sum_{\lambda, \nu = 0}^{\infty} |a_{k+1+\nu, \lambda}| p^{\frac{\nu}{n}} \frac{\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\frac{\nu}{n}} \lambda^\lambda}{\left(\frac{\nu}{n} + \lambda\right)^{\frac{\nu}{n} + \lambda}} \tag{29}$$

konvergiert.

Beweis. Wir legen $\mathfrak{T}_\eta$ und $\mathfrak{R}_r$ so fest, daß in (22) $G \leqq p\,(|c_n| - r)$ genommen werden kann; das kann wegen $p\,|c_n| > 1$ (Vor.) durch hinreichende Verkleinerung von $|\gamma_q - \pi|$, η und r sicher erreicht werden. Dann setzen wir wieder $y = 1 + x^n w$, $x \in \mathfrak{S}_{\varrho, \delta}^{(j)}$, $w \in \mathfrak{R}_r$, wobei nötigenfalls nochmals r zu verkleinern ist, damit $y \in \mathfrak{T}_\eta$. Dann wird

$$f(x, 1 + x^n w) = \sum_{\nu = 0}^{k} x^\nu f_\nu(1 + x^n w) + x^k \sum_{\nu = k+1}^{\infty} \sum_{\lambda = 0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x^{\nu - k} (1 + x^n w)^\lambda.$$

Die erste Summe ist wie bei Satz 2 zu behandeln. Im Rest wird nach (25) und Vor.:

$$0 < |1 + x^n w| \leqq 1 - \frac{|x^n w|}{G} \leqq 1 - |x|^n \frac{|c_n| - r}{G} \leqq 1 - \frac{|x|^n}{p}.$$

Mit $\frac{|x|^n}{p} = t$ wird daher die letzte Summe vom Betrage

$$\leqq \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{\nu\lambda}| (pt)^{\frac{\nu-k}{n}} (1-t)^\lambda.$$

Ist dies $= o(1)$ für $t \to +0$, so ist damit die asymptotische Darstellung (28) erreicht, und die gleiche Schlußweise wie dort führt zum Ziel. Eine (rohe) Abschätzung der Summe erhält man, indem man sie schreibt:

$$(pt)^{\frac{1}{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{\nu+k+1,\lambda}| (pt)^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^\lambda.$$

Für $0 \leqq t \leqq 1$ ist aber offenbar (Differentiation):

$$t^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^\lambda \leqq \frac{\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\frac{\nu}{n}} \lambda^\lambda}{\left(\frac{\nu}{n}+\lambda\right)^{\frac{\nu}{n}+\lambda}} \qquad (0 \leqq \lambda, \nu < \infty),$$

und damit ist Satz 3 erwiesen.

Es sei z. B. $f(x,y) = 1 - y + x + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^\nu x^\nu y^{\nu^2}$ $(|x| < \infty, |y| < 1)$.

Wegen $\overline{\lim\limits_{\substack{\nu\to\infty \\ y\to 1}}} (1-|y|)^{\frac{\alpha}{\nu}} \nu |y|^\nu = \infty$ in jedem $\mathfrak{T}_\eta$ $\left(\text{man setze etwa } |y| = 1 - \frac{1}{\nu}\right)$ ist Satz 2 nicht anwendbar. Für $n = 1$, $c_1 = 1$ und ein p zwischen 1 und e sind jedoch die Vor. von Satz 3 erfüllt. In der Tat kommt die Reihe (29) auf die einfache mit dem allgemeinen Glied

$$u_\nu = \nu^{k+1} \left(1 + \frac{k+1}{\nu}\right)^{\nu+k+1} \frac{p^\nu \cdot \left(1 + \frac{k+1}{\nu}\right)^{2(\nu+k+1)^2}}{\left[\frac{1}{\nu} + \left(1 + \frac{k+1}{\nu}\right)^2\right]^{\nu+(\nu+k+1)^2}}$$

hinaus, und sie konvergiert wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{u_\nu} = p/e < 1$. Die Lösungsreihe wird, wie man sieht, divergent, aber asymptotisch zu einer in einem hinreichend schmalen Winkelraum um ein Stück der negativ reellen Achse mit dem Scheitel $x = 0$ vorhandenen Lösung.

Literaturverzeichnis.

H. Behnke u. P. Thullen.

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. III, 3. Berlin, Jul. Springer, 1934.

W. B. Ford.

[2] Conditions suffisantes pour qu'une fonction admette un développement asymptotique. Bull. soc. math. de France 39 (1911), S. 347—352.

W. Hahn.
[3] Bericht über die Nullstellen der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome. Jahresb. der Deutschen Math. Ver. **44** (1934), S. 215—236.

F. Hartogs.
[4] Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen. Diss. München, Leipzig, Teubner, 1904.

E. W. Hobson.
[5] The theory of spherical and ellipsoidal hermonics. Cambridge Univers. Press 1931.

F. Lettenmeyer.
[6] Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variablen. Sitzungsber. Bayer. Akad. München 1933, S. 349—371.
[7] Desgleichen, 2. Mitteilung, ebenda 1935, S. 457—469.

H. M. Macdonald.
[8] Zeroes of the Spherical Harmonics $P_n^m(\mu)$ considered as a Function of n. Proc. London Math. Soc. **31** (1900), S. 264—278.

E. Moecklin.
[9] Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome. Comm. Math. Helv. **7** (1934/35), S. 24—46.

H. Nakano.
[10] Über den Konvergenzbereich einer zweifachen Potenzreihe und seine Anwendungen. Jap. Journ. of Math. **9** (1932), S. 135—144.

N. Nielsen.
[11] Handbuch der Theorie der Γ-Funktion. Leipzig, Teubner, 1906.

A. Ostrowski.
[12] Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 98—133.

Herm. Schmidt.
[13] Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. Math. Annalen **113** (1937), S. 629—656.

G. Szegö.
[14] Über einige asymptotische Entwicklungen der Legendreschen Funktionen. Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1934), S. 427—450.
[15] Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. Schriften der Königsberger Gelehrten Ges. **10/3** (1933), S. 35—112.

S. C. Van Veen.
[16] Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der Hermiteschen Funktionen. Math. Annalen **105** (1931), S. 408—436.

(Eingegangen am 6. Juli 1937.)

Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe.

Von

Wilhelm Specht in Breslau.

Geht eine homogene ganzrationale Funktion $f(x)$ von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem vorgegebenen Zahlkörper K durch eine Permutation

$$P = \begin{pmatrix} x_\nu \\ x_{a_\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

der Veränderlichen in die Funktion $f^P(x)$ über, so bildet die Menge aller Funktionen

$$g(x) = \sum_P a_P f^P(x)$$

mit Zahlen a_P aus dem Körper K, wobei P alle Elemente einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ durchläuft, einen Modul, den ich als den *durch* $f(x)$ *bestimmten* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ bezeichne. Dieser Modul erzeugt mit Hilfe einer linear unabhängigen Basis $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ und den im Modul für jede Permutation P der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ geltenden linearen Beziehungen:

$$f_\alpha^P(x) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}^P f_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

in den Matrizen

$$D(P) = (d_{\alpha\beta}^P)$$

des Grades k eine (im Körper K rationale) Darstellung von $\mathfrak{P}_n$, *die durch den* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *erzeugte Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{P}_n$. Da, wie leicht zu zeigen ist, verschiedene linear unabhängige Basen des Moduls $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ ähnliche Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ liefern, ist die Darstellung durch den Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ im wesentlichen eindeutig bestimmt, diese Ausdrucksweise also durchaus berechtigt. Eine linear unabhängige Basis eines $\mathfrak{P}_n$-Moduls bezeichne ich auch nach dem Vorschlag von I. Schur[1]) als ein *Eigensystem* der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ und die durch diese Basis bestimmte Darstellung von $\mathfrak{P}_n$ als *die durch das Eigensystem erzeugte Darstellung.*

Da jede Darstellung einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ als einer endlichen Gruppe in irreduzible Darstellungen vollständig zerfällt werden kann, besteht das Problem der Darstellungstheorie der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ von diesem Standpunkte aus betrachtet in der Bestimmung einer Reihe von

[1]) Vgl. R. Brauer und I. Schur, Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1930, S. 209 — 226.

$\mathfrak{P}_n$-Moduln, die sämtliche wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n$ erzeugen.

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich ein System von $\mathfrak{S}_n$-Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{S}_n; f(x))$ angegeben, die die irreduziblen Darstellungen der vollen symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ erzeugen. In der vorliegenden Arbeit ist die gleiche Aufgabe für *die alternierende Gruppe* $\mathfrak{A}_n$, d. i. die Gruppe aller geraden Permutationen gelöst. Die Hilfsmittel hierzu rühren zum Teil von G. Frobenius[3]), zum andern Teil werden sie in den ersten beiden Abschnitten zusammengetragen. Der letzte Abschnitt geht noch auf eine andere Frage der Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe ein.

I.

Die Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ von der Ordnung h besitze k wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen; nach dem Fundamentalsatz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen sind diese eindeutig gekennzeichnet durch ihre Charaktere $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$, die der Permutation P aus $\mathfrak{P}_n$ die Charakterwerte

$$\chi_1(P),\ \chi_2(P),\ \ldots,\ \chi_k(P)$$

zuordnen mögen. Die Zahlen

$$\chi_\varkappa(E) = g_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

für das Einheitselement E der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ geben die Grade der Charaktere oder der ihnen entsprechenden irreduziblen Darstellungen an. Ferner gelten die Beziehungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum\limits_P \chi_\varkappa(RP^{-1})\,\chi_\lambda(PS) = 0, & (\varkappa \neq \lambda) \\ \sum\limits_P \chi_\varkappa(RP^{-1})\,\chi_\varkappa(PS) = \dfrac{h}{g_\varkappa}\,\chi_\varkappa(RS), \end{cases}$$

wobei zu summieren ist über alle Permutationen P aus $\mathfrak{P}_n$, und R, S beliebige Elemente von $\mathfrak{P}_n$ bezeichnen[4]). Ist dann $\mathfrak{D}$ eine beliebige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, die den Charakter $\varphi(P)$ besitzt, so ist

$$\varphi(P) = \sum_\varkappa h_\varkappa\,\chi_\varkappa(P) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen $h_\varkappa$[5]).

---

[2]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 696—711. [Weiterhin mit Specht zitiert.]

[3]) Vgl. G. Frobenius, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1901, S. 303—315. [Weiterhin mit Frobenius (1) zitiert.]

[4]) Für allgemeine Tatsachen der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin, Julius Springer, 1927 (2. Aufl.), Kap. 11.

[5]) Zur Unterscheidung soll der Charakter einer irreduziblen Darstellung auch *einfacher* Charakter heißen.

Hilfssatz 1. *Es sei* $\mathfrak{D}$ *eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{P}_n$, *die dem Element* P *aus* $\mathfrak{P}_n$ *die Matrix*

$$D(P) = (d_{\alpha\beta}^P)$$

des Grades m *zuordnet, mit dem Charakter*

$$\varphi(P) = \sum_{\varkappa} h_\varkappa \chi_\varkappa(P) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k);$$

ferner sei $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *eine (nicht notwendig linear unabhängige) Basis eines* $\mathfrak{P}_n$*-Moduls* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$, *die die Beziehungen*

$$g_\alpha^P(x) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta}^P g_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

für alle Permutationen P *aus* $\mathfrak{P}_n$ *erfüllt. Dann gelten für den Charakter*

$$\varphi^*(P) = \sum_{\varkappa} h_\varkappa^* \chi_\varkappa(P)$$

der durch den Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *erzeugten Darstellung von* $\mathfrak{P}_n$ *die Ungleichungen* $h_\varkappa^* \leqq h_\varkappa$.

Dieser Satz ist ein Spezialfall eines Satzes von B. L. van der Waerden [6]). Unmittelbar aus dem Zerfällungsbegriff der Darstellungstheorie folgt der

Hilfssatz 2. *Ist der* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f^*(x))$ *Untermodul des* $\mathfrak{P}_n$*-Moduls* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$, *so gelten für die Charaktere*

$$\varphi(P) = \sum_{\varkappa} h_\varkappa \chi_\varkappa(P); \quad \varphi^*(P) = \sum_{\varkappa} h_\varkappa^* \chi_\varkappa(P)$$

der durch die Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *und* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f^*(x))$ *erzeugten Darstellungen von* $\mathfrak{P}_n$ *die Ungleichungen* $h_\varkappa^* \leqq h_\varkappa$.

Aus dem Hilfssatz 1 erhält man leicht

Satz 1. *Für den Charakter* $\varphi(P) = \sum_{\varkappa} h_\varkappa \chi_\varkappa(P)$ *der durch den* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *erzeugten Darstellung gilt stets*:

$$h_\varkappa \leqq g_\varkappa \quad \textit{mit} \quad g_\varkappa = \chi_\varkappa(E) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Sind nämlich $P_1, P_2, \ldots, P_h$ die Elemente von $\mathfrak{P}_n$ in einer beliebig festgelegten Reihenfolge, so bilden die Funktionen

$$f^{P_1}(x), f^{P_2}(x), \ldots, f^{P_h}(x)$$

eine (nicht notwendig linear unabhängige) Basis des $\mathfrak{P}_n$-Moduls $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$. Ferner gilt:

$$f^{P_\alpha P}(x) = \sum_{\beta} \delta(P_\alpha P P_\beta^{-1}) f^{P_\beta}(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)$$

für jedes Element P aus $\mathfrak{P}_n$, wenn $\delta(Q) = 0$ für jedes von E verschiedene Element Q aus $\mathfrak{P}_n$, $\delta(E) = 1$ gesetzt wird. Die Matrizen $M(P) = (\delta(P_\alpha P P_\beta^{-1}))$

---

[6]) Vgl. B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin, Julius Springer, 1932, S. 74; vgl. auch Specht, ersten Abschnitt des Beweises von Satz I.

des Grades h bilden aber die bekannte *reguläre Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, deren Charakter

$$\psi(P) = \sum_{\varkappa} g_\varkappa \chi_\varkappa(P) = h\,\delta(P)$$

ist. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich damit unmittelbar der Beweis des Satzes.

Bezeichnet wie stets $f(x)$ eine homogene ganzrationale Funktion der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so werde für einen beliebigen einfachen Charakter $\chi_\varkappa(P)$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ die Funktion $\mathsf{X}_\varkappa f(x)$ definiert durch

$$\mathsf{X}_\varkappa f(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_P \chi_\varkappa(P^{-1}) f^P(x), \tag{2}$$

wobei wieder zu summieren ist über alle Elemente P aus $\mathfrak{P}_n$. Für diese Funktionen gelten die Beziehungen:

$$\mathsf{X}_\varkappa(\mathsf{X}_\varkappa f(x)) = \mathsf{X}_\varkappa f(x); \quad \mathsf{X}_\lambda(\mathsf{X}_\varkappa f(x)) = 0 \qquad (\varkappa \neq \lambda). \tag{3}$$

Setzen wir nämlich $\mathsf{X}_\varkappa f(x) = g(x)$, so wird

$$g^Q(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_P \chi_\varkappa(P^{-1}) f^{PQ}(x)$$

und mit $PQ = R$ weiter:

$$g^Q(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_R \chi_\varkappa(Q R^{-1}) f^R(x).$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned}
\mathsf{X}_\lambda \mathsf{X}_\varkappa f(x) = \mathsf{X}_\lambda g(x) &= \frac{g_\lambda}{h} \sum_Q \chi_\lambda(Q^{-1}) g^Q(x) \\
&= \frac{g_\lambda g_\varkappa}{h^2} \sum_{Q,R} \chi_\lambda(Q^{-1}) \chi_\varkappa(Q R^{-1}) f^R(x) \\
&= \frac{g_\lambda g_\varkappa}{h^2} \sum_R \Big(\sum_Q \chi_\lambda(Q^{-1}) \chi_\varkappa(Q R^{-1}) \Big) f^R(x).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Formeln (1) erhält man hieraus die in (3) angegebenen Gleichungen.

Eine Funktion $f(x)$ heißt *in* $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$*-symmetrisch*, wenn $\mathsf{X}_\varkappa f(x) = f(x)$ gilt. Nach (3) ist offensichtlich bei beliebiger Funktion $h(x)$ stets $\mathsf{X}_\varkappa h(x)$ in $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrisch.

Satz 2. *Ist $f(x)$ eine von Null verschiedene in $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrische Funktion, so hat der Charakter $\varphi(P)$ der durch den $\mathfrak{P}_n$-Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ erzeugten Darstellung die Gestalt:*

$$\varphi(P) = h_\varkappa \chi_\varkappa(P)$$

mit einer positiven ganzen Zahl $h_\varkappa \leqq g_\varkappa$.

Beim Beweise machen wir wieder vom Hilfssatz 1 Gebrauch. Da $f(x)$ nach Voraussetzung in $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrisch ist, gilt

$$f(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_Q \chi_\varkappa(Q^{-1}) f^Q(x),$$

woraus weiter

$$f^{P_\alpha P}(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_Q \chi_\varkappa(Q^{-1}) f^{Q P_\alpha P}(x)$$

folgt. Setzt man hierin $Q P_\alpha P = P_\beta$, so erhält man

$$f^{P_\alpha P}(x) = \frac{g_\varkappa}{h} \sum_\beta \chi_\varkappa(P_\alpha P P_\beta^{-1}) f^{P_\beta}(x).$$

Die Funktionen $f^{P_\alpha}(x)$ bilden, wenn $P_1, P_2, \ldots, P_h$ die Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ bezeichnen, eine Basis des $\mathfrak{P}_n$-Moduls $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$. Die Matrizen $C(P) = \left(\frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P_\alpha P P_\beta^{-1})\right)$ vom Grade h sind eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, da aus (1)

$$\sum_\beta \frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P_\alpha P P_\beta^{-1}) \frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P_\beta Q P_\gamma^{-1}) = \frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P_\alpha P Q P_\gamma^{-1})$$

leicht entnommen werden kann. Demnach erfüllen die Darstellung $C(P)$ von $\mathfrak{P}_n$ und der Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1, wobei die Darstellung $C(P)$ den Charakter

$$\psi(P) = \sum_\alpha \frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P_\alpha P P_\alpha^{-1}) = g_\varkappa \chi_\varkappa(P)$$

besitzt.

Satz 3. *Der $\mathfrak{P}_n$-Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ ist direkte Summe der $\mathfrak{P}_n$-Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; \mathsf{X}_\varkappa f(x))$:*

$$\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x)) = \mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; \mathsf{X}_1 f(x)) + \mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; \mathsf{X}_2 f(x)) + \ldots + \mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; \mathsf{X}_k f(x)).$$

Da für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Gleichungen

$$(\mathsf{X}_\varkappa f(x))^P = \mathsf{X}_\varkappa f^P(x); \quad \mathsf{X}_\varkappa(f(x) + g(x)) = \mathsf{X}_\varkappa f(x) + \mathsf{X}_\varkappa g(x)$$

gelten, genügt es zu zeigen, daß jede Funktion $f(x)$ eindeutig in $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrische Summanden zerlegt werden kann. Für die Charaktere $\chi_\varkappa(P)$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ gilt:

$$\sum_\varkappa g_\varkappa \chi_\varkappa(P) = h \delta(P)$$

und daher:

$$f(x) = \sum_P \delta(P^{-1}) f^P(x) = \sum_P \left(\sum_\varkappa \frac{g_\varkappa}{h} \chi_\varkappa(P^{-1})\right) f^P(x)$$

$$= \sum_\varkappa \frac{g_\varkappa}{h} \left(\sum_P \chi_\varkappa(P^{-1}) f^P(x)\right) = \sum_\varkappa \mathsf{X}_\varkappa f(x)$$

Da jede der Funktionen $\mathsf{X}_\varkappa f(x)$ in $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrisch ist, gibt es demnach eine Zerlegung von $f(x)$ in $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrische Summanden. Ist andererseits

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

und hierin $f_\varkappa(x)$ in $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$-symmetrisch, so gilt

$$f(x) = \sum_\varkappa f_\varkappa(x) = \sum_\varkappa \mathsf{X}_\varkappa f_\varkappa(x)$$

und daher

$$\mathsf{X}_\lambda f(x) = \mathsf{X}_\lambda\left(\sum_\varkappa \mathsf{X}_\varkappa f_\varkappa(x)\right) = \sum_\varkappa \mathsf{X}_\lambda \mathsf{X}_\varkappa f_\varkappa(x) = f_\lambda(x)$$

auf Grund der Formeln (3).

Der Satz 3 liefert eine Zerfällung der durch den Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ erzeugten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{P}_n$; hat diese Darstellung den Charakter $\varphi(P) = \sum_\varkappa h_\varkappa \chi_\varkappa(P)$, so erzeugen die Teilmoduln $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; \mathsf{X}_\varkappa f(x))$ Darstellungen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_k$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ mit den Charakteren $h_1\chi_1(P)$, $h_2\chi_2(P), \ldots,$ $h_k\chi_k(P)$. Insbesondere erhält man:

Satz 3*. *Im Charakter* $\varphi(P) = \sum_\varkappa h_\varkappa \chi_\varkappa(P)$ *der durch den* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *erzeugten Darstellung ist* $h_\lambda = 0$ *dann und nur dann, wenn* $\mathsf{X}_\lambda f(x) = 0$ *ist.*

Ebenso leicht erkennt man die folgende schärfere Fassung des Satzes 2:

Satz 2*. *Der Charakter* $\varphi(P)$ *der durch den* $\mathfrak{P}_n$*-Modul* $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_n; f(x))$ *erzeugten Darstellung hat dann und nur dann die Gestalt* $\varphi(P) = h_\varkappa \chi_\varkappa(P)$, *wenn die Funktion* $f(x)$ *in* $\mathfrak{P}_n$ $\mathsf{X}_\varkappa$*-symmetrisch ist.*

II.

Da die Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ bildet, stelle ich in diesem Abschnitt zunächst diese Dinge noch einmal kurz zusammen.

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist gleich der Anzahl der Zerlegungen

$$(\mu)\colon\ n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r \quad (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_r > 0)$$

von n in nichtnegative ganze Zahlen. Den der Zerlegung (μ) von n entsprechenden einfachen Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ bezeichne man mit $\chi^{(\mu)}(P)$, den Grad dieses Charakters mit $f^{(\mu)} = \chi^{(\mu)}(E)$.

Zu jeder Zerlegung (μ) von n gehört eine wohlbestimmte zweite, die zu (μ) *assoziierte* Zerlegung (μ^*), die aus (μ) durch die folgende Vorschrift bestimmt wird: Ist (μ) die Zerlegung $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$, so bilde man eine Matrix von r Zeilen und μ_1 Spalten, indem man in die ϱ-te Zeile zunächst μ_ϱ Einer von links nach rechts, danach $\mu_1 - \mu_\varrho$ Nullen setzt (für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Die Spaltensummen $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_s^*$ mit $s = \mu_1$ geben

dann eine neue Zerlegung (μ^*) von n, die zu (μ) assoziierte Zerlegung. Offenbar ist (μ) wieder zu (μ^*) assoziiert. Für $n \geqq 3$ gibt es auch solche Zerlegungen (μ) von n, für die $(\mu) = (\mu^*)$ ist; diese Zerlegungen werden *selbstassoziiert* genannt [7]).

Die zu zwei assoziierten Zerlegungen (μ) und (μ^*) gehörenden einfachen Charaktere $\chi^{(\mu)}(P)$ und $\chi^{(\mu^*)}(P)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ werden gleichfalls assoziiert genannt; sie stehen in der Beziehung:

$$\chi^{(\mu^*)}(P) = \zeta(P)\,\chi^{(\mu)}(P),$$

worin $\zeta(P) = \pm 1$ zu setzen ist, je nachdem die Permutation P gerade oder ungerade ist [8]). Für einen *selbstassoziierten* einfachen Charakter $\chi^{(\mu)}(P)$, der einer selbstassoziierten Zerlegung (μ) von n entspricht, folgt daraus

$$\chi^{(\mu)}(U) = 0$$

für jede ungerade Permutation U aus $\mathfrak{S}_n$.

Einer Zerlegung (μ) von n entspricht ferner das Schema:

$$(\mathfrak{s}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu_1 \\ \mu_1 + 1 & \mu_1 + 2 & \dots & \mu_1 + \mu_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n - \mu_r + 1 & n - \mu_r + 2 & \dots & n \end{pmatrix} \tag{4}$$

der Ziffern $1, 2, \dots, n$, in dem die ϱ-te Zeile μ_ϱ Ziffern enthält $(\varrho = 1, 2, \dots, r)$. Die Gruppe aller Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$, die die Ziffern der Zeilen des Schemas $(\mathfrak{s})$ nur unter sich vertauschen, heiße $\mathfrak{P}^{(\mu)}$; die Gruppe aller Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$, die die Ziffern der Spalten des Schemas $(\mathfrak{s})$ nur unter sich vertauschen, heiße $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$.

Durch eine Permutation P aus $\mathfrak{S}_n$ geht das Schema $(\mathfrak{s})$ in ein neues der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{\mu_1} \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_{\mu_2} \\ \vdots & \vdots \\ \varrho_1 & \varrho_2 \dots \varrho_{\mu_r} \end{pmatrix}$$

---

[7]) Als Beispiel gebe ich alle selbstassoziierten Zerlegungen für die Grade $n \leqq 10$:
$3 = 2 + 1$; $4 = 2 + 2$; $5 = 3 + 1 + 1$; $6 = 3 + 2 + 1$;
$7 = 4 + 1 + 1 + 1$; $8 = 4 + 2 + 1 + 1$; $8 = 3 + 3 + 2$;
$9 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1$; $9 = 3 + 3 + 3$;
$10 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1$; $10 = 4 + 3 + 2 + 1$.

[8]) $\zeta(P)$ bedeutet nichts anderes als den alternierenden Charakter der Gruppe $\mathfrak{S}_n$, der der Zerlegung $n = 1 + 1 + \dots + 1$ entspricht. Für diese Begriffe vgl. G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1900, S. 516–534, § 6; G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1903, S. 328–358, § 5. [Die zweite Arbeit weiterhin mit Frobenius (2) zitiert.]

über; unter diesen Schemata gibt es genau $f^{(\mu)}$ *ausgezeichnete* Schemata, d. h. solche, in denen die Ziffern in Zeilen und Spalten nur zunehmen. Die ihnen entsprechenden Permutationen mögen mit

$$A_1, A_2, \ldots, A_f \qquad (f = f^{(\mu)})$$

bezeichnet werden.

Setzen wir nun für eine Zerlegung (μ) von n

$$\delta(x) = (x_1 x_2 \ldots x_{\mu_1})^0 (x_{\mu_1+1} x_{\mu_1+2} \ldots x_{\mu_1+\mu_2})^1 \ldots (x_{n-\mu_r+1} x_{n-\mu_r+2} \ldots x_n)^{r-1}$$

und

$$d_{(\mu)}(x) = \sum_Q \zeta(Q)\, \delta^Q(x),$$

wobei zu summieren ist über alle Permutationen der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$, so erzeugt der Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{S}_n; d_{(\mu)}(x))$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter $\chi^{(\mu)}(P)$; die $f^{(\mu)}$ Funktionen

$$d_{(\mu)}^{A_\varkappa}(x) = \sum_Q \zeta(Q)\, \delta^{Q A_\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, f^{(\mu)})$$

bilden ein zugehöriges Eigensystem [9]).

Die Ergebnisse von G. Frobenius über die Charaktere der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$ lassen sich, soweit sie hier gebraucht werden, unseren Bezeichnungen entsprechend in folgender Form darstellen [10]):

Eine beliebige Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$, die der Permutation P die Matrix $D(P)$ zuordnet, induziert in den Matrizen $D(A)$ für alle geraden Permutationen A eine Darstellung der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$. Der Charakter $\varphi(P)$ der Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ liefert daher in den Werten $\varphi(A)$ einen Charakter der Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

Ist nun (μ) eine nicht selbstassoziierte Zerlegung von n, so induziert eine (irreduzible) Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter $\chi^{(\mu)}(P)$ eine gleichfalls irreduzible Darstellung $\mathfrak{H}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{A}_n$ mit dem einfachen Charakter $\chi^{(\mu)}(A)$. Dabei sind die, zwei verschiedenen nicht selbstassoziierten Zerlegungen (μ) und (λ) von n entsprechenden, einfachen Charaktere $\chi^{(\mu)}(A)$ und $\chi^{(\lambda)}(A)$

---

[9]) Das Vorangehende ist nur eine andere Schreibweise der Sätze I und II in Specht; vgl. auch W. Specht, Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 774—779.

[10]) Vgl. Frobenius (1), §§ 2 und 3. Hierzu mag man noch folgendes beachten: Frobenius kennzeichnet die einfachen Charaktere der symmetrischen Gruppe nicht durch die Zerlegungen (μ) von n, sondern durch Zahlenschemata $\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_s \\ b_1 b_2 \ldots b_s \end{pmatrix}$. Der Zusammenhang zwischen den beiden Bezeichnungen wird folgendermaßen erhalten:

$$a_1 = \mu_1 - 1,\ a_2 = \mu_2 - 2, \ldots, a_s = \mu_s - s$$

sind die nichtnegativen unter den Werten $\mu_\varrho - \varrho$; die Zahlen $b_1 > b_2 > \ldots > b_s$ sind dadurch bestimmt, daß die absoluten Werte der negativen unter den Zahlen $\mu_\varrho - \varrho$ zusammen mit den Größen $b_1 + 1, b_2 + 1, \ldots, b_s + 1$ die Zahlenreihe $1, 2, \ldots, r$ ausmachen. Vgl. Frobenius (2), § 4. Die Ergebnisse von Frobenius sind hier in der heute üblichen Bezeichnungsweise dargestellt.

von $\mathfrak{A}_n$ dann und nur dann gleich (die zugehörigen irreduziblen Darstellungen also ähnlich), wenn (λ) zu (μ) assoziiert ist[11]).

Die selbstassoziierten Charaktere $\chi^{(u)}(P)$ von $\mathfrak{S}_n$ ergeben dagegen zusammengesetzte Charaktere $\chi^{(u)}(A)$ von $\mathfrak{A}_n$, und zwar ist:

$$\chi^{(u)}(A) = \chi_1^{(u)}(A) + \chi_2^{(u)}(A)$$

mit zwei verschiedenen einfachen Charakteren $\chi_1^{(u)}(A)$, $\chi_2^{(u)}(A)$ der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$, für die die Beziehungen gelten:

$$\chi_1^{(u)}(A) = \chi_2^{(u)}(U^{-1}AU); \quad \chi_2^{(u)}(A) = \chi_1^{(u)}(U^{-1}AU)$$

mit einer beliebigen ungeraden Permutation U aus $\mathfrak{S}_n$[12]).

Bezeichnet man mit $2u$ die Anzahl der nicht selbstassoziierten, mit v die Anzahl der selbstassoziierten Zerlegungen von n, so besitzt $\mathfrak{S}_n$ genau $2u + v$ verschiedene einfache Charaktere, während die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ genau $u + 2v$ verschiedene einfache Charaktere besitzt.

Die Charaktere $\chi_1^{(u)}(A)$, $\chi_2^{(u)}(A)$ von $\mathfrak{A}_n$, die aus dem selbstassoziierten Charakter $\chi^{(u)}(P)$ von $\mathfrak{S}_n$ stammen, können noch näher bestimmt werden. Zu diesem Zwecke bestimme man zu der selbstassoziierten Zerlegung $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$ die Zahlen $c_\varrho = 2\mu_\varrho - 2\varrho + 1$ (für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$); $c_1 > c_2 > \ldots > c_s > 0$ mögen die positiven Zahlen unter ihnen sein. Dann ist

$$n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$$

eine Zerlegung von n in verschiedene positive ungerade Zahlen. Umgekehrt erhält man aus jeder derartigen Zerlegung von n eine selbstassoziierte Zerlegung (μ) von n[13]).

Jeder Zerlegung $n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$ in verschiedene positive ungerade Zahlen entspricht in der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ eine bestimmte Ähnlichkeitsklasse $\{c\}$, nämlich die Klasse aller (geraden) Permutationen, die aus s ziffernfremden Zyklen der Ordnungen $c_1, c_2, \ldots, c_s$ bestehen. In der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ zerfallen diese Klassen in je zwei Klassen ähnlicher Elemente; diese beiden Klassen mögen mit $\{c\}_1$, $\{c\}_2$ bezeichnet werden. Durchläuft B alle Elemente

---

[11]) Vgl. Frobenius (1), zu Beginn von § 2.

[12]) Vgl. Frobenius (1), § 2, Formel (2).

[13]) Vgl. Frobenius (1), § 3, Formel (2). Man kann die Zahlen c_ϱ sehr leicht anschaulich in Zusammenhang mit der selbstassoziierten Zerlegung (μ) von n bringen. Im Schema (5) stehen in der ersten Zeile und ersten Spalte gerade c_1 Zahlen; streicht man diese fort, so verbleibt ein Schema von $n - c_1$ Zahlen, in dessen erster Zeile und erster Spalte genau c_2 Zahlen stehen, und so fort. — Zu den in [7]) angegebenen selbstassoziierten Zerlegungen für die Grade $n \leqq 10$ gehören die nachstehend aufgeführten Zerlegungen in ungerade verschiedene Zahlen:

$$3 = 3; \quad 4 = 3 + 1; \quad 5 = 5; \quad 6 = 5 + 1;$$
$$7 = 7; \quad 8 = 7 + 1; \quad 8 = 5 + 3; \quad 9 = 9;$$
$$9 = 5 + 3 + 1; \quad 10 = 9 + 1; \quad 10 = 7 + 3.$$

der einen Klasse, so durchläuft $U^{-1}BU$ mit einer beliebigen ungeraden Permutation U aus $\mathfrak{S}_n$ die andere Klasse. Die an sich willkürliche Bezeichnung der Klassen mag durch die Bestimmung festgelegt werden, daß das Element

$$C = (1, 2, \ldots, c_1)\,(c_1 + 1,\ c_1 + 2,\ \ldots,\ c_1 + c_2)\ldots (n - c_s + 1,\ n - c_s + 2, \ldots, n)$$

zur Klasse $\{c\}_1$ gehöre.

Die beiden der selbstassoziierten Zerlegung (μ) von n entsprechenden Charaktere $\chi_1^{(\mu)}(A)$, $\chi_2^{(\mu)}(A)$ von $\mathfrak{A}_n$ haben mit diesen Bezeichnungen die folgende Gestalt:

Es ist

$$\chi_1^{(\mu)}(A) = \chi_2^{(\mu)}(A) = \tfrac{1}{2}\chi^{(\mu)}(A),$$

wenn A keiner der beiden Klassen $\{c\}_1$, $\{c\}_2$ angehört, wobei

$$n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$$

die der Zerlegung (μ) von n eineindeutig zugeordnete Zerlegung von n in verschiedene positive ungerade Zahlen bezeichnet. Dagegen ist:

$$\chi_1^{(\mu)}(B) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon p});\quad \chi_1^{(\mu)}(B^*) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon p}),$$
$$\chi_2^{(\mu)}(B) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon p});\quad \chi_2^{(\mu)}(B^*) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon p}),$$

wenn B zur Klasse $\{c\}_1$, B^* zur Klasse $\{c\}_2$ gehört, und

$$p = c_1 c_2 \ldots c_s; \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

gesetzt wird[14]).

III.

Unmittelbar aus dem im vorigen Abschnitt Mitgeteilten folgt

Satz 4. *Ist (μ) eine nicht selbstassoziierte Zerlegung von n, so erzeugt der $\mathfrak{A}_n$-Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\mu)}(x))$ mit der Funktion*

$$d_{(\mu)}(x) = \sum_Q \zeta(Q)\,\delta^Q(x),$$

wobei über die Elemente Q von $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ zu summieren ist, eine irreduzible Darstellung der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$ mit dem Charakter $\chi^{(\mu)}(A)$. Sind (μ) und (λ) zwei verschiedene nicht selbstassoziierte Zerlegungen von n, so sind die von den Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\mu)}(x))$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\lambda)}(x))$ erzeugten (irreduziblen) Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ dann und nur dann ähnlich, wenn (λ) zu (μ) assoziiert ist.

Die Funktionen

$$d_{(\mu)}^{A_\varkappa}(x) = \sum_Q \zeta(Q)\,\delta^{Q A_\varkappa}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, f^{(\mu)})$$

bilden ein zum $\mathfrak{A}_n$-Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\mu)}(x))$ gehöriges Eigensystem.

---

[14]) Vgl. Frobenius (1), § 3, Formeln (6), (7) und (8).

Demnach bleiben allein die den selbstassoziierten Zerlegungen $(\mu) = (\mu^*)$ von n entsprechenden $\mathfrak{A}_n$-Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\mu)}(x))$ zu untersuchen. Man zeigt für diese Moduln sehr leicht, daß auch hier die Gleichung gilt:

$$\mathsf{M}(\mathfrak{S}_n; d_{(\mu)}(x)) = \mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_{(\mu)}(x)).$$

Ferner setzen wir der einfacheren Schreibweise wegen

$$\chi^{(\mu)}(P) = \chi(P); \quad f^{(\mu)} = f; \quad d_{(\mu)}(x) = d(x)$$

für die jeweils in Untersuchung stehende selbstassoziierte Zerlegung (μ) von n.

Ist $(\mu) = (\mu^*)$ eine selbstassoziierte Zerlegung von n, so zerfällt der ihr entsprechende Charakter $\chi(A)$ der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ in zwei verschiedene einfache Charaktere $\chi_1(A)$ und $\chi_2(A)$ vom Grade $\frac{1}{2}f$:

$$\chi(A) = \chi_1(A) + \chi_2(A).$$

Bestimmen wir daher die beiden Funktionen:

$$d_1(x) = \mathsf{X}_1 d(x) = \frac{f}{n!} \sum_A \chi_1(A^{-1}) d^A(x),$$

$$d_2(x) = \mathsf{X}_2 d(x) = \frac{f}{n!} \sum_A \chi_2(A^{-1}) d^A(x),$$

wobei zu summieren ist über alle Elemente A der Gruppe $\mathfrak{A}_n$, so ist nach Satz 3:

$$\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d(x)) = \mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_1(x)) + \mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_2(x)).$$

Die Charaktere der durch die Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_1(x))$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_2(x))$ erzeugten Darstellungen sind $\chi_1(A)$ bzw. $\chi_2(A)$, also einfach, die Darstellungen selbst demnach irreduzibel.

Somit handelt es sich allein noch um die Aufgabe, die Funktionen $d_1(x)$ und $d_2(x)$ auf eine einfachere Weise zu beschreiben, als dies die Gleichungen

$$d_1(x) = \mathsf{X}_1 d(x); \quad d_2(x) = \mathsf{X}_2 d(x)$$

tun, da nach diesen Gleichungen die rechnerische Bestimmung der Funktionen $d_1(x)$ und $d_2(x)$ von der Berechnung des Charakters $\chi(P)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ abhängt.

Da der Modul $\mathsf{M}(\mathfrak{S}_n; d(x))$ die irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter $\chi^{(\mu)}(P)$ erzeugt, ist $d(x)$ nach Satz 2* in $\mathfrak{S}_n$ $\mathsf{X}^{(\mu)}$-symmetrisch; ferner gilt für einen selbstassoziierten Charakter

$$\chi^{(\mu)}(U) = 0, \quad \text{falls} \quad \zeta(U) = -1.$$

Daher besteht die Gleichung

$$d(x) = \frac{f}{n!} \sum_P \chi(P^{-1}) d^P(x) = \frac{f}{n!} \sum_A \chi(A^{-1}) d^A(x),$$

wobei P alle Elemente von $\mathfrak{S}_n$, A alle Elemente von $\mathfrak{A}_n$ durchläuft. Daraus folgt

$$d(x) = d_1(x) + d_2(x).$$

Man setze daher

$$d_1(x) = \tfrac{1}{2} d(x) + f(x); \quad d_2(x) = \tfrac{1}{2} d(x) - f(x).$$

Dann erhält man für $f(x)$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= d_1(x) - \tfrac{1}{2} d(x) \\ &= \frac{f}{n!} \sum_A \left(\chi_1(A^{-1}) - \frac{1}{2}\chi(A^{-1})\right) d^A(x) \\ &= \frac{f}{n!} \sum_A \frac{1}{2}\left(\chi_1(A^{-1}) - \chi_2(A^{-1})\right) d^A(x), \end{aligned}$$

wobei über alle Elemente A aus $\mathfrak{A}_n$ zu summieren ist. Die am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Werte der beiden Charaktere $\chi_1(A)$ und $\chi_2(A)$ geben weiter

$$f(x) = \frac{f}{n!} \sum_B \frac{1}{2}\left(\chi_1(B^{-1}) - \chi_2(B^{-1})\right) d^B(x),$$

wobei nun über alle Elemente B der Klasse $\{c\}$ von $\mathfrak{S}_n$ zu summieren ist. Dafür kann auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{f}{n!} &\sum_D \frac{1}{2}\left(\chi_1(D^{-1}) - \chi_2(D^{-1})\right) d^D(x) \\ + \frac{f}{n!} &\sum_D \frac{1}{2}\left(\chi_1(U^{-1}D^{-1}U) - \chi_2(U^{-1}D^{-1}U)\right) d^{U^{-1}DU}(x), \end{aligned}$$

wenn U eine beliebige ungerade Permutation aus $\mathfrak{S}_n$ bedeutet, und die Summation über die Elemente D der Klasse $\{c\}_1$ von $\mathfrak{A}_n$ erstreckt wird. Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f}{n!} \sum_D \frac{1}{2}\left(\chi_1(D^{-1}) - \chi_2(D^{-1})\right)\left(d^D(x) - d^{U^{-1}DU}(x)\right) \\ &= \frac{f\varepsilon\sqrt{\varepsilon p}}{2\,n!} \sum_D \left(d^D(x) - d^{U^{-1}DU}(x)\right). \end{aligned}$$

Nun sei C das im Abschnitt II eingeführte Element der Klasse $\{c\}_1$. Durchläuft A alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}_n$, so durchläuft $A^{-1}CA$ alle Elemente der Klasse $\{c\}_1$, wobei jedes Element dieser Klasse genau $p = c_1 c_2 \ldots c_s$ mal in dieser Reihe vorkommt. Daher gilt

$$\sum_D d^D(x) = \frac{1}{p} \sum_A d^{A^{-1}CA}(x),$$

ebenso

$$\sum_D d^{U^{-1}DU}(x) = \frac{1}{p} \sum_A d^{A^{-1}U^{-1}CUA}(x),$$

weshalb man schreiben kann:

$$\sum_D \left(d^D(x) - d^{U^{-1}DU}(x)\right) = \frac{1}{p} \sum_A \zeta(R)\, d^{R^{-1}CR}(x),$$

wobei R alle Permutationen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durchläuft. Demnach erhalten wir

$$f(x) = \frac{f}{2\,n!\sqrt{\varepsilon\,p}} \sum_R \zeta(R)\, d^{R^{-1}\,C\,R}(x)$$

und damit schließlich

$$d_1(x) = \frac{1}{2}\, d(x) + \frac{f}{2\,n!\sqrt{\varepsilon\,p}} \sum_R \zeta(R)\, d^{R^{-1}\,C\,R}(x);$$

$$d_2(x) = \frac{1}{2}\, d(x) - \frac{f}{2\,n!\sqrt{\varepsilon\,p}} \sum_R \zeta(R)\, d^{R^{-1}\,C\,R}(x).$$

An Stelle der Funktionen $d_1(x)$ und $d_2(x)$ können wir auch die beiden Funktionen $2\sqrt{\varepsilon\,p}\,d_1(x)$ und $2\sqrt{\varepsilon\,p}\,d_2(x)$ wählen, da sie ja auch die Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_1(x))$ bzw. $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; d_2(x))$ bestimmen. Somit erhalten wir den

Satz 5. *Ist* $(\mu) = (\mu^*)$ *eine selbstassoziierte Zerlegung von* n *und* $n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$ *die ihr entsprechende Zerlegung von* n *in verschiedene positive ungerade Zahlen, so setze man mit der zu* (μ) *gehörigen Funktion* $d_{(\mu)}(x)$ *und der festen Permutation*

$$C = (1, 2, \ldots, c_1)\,(c_1 + 1,\ c_1 + 2,\ \ldots,\ c_1 + c_2)\ldots$$
$$(n - c_s + 1,\ n - c_s + 2,\ \ldots,\ n)$$

$D_{(\mu)}(x)$ *gleich der Funktion*

$$D_{(\mu)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_R \zeta(R)\, d_{(\mu)}^{R^{-1}\,C\,R}(x),$$

worin R *alle Permutationen von* $\mathfrak{S}_n$ *durchläuft; ferner sei*

$$p = c_1\, c_2 \ldots c_s; \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

und

$$g_{(\mu)}(x) = \sqrt{\varepsilon\,p}\; d_{(\mu)}(x) + f^{(\mu)}\, D_{(\mu)}(x);$$
$$h_{(\mu)}(x) = \sqrt{\varepsilon\,p}\; d_{(\mu)}(x) - f^{(\mu)}\, D_{(\mu)}(x).$$

Dann erzeugen die Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; g_{(\mu)}(x))$ *und* $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; h_{(\mu)}(x))$ *die beiden zur selbstassoziierten Zerlegung* (μ) *von* n *gehörigen irreduziblen Darstellungen der Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *mit den Charakteren* $\chi_1^{(\mu)}(A)$ *bzw.* $\chi_2^{(\mu)}(A)$.

Zu den beiden $\mathfrak{A}_n$-Moduln $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; g_{(\mu)}(x))$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; h_{(\mu)}(x))$ können auf einem einfachen Wege auch Eigensysteme angegeben werden. Wir bemerken dazu, daß das Schema (s) für eine selbstassoziierte Zerlegung (μ) von n zu der Hauptdiagonale symmetrisch ist. Daher gibt es eine Permutation T der Ordnung 2, die das Schema (s) an der Hauptdiagonale zu einem anderen ausgezeichneten Schema spiegelt. Sind somit $A_1, A_2, \ldots, A_f$ die zu (μ) gehörenden ausgezeichneten Permutationen, so bilden auch die

Permutationen TA_1, TA_2, ..., TA_f die gleiche Reihe von Permutationen. Bezeichnen wir mit

$$B_1, B_2, \ldots, B_g \qquad \left(g = \frac{f^{(\mu)}}{2}\right)$$

diejenigen Permutationen unter den A_x, die die Ziffer 2 *nicht* festlassen, so sind die Permutationen

$$TB_1, TB_2, \ldots, TB_g$$

diejenigen der ausgezeichneten Permutationen, die die Ziffer 2 festlassen, da in einem ausgezeichneten Schema ja die Ziffer 2 rechts neben oder unter der bei allen an erster Stelle stehenden Ziffer 1 stehen muß. Dann gilt

Satz 5*. *Die Funktionen*

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\varepsilon p}\,\zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha}_{(\mu)}(x) + f^{(\mu)}\,D^{B_\alpha}_{(\mu)}(x) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, g)$$

bilden ein Eigensystem des Moduls $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; g_{(\mu)}(x))$, *ebenso die Funktionen*

$$h_\alpha(x) = \sqrt{\varepsilon p}\,\zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha}_{(\mu)}(x) - f^{(\mu)}\,D^{B_\alpha}_{(\mu)}(x) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, g)$$

ein Eigensystem des Moduls $\mathsf{M}(\mathfrak{A}_n; h_{(\mu)}(x))$.

Zum Beweise des Satzes setzen wir wieder zur Vereinfachung der Schreibweise

$$d_{(\mu)}(x) = d(x); \qquad D_{(\mu)}(x) = D(x); \qquad f^{(\mu)} = f$$

für die augenblicklich behandelte selbstassoziierte Zerlegung (μ) von n. Aus der im Abschnitt II angegebenen Gestalt der Funktion $d(x)$ erkennt man sehr leicht, daß für jede Permutation Q der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ gilt:

$$d^Q(x) = \zeta(Q)\,d(x).$$

Hieraus folgt für die Funktion $D(x)$ und jedes Q aus $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ die Gleichung

$$D^Q(x) = D(x).$$

Denn es ist

$$D^Q(x) = \frac{1}{n!}\sum_R \zeta(R)\,d^{R^{-1}CRQ}(x)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_R \zeta(R)\,\zeta(Q)\,d^{Q^{-1}R^{-1}CRQ}(x),$$

und wenn $RQ = S$ gesetzt wird:

$$D^Q(x) = \frac{1}{n!}\sum_S \zeta(S)\,d^{S^{-1}CS}(x) = D(x).$$

Daher gilt für die Funktion

$$g(x) = \sqrt{\varepsilon p}\,d(x) + f\,D(x)$$

und jedes Q aus $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$:

$$g^Q(x) = \zeta(Q)\sqrt{\varepsilon p}\,d(x) + f\,D(x).$$

Ist nun B eine Permutation der Reihe $B_1, B_2, \ldots, B_g$, so sei Q ein beliebiges Element aus $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$, für das $\zeta(Q) = \zeta(B)$ ist. Dann ist QB eine gerade Permutation, also

$$g^{QB}(x) = \sqrt{\varepsilon p}\,\zeta(B)\,d^B(x) + f\,D^B(x)$$

und weiter alle Funktionen

$$g_\alpha(x) = \sqrt{\varepsilon p}\,\zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha}(x) + f\,D^{B_\alpha}(x)$$

im Modul $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n;\ g(x))$ enthalten.

Nehmen wir nun an, es bestünde eine lineare Beziehung

$$\sum_\alpha a_\alpha g_\alpha(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, g),$$

so gilt auch mit der Permutation T die Beziehung

$$\sum_\alpha a_\alpha g_\alpha^T(x) = 0,$$

die in der Form geschrieben werden kann:

$$\sqrt{\varepsilon p}\sum_\alpha a_\alpha \zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha T}(x) + f\sum_\alpha a_\alpha D^{B_\alpha T}(x) = 0. \tag{5}$$

Die Permutationen TB_α lassen sämtlich die Ziffern 1, 2 fest, die Permutation T läßt 1 fest und führt 2 in die Ziffer $\mu_1 + 1$ über. Daher läßt jedes $B_\alpha T = T(TB_\alpha)T$ die Ziffern 1, $\mu_1 + 1$ fest. Also ist jede der Permutationen $B_\alpha T$ mit der in der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ enthaltenen Vertauschung $V = (1, \mu_1 + 1)$ vertauschbar.

Somit erhalten wir aus (5) durch Anwendung der Permutation V:

$$\sqrt{\varepsilon p}\sum_\alpha a_\alpha \zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha T V}(x) + f\sum_\alpha a_\alpha D^{B_\alpha T V}(x) = 0$$

oder

$$-\sqrt{\varepsilon p}\sum_\alpha a_\alpha \zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha T}(x) + f\sum_\alpha a_\alpha D^{B_\alpha T}(x) = 0 \tag{6}$$

wegen

$$-d^V(x) = d(x); \qquad D^V(x) = D(x).$$

Aus (5) und (6) ergibt sich mithin

$$\sum_\alpha a_\alpha \zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha T}(x) = 0,$$

oder auch

$$\sum_\alpha a_\alpha \zeta(B_\alpha)\,d^{B_\alpha}(x) = 0.$$

Die Funktionen $d^{B_\alpha}(x)$ sind aber linear unabhängig, weshalb

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_g = 0$$

sein muß[15]).

Genau ebenso wird die Aussage des Satzes über den $\mathfrak{A}_n$-Modul $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n;\ h_{(\mu)}(x))$ bewiesen.

[15]) Auf Grund des Satzes II in Specht.

IV.

In der Darstellungstheorie endlicher Gruppen spielt auch die Frage eine wesentliche Rolle, in welchen algebraischen Zahlkörpern die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe rational darstellbar sind. Man nennt eine irreduzible Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ *rational im Körper* K, wenn eine zu ihr ähnliche Darstellung gefunden werden kann, deren Matrizen nur Elemente aus diesem Körper K besitzen. Bezeichnet K_r den Körper der r-ten Einheitswurzeln, so legt man vor allem Wert auf die Bestimmung des Körpers K_m von kleinster Ordnung m, in dem eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ rational ist. Dieser Körper K_m heiße *Darstellungskörper* dieser irreduziblen Darstellung. Unter dem *Darstellungskörper* K_N *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ verstehe man den Körper von kleinster Ordnung N, in dem sämtliche irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ rational sind[16]). Die Ordnung N des Darstellungskörpers K_N der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dabei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ordnungen m der Darstellungskörper K_m aller wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$[17]).

Für die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ beweisen wir in dieser Richtung die beiden nachstehenden Sätze:

Satz 6. *Ist* (μ) *eine nicht selbstassoziierte Zerlegung von* n, *so besitzt die ihr zugeordnete irreduzible Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{A}_n$ *den Körper* K_1 *als Darstellungskörper.*

Ist (μ) *eine selbstassoziierte Zerlegung von* n, *so bestimme man die positiven Zahlen* $c_1, c_2, \ldots, c_s$ *aus der Reihe der Zahlen* $2\mu_\varrho - 2\varrho + 1$ *(für* $\varrho = 1, 2, \ldots, r$*) und setze*

$$p = c_1 c_2 \ldots c_s = a^2 b$$

mit natürlichen Zahlen a, b *und quadratfreiem* b. *Dann besitzen die beiden der Zerlegung* (μ) *von* n *entsprechenden irreduziblen Darstellungen von* $\mathfrak{A}_n$ *den Körper* K_b *als Darstellungskörper.*

---

[16]) Daß eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung g einen Darstellungskörper K_h mit $h \leqq g$ besitze, vermutete W. Burnside, On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions of finite order, Proceedings London Math. Soc. (2) **4** (1906), S. 1—9. Diese Vermutung ist für spezielle Gruppentypen mehrfach, für auflösbare Gruppen allgemein von I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1906, S. 164—184, bewiesen worden. Daß zu jeder endlichen Gruppe ein Darstellungskörper existiert, zeigten R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **167** (1932), S. 399—404, Satz 6. — In diesem Zusammenhang bezeichnet K_1 den Körper der rationalen Zahlen.

[17]) Man beweist dies am einfachsten mit Hilfe des Satzes VI aus I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Transactions Amer. Math. Soc. **15** (1909), S. 159—175. Vgl. auch W. Specht, Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung **47** (1937), S. 43—55, Satz IV.

Satz 7. *Es bezeichne $P(n)$ für $n \geqq 3$ das Produkt aller ungeraden Primzahlen unterhalb n; man definiere die Funktion $N = N(n)$ durch folgende Festsetzung:*

Es ist

$$N(6) = 3; \quad N(7) = 7; \quad N(10) = 3 \cdot 7 = 21,$$

$$N(11) = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231; \quad N(14) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145.$$

Es ist für alle anderen Zahlen n: $N(n) = P(n)$ im allgemeinen, $N(n) = \frac{1}{n-2} P(n)$, wenn $n - 2$ eine ungerade Primzahl ist. Dann besitzt für $n \geqq 3$ die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ den Körper K_N als Darstellungskörper[18]).

Zum Beweise setze man für irgendeine ungerade Zahl q

$$\varepsilon_q = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}.$$

Dann ist bekanntlich [19]) für jede ungerade Primzahl q die Zahl $\omega_q = \sqrt{\varepsilon_q q}$ im Körper K_q enthalten. Andererseits ist K_q der Körper kleinster Ordnung unter allen Körpern K_r, die ω_q enthalten. Ferner gilt für eine beliebige ungerade Zahl p in der Primzahlzerlegung

$$p = q_1 q_2 \cdots q_t$$

die Gleichung

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{q_1} \varepsilon_{q_2} \cdots \varepsilon_{q_t},$$

wie man leicht nachweist. Ist daher p eine ungerade quadratfreie Zahl, so ist ω_p im Körper K_p enthalten, da

$$\omega_p = \omega_{q_1} \omega_{q_2} \cdots \omega_{q_t}$$

gilt; umgekehrt ist K_p der Körper kleinster Ordnung unter allen Körpern K_r, die ω_p enthalten.

Ist nun (μ) eine nicht selbstassoziierte Zerlegung von n, so ist die ihr entsprechende irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ im Körper K_1 rational, da dies für alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ gilt[20]). Ist aber (μ) eine selbstassoziierte Zerlegung von n, ferner $n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$ die ihr entsprechende Zerlegung von n in verschiedene ungerade Zahlen, und

$$p = c_1 c_2 \ldots c_s = a^2 b$$

mit quadratfreiem b, so ist $\varepsilon_p = \varepsilon_b$ und daher $\omega_p = a\,\omega_b$ im Körper K_b enthalten. Somit besitzen die beiden der Zerlegung (μ) entsprechenden irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ den Körper K_b als Darstellungskörper.

---

[18]) Unter den Primzahlen unterhalb n verstehe ich alle Primzahlen, die n nicht überschreiten. — Die Voraussetzung $n \geqq 3$ bedeutet für das gruppentheoretische Problem tatsächlich keine Einschränkung.

[19]) Vgl. C. F. Gauß, Disquisitiones arithmeticae, art. 356 (Werke, Band 1).

[20]) Vgl. Frobenius (2) oder auch den Abschnitt I in Specht.

Denn aus der Gestalt der Funktionen $g_{(u)}(x)$ und $h_{(u)}(x)$ geht zunächst hervor, daß im Körper $\mathsf{K}_1(\omega_b)$ sich diese Darstellungen gewiß rational darstellen lassen. Ferner muß aber ein Körper K_r, in dem sich die Darstellungen rational darstellen lassen, notwendig die Zahl ω_b enthalten.

Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen; zum Beweise des Satzes 7 haben wir lediglich noch zu untersuchen, welche Primzahlen in den quadratfreien Zahlen b vorkommen, die sämtlichen Zerlegungen $n = c_1 + c_2 + \ldots + c_s$ von n in verschiedene positive ungerade Zahlen entsprechen. Bezeichnet daher $M(n)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser Zahlen b, so ist zu zeigen, daß $M(n) = N(n)$ gilt mit der im Satze 7 angegebenen Funktion $N(n)$.

Der Beweis hierfür gliedert sich nach der Form der Zahl n in vier Teile:

1. Es sei $n = 4m$. Zu einer Primzahl[21]) q unterhalb n, die nicht in n aufgeht, können wir stets die Zerlegung

$$n = (4m - q) + q$$

in zwei verschiedene Zahlen angeben. Dann ist $p = q(4m - q)$ zwar durch q, aber nicht durch q^2 teilbar. Daher sind alle Primzahlen unterhalb n, die nicht Teiler von n sind, in $M(n)$ enthalten. Da $n = 4, 8, 16$ keinen ungeraden Primteiler besitzen, ist für diese Zahlen demnach $M(n) = P(n) = N(n)$. Aber auch für $n = 12$ ist dies der Fall, da $12 = 9 + 3$ mit $p = 3^2 \cdot 3$ gilt. Somit können wir weiterhin $n = 4m \geqq 20$ annehmen.

Ist q eine von 3 verschiedene Primzahl, die in n aufgeht, so können wir die Zerlegung

$$n = q + (4m - q - 4) + 3 + 1$$

angeben, da $4m - q - 4 \geqq 3m - 4 \geqq 11$ ist, und überdies $4m - q - 4$ durch q nicht teilbar sein kann. Daher ist hier $p = 3q(4m - q - 4)$ zwar durch q, aber nicht durch q^2 teilbar. Ist aber n durch 3 teilbar, so bilde man die Zerlegung

$$n = (4m - 13) + 9 + 3 + 1,$$

in der $(4m - 13)$ von $9, 3, 1$ verschieden ist. Hier ist $p = 27(4m - 13)$ mit einer durch 3 nicht teilbaren Zahl $4m - 13$.

Demnach ist für $n = 4m$ stets $M(n) = P(n) = N(n)$.

2. Es sei $n = 4m + 2$. Zu einer Primzahl q unterhalb n, die nicht in n aufgeht, können wir die Zerlegung

$$n = q + (4m + 2 - q)$$

---

[21]) Unter Primzahl werde in diesem Zusammenhang stets eine ungerade Primzahl verstanden.

angeben, worin $4m + 2 - q$ durch q nicht teilbar sein kann. Daher sind in $M(n)$ alle Primzahlen unterhalb n enthalten, die nicht Teiler von n sind.

Ist $\frac{n}{2} = 2m + 1 = q$ eine Primzahl, so gibt es bei $q > 7$ die Zerlegung

$$n = q + (q - 4) + 3 + 1,$$

weshalb hier auch q in $M(n)$ enthalten ist, während für die Zahlen $n = 6, 10, 14$ keine Zerlegung in verschiedene ungerade Zahlen möglich ist, in denen die Primzahl $\frac{n}{2}$ als Summand vorkommt. Die Werte $N(6)$, $N(10)$, $N(14)$ sind im Satze 7 besonders angegeben.

Es kann daher weiterhin $n \geqq 18$ angenommen werden. Ist dann q ein von 3 verschiedener Primteiler von n, so besteht die Zerlegung

$$n = (4m - q - 2) + q + 3 + 1,$$

da $4m - q - 2 > 2m - 3 \geqq 5$ ist; außerdem ist $(4m - q - 2)$ durch q nicht teilbar. Demnach ist auch q in $M(n)$ enthalten. Ist aber n durch 3 teilbar, so bilde man die Zerlegung

$$n = (4m - 2) + 3 + 1,$$

worin $4m - 2$ nicht durch 3 teilbar ist.

Demnach ist auch hier, außer in den drei Sonderfällen stets $M(n) = P(n) = N(n)$.

3. Es sei $n = 4m + 1$. Ist n selbst Primzahl, so ist n in $M(n)$ enthalten, da für ungerade Zahlen die Zerlegung $n = n$ vorliegt. Ist dagegen $n - 2$ eine Primzahl, so gibt es keine Zerlegung von n in verschiedene ungerade Zahlen, unter denen $n - 2$ als Summand vorkommt. Daher ist $n - 2$, wenn diese Zahl Primzahl ist, nicht in $M(n)$ enthalten. Ist nun q eine Primzahl, die kleiner als $n - 2$ ist und in $n - 1$ nicht als Teiler enthalten ist, so läßt sich die Zerlegung

$$n = q + (4m - q) + 1$$

angeben, in der $4m - q$ durch q nicht teilbar und von 1 verschieden ist. Daher ist q in $M(n)$ enthalten. Demnach ist in den Fällen $n = 5, 9, 17$, in denen $n - 1$ keinen ungeraden Teiler enthält, $M(n) = N(n)$. Das gleiche gilt aber auch für $n = 13$, da hier $13 = 9 + 3 + 1$ und $n - 2 = 11$ ist. Daher kann $n \geqq 21$ angenommen werden.

Ist dann q ein Teiler von $n - 1$, der von 5 verschieden ist, so können wir die Zerlegung

$$n = (4m - 4 - q) + q + 5$$

angeben, da $4m - 4 - q \geqq 3m - 4 \geqq 11$ ist und $4m - 4 - q$ durch q nicht teilbar ist. Demnach ist q in $M(n)$ enthalten. Ist aber $n - 1$ durch 5 teilbar, so bilde man die Zerlegung

$$n = (4m - 7) + 5 + 3.$$

Dann ist $4m-7$ durch 5 nicht teilbar, demnach ist auch 5 in $M(n)$ enthalten.

4. Es sei $n = 4m+3$. Ist n selbst Primzahl, so ist n in $M(n)$ enthalten; ist dagegen $n-2$ eine Primzahl, so ist $n-2$ sicher nicht in $M(n)$ enthalten. Ist $\frac{n-1}{2} = q$ eine Primzahl, so gibt es dann keine Zerlegung von n in verschiedene ungerade Zahlen, unter denen q vorkommt, wenn die Zahl $q+1 = \frac{n+1}{2}$ allein die Zerlegung $\frac{n+1}{2} = (q)+1$ zuläßt. Dies ist der Fall für $q+1 < 8$, also für die beiden Werte $q = 3{,}5$ oder $n = 7{,}11$, für die die Werte $N(n)$ im Satze besonders angegeben sind. Ist dagegen $n \geqq 15$, so gibt es stets die Zerlegung

$$n = q + (q-2) + 3$$

mit $q > 5$. Daher ist für $n \geqq 15$, wenn $\frac{n-1}{2} = q$ eine Primzahl ist, q in $M(n)$ enthalten.

Ist nun q eine Primzahl unterhalb n, die nicht Teiler von $n-1$ ist, so kann man die Zerlegung

$$n = (4m+2-q) + q + 1$$

angeben, in der $4m+2-q > 1$ und $4m+2-q$ durch q nicht teilbar ist. Daher ist q in $M(n)$ enthalten.

Ist aber q ein Primteiler von $n-1$, der von 3 verschieden ist, so kann man die Zerlegung

$$n = (4m-q) + q + 3$$

angeben, da $4m-q$ durch q nicht teilbar und $4m-q \geqq 2m-1 \geqq 5$ ist. Demnach ist auch q in $M(n)$ enthalten.

Ist aber $n-1$ durch 3 teilbar, so kann die Zerlegung

$$n = (n-12) + 9 + 3$$

gebildet werden, worin $n-12$ durch 3 nicht teilbar ist. Infolgedessen ist 3 in $M(n)$ enthalten und somit auch hier $M(n) = N(n)$.

Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 18. Juli 1937.)

Kreiskurven zweiter Ordnung.

Von

Anton Vakselj in Ljubljana.

Inhalt.

Seite

Einleitung 573
I. Invarianten und Kovarianten der Kreiskurve 578
II. Kanonische Gleichungen und Formen der Kreiskurve 583
III. Allgemeine Eigenschaften der Kreiskurven II. Ordnung 590
IV. Kreise in bezug auf eine Kreiskurve II. Ordnung 595
V. Systeme von Kreiskurven II. Ordnung 600
VI. Geometrische Deutungen der Invarianten einer Kreiskurve II. Ordnung 603
VII. Spiegelungen über eine Kreiskurve II. Ordnung. Uniformisierung der Invarianten der Kreiskurve 607
VIII. Schließungspolygone der Kreiskurven II. Ordnung 614

Einleitung.

Die bizirkulare Kurve IV. Ordnung besitzt in den beiden unendlich fernen Kreispunkten Doppelpunkte und ist also beim Gebrauch kartesischer Koordinaten durch die folgende Gleichung:

$$(x^2+y^2)^2+(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+a_{11}x^2+2a_{12}xy + a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

definiert. Für besondere Werte der Koeffizienten α, β, a_{ik} erhalten wir spezielle bizirkulare Kurven, welche beziehungsweise unter dem Namen der spirischen Linie des Perseus, der kartesischen Ovale, der Cassinischen Ovale usw. bekannt sind. Die Erzeugungsweise dieser Kurven geschieht mit Hilfe von Kreisen, die zu einem gegebenen orthogonal sind und deren Mittelpunkt auf einem Deferent-Kegelschnitte liegen. Eine andere Erzeugungsweise benützt zwei Kreisbüschel, die derart aufeinander bezogen sind, daß die Mittelpunkte der Kreise beider Büschel projektive Punktreihen bilden.

Die Behandlung „metrischer" Eigenschaften dieser Kurven liegt schon in einer umfangreichen Literatur[1]) vor, in welcher man Näheres über solche

[1]) G. Kohn u. G. Loria, Spezielle ebene algebraische Kurven. Enzyclop. d. math. Wiss. III. C. 5, Bd. III. 2. 1. S. 457; G. Loria, Spezielle ebene algebraische und transzendente ebene Kurven. Teubner 1910. II. Aufl., S. 114ff.; Gaston Darboux, Sur une classe remarquable de ourbes et de surfaces algébriques. Paris 1899; Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. höh. alg. Kurven (1873).

erfahren kann. Die ersten drei der eben zitierten Arbeiten enthalten noch weitere Literaturangaben, die bei einem so elementaren Gegenstande umfangreich und daher kaum vollständig sind.

Die bizirkularen Kurven stehen im engen Zusammenhange zu den Raumkurven IV. Ordnung erster Spezies. Diese kann man auffassen als Schnittkurven zweier Flächen II. Ordnung. Projizieren wir stereographisch eine der beiden Flächen auf eine Ebene, so entspricht der erwähnten Raumkurve eine elliptische Kurve[3]), d. i. eine ebene Kurve IV. Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Ist eine der beiden Flächen eine Kugel, so geht die elliptische Kurve in eine bizirkulare Kurve über. Die Schnittkurve einer Fläche II. Ordnung mit einer Kugel wurde von Darboux als Zyklike bezeichnet und in dem schon zitierten Buche synthetisch weitestgehend untersucht.

Die bizirkulare Kurve ist endlich die Schnittkurve einer besonderen Fläche IV. Ordnung, der Dupinschen Zyklide[4]) und der Ebene.

Das Ziel dieser Arbeit ist, eine zusammenhängende und abgeschlossene Theorie der bizirkularen Kurve IV. Ordnung zu geben, wobei wir uns auf einen neuen dem Kleinschen Ideenkreise angehörigen Standpunkt stellen. Die so geschaffene Theorie kommt, abgesehen von manchen Teilresultaten, u. W. in der bisherigen Literatur nicht vor und bildet eine weitere Entwicklung der schönen Sätze über Kreise und Kreissysteme der geometrischen Funktionentheorie. Diese neue Behandlungsweise ergibt sich aber aus den funktionentheoretischen Eigenschaften der bizirkularen Kurve IV. Ordnung. Diese Kurven sind vom Geschlecht eins und ihre Uniformisierung geschieht also mit Hilfe elliptischer Funktionen, d. h. die Koordinaten der Punkte dieser Kurve lassen sich als elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken. Für die Beziehung der bizirkularen Kurve zur Funktionentheorie kommen aber offenbar weniger ihre metrischen Eigenschaften als vielmehr solche Eigenschaften der Kurve in Betracht, welche invariant sind gegenüber der Gruppe der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen $u = x + iy$:

$$\text{(L)} \qquad u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}.$$

Bezeichnen wir mit $\bar{u}$ den konjugiert komplexen Wert von u, so wollen wir zweckmäßiger die Gleichung der bizirkularen Kurve folgendermaßen schreiben:

$$A u^2 \bar{u}^2 + 2 B u^2 \bar{u} + 2 \bar{B} u \bar{u}^2 + C u^2 + 4 D u \bar{u} + \bar{C} \bar{u}^2 + 2 E u + 2 \bar{E} \bar{u} + F = 0.$$

---

[2]) O. Staude, Flächen II. Ordnung und ihre Systeme usw. III C 2-Enzyk. d. math. Wiss. III. 2. 1, S. 238.

[3]) Loria, S. 114.

[4]) Darboux, S. 107ff.

In dieser Form tritt die Beziehung der bizirkularen Kurve zu den Transformationen L schon deutlicher zutage.

Setzen wir in der obigen Gleichung der bizirkularen Kurve $A = 0$, so bekommen wir die Gleichung einer zirkularen Kurve III. Ordnung. Diese Kurven, die in bezug auf die Gruppe der linearen Transformationen eine Gesamtheit bilden, erscheinen so bald von der III. und bald von der IV. Ordnung. Auch in der Benennung tritt eine ähnliche Unklarheit zutage. Aus diesen Gründen haben wir in dieser Arbeit die betrachteten Kurven als *Kreiskurven II. Ordnung* bezeichnet. Der Kreis selbst ist eine Kreiskurve I. Ordnung. Die so definierte Ordnung ist gleich dem höchsten Potenzexponenten, zu dem jede der einzelnen Variabeln u oder $\bar{u}$ in der Kurvengleichung auftritt.

Die Verallgemeinerung dieser Kurven ergibt sich von selbst und es ist klar, daß eine beliebige algebraische Kurve als Kreiskurve bestimmter Ordnung angesehen werden kann. Diese Ordnung ist aus der in den komplexen Veränderlichen u und $\bar{u}$ geschriebenen Gleichung, wie oben gesagt wurde, sofort ersichtlich und besitzt eine einfache geometrische Deutung. Sie ist gleich der halben Anzahl der Schnittpunkte der Kurve mit einem Kreise, wobei die unendlich-fernen Kreispunkte nicht mitgezählt werden. In dieser Hinsicht ist eine Kreiskurve n-ter Ordnung gleichwertig der aus n Kreisen bestehenden Figur.

Wir wollen jetzt die Beziehungen dieser Arbeit zu der vorhandenen Literatur kurz erläutern.

Die gegenüber den linearen Transformationen L invarianten geometrischen Eigenschaften der Kreiskurve II. Ordnung werden algebraisch ausgedrückt durch das Verschwinden bestimmter Invarianten oder Kovarianten. Nun ist die linke Seite der in den komplexen Veränderlichen u und $\bar{u}$ geschriebenen Gleichung einer Kreiskurve II. Ordnung eine doppeltquadratische Form von u und $\bar{u}$. So ist es natürlich, daß die für eine Kreiskurve aufgestellten Invarianten und Kovarianten mit jenen der doppeltquadratischen Form übereinstimmen und als solche in der Literatur schon längst bekannt sind. Eine zusammengefaßte Darstellung dieser Invariantentheorie, als deren Begründer wohl Cayley[5]), Capelli[6]) und vor allem Frobenius[7]) zu nennen sind, findet man in der Formentheorie von Andoyer[8]). Diesem Buche entlehnten

---

[5]) Cayley, On the porism of the in-and circumscribed polygon. Quart. Journ. Bd. XI (1870), S. 83.

[6]) Capelli, Sopra la correspondenza (2, 2). Giorn. d. Battaglini 17 (1879), S. 69.

[7]) Frobenius, Theorie der biquadratischen Formen. Journ f. Math. 106 (1890), S. 125.

[8]) Andoyer, Leçons sur la theorie des formes et la géom. anal. sup. I (1900).

wir aber nur einzelne Ausdrücke für die von uns auf einem anderen Wege entwickelte Invariantentheorie der Kreiskurven II. Ordnung.

Im vierten Abschnitt dieser Arbeit untersuchen wir bestimmte, einer Kreiskurve II. Ordnung zugeordnete Kreistransformationen, die mit dem Problem der Berührungstransformationen der Kreise einer Ebene zusammenhängen. Man vergleiche darüber einen Aufsatz, der aber inhaltlich von unseren Ausführungen verschieden ist, von Herrn B. Schilling über solche Berührungstransformationen [9]).

Im siebenten Abschnitte untersuchen wir Spiegelungen an einer Kreiskurve II. Ordnung. Solche Spiegelungen wurden allgemeiner für beliebige algebraische Kurven von G. Lery [10]) behandelt, der von den Kreiskurven nur den von uns mit $I_3 = 0$ (s. Nr. 3, 37, 38) bezeichneten Fall genauer untersucht. In derselben Arbeit ist von den Kreiskurven II. Ordnung noch an einer anderen Stelle [11]) die Rede, wo eine funktionentheoretisch wichtige Eigenschaft der Kreiskurven II. Ordnung entwickelt wird. Diese Kurven bilden nämlich die wichtigste Familie der algebraischen Isothermen, d. i. solche algebraische Kurven, deren Gleichung die Form $f(x, y) = c$, besitzt, wobei f eine harmonische Funktion von x und y ist. Diese Eigenschaft, die schon früher H. A. Schwarz [12]) angegeben hat, wird aber in dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

Diese Aufzählung umfaßt u. W. alle Berührungspunkte der vorliegenden Arbeit mit der vorhandenen Literatur. Wir geben noch eine kurze Inhaltsangabe der einzelnen Abschnitte.

Im ersten Abschnitt dieser Abhandlung entwickeln wir für die Kreiskurve II. Ordnung ein vollständiges System von Invarianten und Kovarianten, die also nach Ausübung einer beliebigen Transformation L nur mit konstanten Faktoren multipliziert werden. Als erstes Beispiel der Anwendung der eingeführten Invarianten geben wir die Bedingung an, der eine Kreiskurve genügen muß, damit ihr Geschlecht gleich Null wird. Als zweites Beispiel führen wir kurz die Uniformisierung der Kreiskurve durch. Zum späteren Gebrauch geben wir noch am Schlusse des Kapitels einige gemeinsame Invarianten und Kovarianten der Kreiskurve II. Ordnung und des Kreises an.

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir die kanonischen Gleichungen und diesen entsprechenden Formen der Kreiskurve. Wir erhalten so eine Übersicht

---

[9]) B. Schilling, Eine neue Bestimmung aller Berührungstransform. der Kreise in der Ebene. Journ. f. Math. **154** (1925), S. 241.

[10]) G. Lery, Sur la fonction de Green pour un contour alg. Ann. éc. norm. (3), **32** (1915), S. 1.

[11]) G. Lery, S. 77.

[12]) H. A. Schwarz, Über alg. Isothermen. Journ. f. Math. **77** (1874), S. 38 oder Ges. Werke II, S. 260.

besonderer anfangs erwähnten Kurven, z. B. der spirischen Linie, der Ovale usw. Zugleich ergeben sich uns einige grundlegende Eigenschaften der Kreiskurve.

Im nächsten Abschnitt führen wir die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften fort und geben mittels der Werte geeigneter Invarianten die Klassifikation aller Kreiskurven II. Ordnung. Wir schließen dieses Kapitel mit dem Beweise einer Definitionsgleichung der Kreiskurve, die nur solche Größen enthält, welche invariant sind gegenüber der linearen Transformation L.

Im vierten Abschnitt behandeln wir weitestgehend die gegenseitigen Beziehungen einer gegebenen Kreiskurve zu einzelnen Kreisen, wodurch wir zur geometrischen Deutung einiger Kovarianten der Kreiskurve und des Kreises gelangen. Die Untersuchung des Winkels zwischen einer Kreiskurve und einem Kreise geleitet uns in natürlicher Weise zu einer neuen Kreistransformation, die teilweise der Polarentheorie der Kegelschnitte entspricht. Diese Kreistransformationen bilden eine kontinuierliche Gruppe, die auf eigene Weise alle Kreiskurven erzeugt, die dieselben Inversionskreise, wie die ursprüngliche Kurve, besitzen.

Im nächsten Abschnitt behandeln wir Systeme von Kreiskurven, insbesondere der Kreiskurven mit denselben Inversionskreisen und der Kreiskurven mit denselben Brennpunkten. Eine von zwei Kreiskurven abgeleitete Kovariante ermöglicht weiter die Aufstellung aller zur gegebenen Kreiskurve orthogonalen Kreiskurven.

Im sechsten Abschnitt bringen wir die geometrische Deutung der wichtigsten Invarianten einer gegebenen Kreiskurve. Als besonderes Resultat dieser Untersuchung erhalten wir drei durch vier Punkte eindeutig bestimmte und ausgezeichnete Kreiskurven.

Im siebenten Abschnitt untersuchen wir die Spiegelungen an Kreiskurven II. Ordnung. Wir geben die Formeln für eine beliebige Potenz einer solchen Spiegelung. Diese Potenzen erzeugen eine diskrete Menge zur gegebenen Kreiskurve konfokaler Kreiskurven. Das bemerkenswerteste Resultat dieses Abschnittes ist die Uniformisierung der Invarianten aller Kreiskurven und der daraus folgende Zusammenhang der Spiegelungstheorie der Kreiskurven mit den Multiplikationssätzen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion.

Im letzten Abschnitt bringen wir endlich als Anwendung der Spiegelungstheorie die vollständige Behandlung der einer Kreiskurve II. Ordnung eingeschriebenen Poncelet-Steinerschen Polygone.

Die Resultate der Abschnitte II. und III. gelten, wie es in der Natur der dort behandelten Fragen liegt, nur für reelle Kreiskurven. Die Untersuchungen der übrigen Abschnitte dagegen verlangen keine besondere Voraussetzung über die Realität der gegebenen Kreiskurve II. Ordnung.

I. Invarianten und Kovarianten der Kreiskurve.

1. Die einfachste Invariante der Kreiskurve:

$$(1)\qquad f = Au^2\bar{u}^2 + 2Bu^2\bar{u} + 2\bar{B}u\bar{u}^2 + Cu^2 + 4Du\bar{u} + \bar{C}\bar{u}^2 + 2Eu + 2\bar{E}\bar{u} + F = 0$$

ist in den Koeffizienten von (1) zweiten Grades und besitzt folgende Gestalt:

$$(2)\qquad I_2 = 2D^2 + AF + C\bar{C} - 2(B\bar{E} + \bar{B}E).$$

Man überzeugt sich leicht vom invarianten Charakter dieser Form, wenn man die lineare Transformation:

$$(L)\qquad u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},\quad d = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

als Produkt folgender Substitutionen:

$$u' = \alpha u,\quad u' = u + \alpha,\quad u' = \frac{1}{u}$$

zusammensetzt und für diese die nötigen Rechnungen ausführt, oder noch einfacher, wenn man nach Aronhold die linke Seite von (1) als symbolisches Quadrat von

$$a\,u\bar{u} + bu + \bar{b}\bar{u} + c$$

schreibt und die Invariante $I_2 = (bb - ac)^2$ berechnet.

2. Zur Ableitung weiterer Invarianten und Kovarianten wollen wir folgende für Kreiskurven beliebiger Ordnung anwendbare Methode benutzen. Schreiben wir

$$(3)\qquad f'(u', \bar{u}') = \frac{d^{\varrho}\,\bar{d}^{\sigma}}{(\gamma u + \delta)^m (\bar{\gamma}\bar{u} + \bar{\delta})^n} f(u, \bar{u}),$$

wo $f(u, \bar{u})$ eine ganze Funktion von u und $\bar{u}$ beziehungsweise von den Graden m und n bedeutet, und bezeichnen wir die Ableitungen nach u und $\bar{u}$ mit:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_1,\ \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = f_2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = f_{11},\ \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial \bar{u}} = f_{12},\ \ldots$$

und ähnlich für die gestrichenen Größen, so können wir nach mehrmaligen Differentiationen von (3) und nach Elimination von γ und $\bar{\gamma}$ folgende gegenüber der linearen Transformation (L) invariante Prozesse beweisen:

$$(4)\qquad f' f'_{11} - \frac{m-1}{m}(f'_1)^2 = \frac{d^{2\varrho-2}\,\bar{d}^{2\sigma}}{(\gamma u + \delta)^{2m-4}(\bar{\gamma}\bar{u} + \bar{\delta})^{2n}}\left(f f_{11} - \frac{m-1}{m} f_1^2\right),$$

$$(5)\qquad f' f'_{12} - f'_1 f'_2 = \frac{d^{2\varrho-1}\,\bar{d}^{2\sigma-1}}{(\gamma u + \delta)^{2m-2}(\bar{\gamma}\bar{u} + \bar{\delta})^{2n-2}}(f f_{12} - f_1 f_2),$$

$$(6)\qquad f' f'_{12} - \frac{n-1}{n}(f'_2)^2 = \frac{d^{2\varrho}\,\bar{d}^{2\sigma-2}}{(\gamma u + \delta)^{2m}(\bar{\gamma}\bar{u} + \bar{\delta})^{2n-4}}\left(f f_{22} - \frac{n-1}{n} f_2^2\right).$$

Wir erwähnen noch folgende kovariante Bildungen, in denen nur erste Ableitungen, jedoch zweier Funktionen f und g, vorkommen:

$$(7)\quad m_1 g' f_1' - m f' g_1' = \frac{d^{\varrho+\varrho_1-1}\,\bar{d}^{\sigma+\sigma_1}}{(\gamma u+\delta)^{m+m_1-2}(\bar{\gamma}\bar{u}+\bar{\delta})^{n+n_1}}(m_1 g f_1 - m f g_1),$$

$$(8)\quad n_1 g' f_2' - n f' g_2' = \frac{d^{\varrho+\varrho_1}\,\bar{d}^{\sigma+\sigma_1-1}}{(\gamma u+\delta)^{m+m_1}(\bar{\gamma}\bar{u}+\bar{\delta})^{n+n_1-2}}(n_1 g f_2 - n f g_2),$$

wo die gemäß (3) g entsprechenden Potenzexponenten mit einem beigefügten Index 1 gekennzeichnet sind.

Als eine weitere Kovariante der in u und $\bar{u}$ symmetrischen Formen f und g von den Graden m und m_1 folgt die in Anlehnung an (5) gebildete Beziehung:

$$(9)\quad m_1^2 g' f_{12}' + m^2 f' g_{12}' - m m_1 (f_1' g_2' + f_2' g_1')$$
$$= \frac{(d\,\bar{d})^{\varrho+\varrho_1-1}}{(\gamma u+\delta)^{m+m_1-2}(\bar{\gamma}\bar{u}+\bar{\delta})^{m+m_1-2}}[m_1^2 g f_{12} + m^2 f g_{12} - m m_1 (f_1 g_2 + f_2 g_1)].$$

3. Bilden wir die Gleichung (5) für die Kreiskurve f, so ist, da $m = n = 2$, $\varrho = \sigma = 0$:

$$(10)\quad f' f_{12}' - f_1' f_2' = \frac{(d\,\bar{d})^{-1}}{(\gamma u+\delta)^2(\bar{\gamma}\bar{u}+\bar{\delta})^2}(f f_{12} - f_1 f_2).$$

Die Kovariante $h = 1/4\,(f f_{12} - f_1 f_2)$ stellt, gleich Null gesetzt, wiederum eine Kreiskurve II. Ordnung dar, die explizit aufgeschrieben lautet:

$$(11)\quad \begin{aligned} h = {} & (AD - B\bar{B})\,u^2\bar{u}^2 + (AE - \bar{B}C)\,u^2\bar{u} + (A\bar{E} - B\bar{C})\,u\bar{u}^2 \\ & + (BE - DC)\,u^2 + (AF - C\bar{C})\,u\bar{u} + (\bar{B}\bar{E} - D\bar{C})\,\bar{u}^2 + (BF - C\bar{E})\,u \\ & + (\bar{B}F - \bar{C}E)\,\bar{u} + (DF - E\bar{E}) \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$h = -\begin{vmatrix} A, & \bar{B}, & \bar{C}, & 1 \\ B, & D, & \bar{E}, & \bar{u} \\ C, & E, & F, & \bar{u}^2 \\ 1, & u, & u^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Bilden wir durch Polarenbildung die von zwei Kreiskurven abhängende Invariante:

$$(12)\quad J_2 = 4\,DD_1 + AF_1 + FA_1 + C\bar{C}_1 + \bar{C}C_1 - 2\,(B\bar{E}_1 + \bar{B}E_1 + E\bar{B}_1 + \bar{E}B_1)$$

und wenden dies auf f und h an, so erhalten wir, von einem numerischen Faktor abgesehen, die Invariante dritten Grades:

$$(13)\quad I_3 = \begin{vmatrix} A & \bar{B} & \bar{C} \\ B & D & \bar{E} \\ C & E & F \end{vmatrix} = ADF + C\bar{B}\bar{E} + \bar{C}BE - DC\bar{C} - AE\bar{E} - FB\bar{B}.$$

Endlich erhalten wir, indem wir $8 I_2$ für die Kreiskurve $h = 0$ berechnen, eine Invariante vierten Grades:

$$(14)\quad \begin{aligned} I_4 = {} & (AF - C\bar{C})^2 - 4(B\bar{E} - \bar{B}E)^2 + 4(B\bar{E} + \bar{B}E - 2D^2) \\ & \times (B\bar{E} + \bar{B}E - AF - C\bar{C}) + 4A(C\bar{E}^2 - 2DE\bar{E} + \bar{C}E^2) \\ & - 8D[C\bar{B}\bar{E} - D(B\bar{E} + \bar{B}E) + \bar{C}BE] \\ & + 4F(C\bar{B}^2 - 2DB\bar{B} + \bar{C}B^2). \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir oft die Invariante $J_4 = 1/4 \cdot (I_2^2 - I_4)$ benutzen, welche in der Form einer Determinante geschrieben werden kann:

$$(15)\quad J_4 = \begin{vmatrix} A & B & \bar{B} & D \\ B & C & D & E \\ \bar{B} & D & \bar{C} & \bar{E} \\ D & E & \bar{E} & F \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet:

$$\begin{aligned} J_4 = {} & (B\bar{E} - \bar{B}E)^2 + (D^2 - C\bar{C})(D^2 - AF) \\ & - A(C\bar{E}^2 - 2DE\bar{E} + \bar{C}E^2) + 2D[C\bar{B}\bar{E} - D(B\bar{E} + \bar{B}E) + \bar{C}BE] \\ & - F(C\bar{B}^2 - 2DB\bar{B} + \bar{C}B^2). \end{aligned}$$

4. Die in den Gleichungen (4) und (6) auftretenden Kovarianten hängen, da $m = n = 2$ und also $2m - 4 = 2n - 4 = 0$, bzw. nur von einer der beiden Veränderlichen u und $\bar{u}$ ab und sind einander konjugiert komplex. Wir bezeichnen sie mit $-2\bar{b}$ und $-2b$, und es ist beispielsweise:

$$(16)\quad \begin{aligned} b = {} & (B^2 - AC)u^4 - 2(AE - 2DB + C\bar{B})u^3 \\ & + (4D^2 - AF - C\bar{C} + 2B\bar{E} - 4\bar{B}E)u^2 \\ & - 2(\bar{C}E - 2D\bar{E} + F\bar{B})u + (\bar{E}^2 - F\bar{C}). \end{aligned}$$

Es ist dies die Diskriminante von (1), wenn wir sie als quadratische Gleichung von $\bar{u}$ auffassen.

Wir werden $b = 0$ die Brennpunktgleichung der Kreiskurve $f = 0$ nennen.

Die Invarianten g_2 und g_3 der biquadratischen Gleichung $b = 0$ lassen sich schon durch die bisher eingeführten Invarianten I_2, I_3 und I_4 ausdrücken. Es ist

$$(17)\quad 12 g_2 = 4 I_2^2 - 3 I_4,$$

$$(18)\quad 216 g_3 = 9 I_2 I_4 - 8 I_2^3 - 54 I_3^2.$$

5. Nun können wir aus h, b, $\bar{b}$ eine neue Kovariante bilden, die, gleich Null gesetzt, wiederum eine Kreiskurve II. Ordnung darstellt. Es ist nämlich:

$$(19)\quad \tfrac{1}{16}(ff_{12} - f_1 f_2)^2 - \tfrac{1}{4}(ff_{11} - f_1^2)(ff_{22} - f_2^2) = fk,$$

wo

$$k = -\tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} 2f_{11}, & f_{12}, & f_1 \\ f_{21}, & 2f_{22}, & f_2 \\ f_1, & f_2, & f \end{vmatrix}$$

ist. Für die Kovarianten f, h, k und b, $\bar{b}$ gilt also die identische Beziehung:

$$h^2 - fk = b\bar{b}. \tag{20}$$

Die Kovariante k hat, ausgerechnet, die Form einer Determinante:

$$k = \begin{vmatrix} A & B & \bar{B} & D & 1 \\ B & C & D & E & -\bar{u} \\ \bar{B} & D & \bar{C} & \bar{E} & -u \\ D & E & \bar{E} & F & u\bar{u} \\ 1 & -\bar{u} & -u & u\bar{u} & 0 \end{vmatrix} \tag{21}$$

und ist, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Kreiskurve II. Ordnung.

6. Wir gelangen zu weiteren Kovarianten der Kreiskurve $f = 0$, wenn wir die in (4), (5), (6) angegebenen Prozesse noch auf die abgeleitete Kreiskurve $h = 0$ anwenden. Die nach (4) und (6) erhaltenen Polynome vierten Grades in $\bar{u}$ bzw. u bezeichnen wir mit $\bar{c}$ und c, deren Ausdrücke man mit Hilfe von (11) und (16) leicht hinschreiben kann.

An dieser Stelle wollen wir noch den Zusammenhang der Brennpunkte der beiden Kreiskurven $f = 0$ und $h = 0$ aufdecken. Wir bilden auf Grund der Kreiskurve $f = 0$ die zweideutige Punkttransformation $u \to v$:

$$(A\bar{u}^2 + 2B\bar{u} + C)v^2 + 2(\bar{B}\bar{u}^2 + 2D\bar{u} + E)v + (\bar{C}\bar{u}^2 + 2\bar{E}\bar{u} + F) = 0,$$

die wir als eine Art Spiegelung an der Kreiskurve $f = 0$ auffassen können. Liegt aber u in einem Brennpunkte von $f = 0$, so ist der zugeordnete Punkt v eindeutig bestimmt. In diesem Falle gelten nämlich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (A\bar{u}^2 + 2B\bar{u} + C)v + (\bar{B}\bar{u}^2 + 2D\bar{u} + E) &= 0, \\ (\bar{B}\bar{u}^2 + 2D\bar{u} + E)v + (\bar{C}\bar{u}^2 + 2\bar{E}\bar{u} + F) &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Elimination von v aus den letzten Gleichungen gibt die Brennpunktgleichung $\bar{b} = 0$, eliminieren wir dagegen $\bar{u}$, so erhalten wir die Brennpunktgleichung $c = 0$. Also:

Die Brennpunkte der abgeleiteten Kreiskurve $h = 0$ sind die an der Kreiskurve $f = 0$ gespiegelten Brennpunkte der Kurve $f = 0$.

7. Der invariante Prozeß (5) liefert nichts Neues, es ist einfach:

$$(hh_{12} - h_1h_2) = I_3 f. \tag{23}$$

Die Kreiskurven f und h sind also einander zugeordnet.

Ein volles Invariantensystem der Kreiskurve $f = 0$ besteht aus den Invarianten I_2, I_3 und I_4, d. h. jede weitere Invariante ist als Funktion von diesen drei darstellbar. Wir bringen diesen Vollständigkeitsbeweis aber erst unten in der Nummer 20, da wir dazu die Entwicklungen der Nummern 16 bis 18 über die spirische Normalform der Kreiskurven II. Ordnung benötigen. Ob die Invarianten I_2, I_3, I_4 mit den Kovarianten f, h, b, $\bar{b}$, c, $\bar{c}$ ein volles

Formensystem der Kreiskurve $f = 0$ bilden, bleibt hier offen, da diese Frage weiter unten nirgends mehr berührt wird.

8. Wir wollen nun mit Hilfe der eben eingeführten Invarianten die Bedingung aufstellen, unter welcher die vorgelegte Kreiskurve $f = 0$ ihr Geschlecht erniedrigt, d. h. daß sie noch einen weiteren Doppelpunkt besitzt. Bringen wir durch eine lineare Transformation der Kreiskurve ihren dritten Doppelpunkt nach $u = 0$, so ist $F = E = \overline{E} = 0$ und aus (16) folgt, daß $u = 0$ eine Doppelwurzel der Gleichung $b = 0$ ist. Dann ist aber die Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$ dieser Gleichung gleich Null. Ist umgekehrt diese Invariante der Kreiskurve gleich Null, so besitzt sie einen dritten Doppelpunkt oder sie zerfällt sogar in ein Kreispaar. In der Tat, verlegen wir die Doppelwurzel von $b = 0$ bzw. $\overline{b} = 0$ nach $u = 0$, so ist $E = \sqrt{F\overline{C}}$, $\overline{E} = \sqrt{FC}$ und

$$\overline{C}E - 2\,D\overline{E} + F\overline{B} = \sqrt{F}\,[\sqrt{\overline{C}}\,(D - \sqrt{C\overline{C}}) - \sqrt{\overline{F}}\,\overline{B}] = 0,$$

also $F = 0$ oder $\sqrt{\overline{C}}\,(D - \sqrt{C\overline{C}}) - \sqrt{\overline{F}}\,\overline{B} = 0$. Nach der letzten Gleichung, da auch die zu dieser konjugiert komplexe Gleichung erfüllt sein muß, bekommt die Gleichung $b = 0$ noch eine zweite Doppelwurzel und die linke Seite der Gleichung der Kreiskurve zerfällt in das Produkt zweier Kreisgleichungen.

Die Kreiskurve $f = 0$ ist vom Geschlecht Null, wenn die Invariante $g_2^3 - 27\, g_3^2$ verschwindet und umgekehrt.

9. Als eine zweite Anwendung der eingeführten Kovarianten untersuchen wir kurz die Uniformisierung der Kreiskurve II. Ordnung. Differenzieren wir die Gleichung $f(u, \overline{u}) = 0$, so erhalten wir

$$f_1\, du + f_2\, d\overline{u} = 0. \tag{24}$$

Die Werte der Kovarianten b, $\overline{b}$ folgen aus den Gleichungen:

$$b = \tfrac{1}{4} f_2^2 - \tfrac{1}{2} f f_{22}, \quad \overline{b} = \tfrac{1}{4} f_1^2 - \tfrac{1}{2} f f_{11},$$

und es gilt für Punkte der Kurve $f = 0$ offenbar

$$\tfrac{1}{2} f_1 = \pm \sqrt{\overline{b}}, \qquad \tfrac{1}{2} f_2 = \pm \sqrt{b}.$$

Die Gleichung (24) bekommt so die Form

$$\frac{du}{\sqrt{b}} + \frac{d\overline{u}}{\sqrt{\overline{b}}} = 0.$$

Führen wir also die Variable

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{b}}$$

ein, so beschreibt $u = u(t)$ die Kreiskurve $f = 0$, wenn t eine bestimmte zu einer der beiden Koordinatenachsen parallele Gerade durchläuft.

10. Jeder Kreis $\alpha u\overline{u} + \beta u + \overline{\beta}\overline{u} + \gamma = 0$ schneidet eine Kreiskurve $f = 0$ in vier Punkten. Zum späteren Gebrauch berechnen wir uns an dieser

Stelle die Gleichung vierten Grades in u, der die Schnittpunkte der Kurve mit dem Kreise genügen. Wir bekommen:

$$\begin{aligned}(25)\quad & u^4(A\beta^2 - 2B\beta\alpha + C\alpha^2) + 2u^3[A\gamma\beta - B(\beta\bar\beta + \alpha\gamma) + \bar B\beta^2 \\ & + C\bar\beta\alpha - 2D\beta\alpha + E\alpha^2] + u^2[A\gamma^2 - 2B\gamma\bar\beta + 4\bar B\gamma\beta \\ & + C\bar\beta^2 - 4D(\beta\bar\beta + \alpha\gamma) + \bar C\beta^2 + 4E\bar\beta\alpha - 2\bar E\beta\alpha + F\alpha^2] \\ & + 2u[\bar B\gamma^2 - 2D\gamma\bar\beta + \bar C\gamma\beta + E\bar\beta^2 - \bar E(\beta\bar\beta + \alpha\gamma) \\ & + F\bar\beta\alpha] + (\bar C\gamma^2 - 2\bar E\gamma\bar\beta + F\bar\beta^2) = 0.\end{aligned}$$

Die vier Lösungen dieser Gleichung bestimmen ebensoviele Punkte der u-Ebene, die entweder die reellen Schnittpunkte des Kreises und der Kreiskurve sind oder solche Punkte der Ebene sind, denen in bezug auf den Kreis und auf die Kreiskurve dieselben spiegelsymmetrischen Punkte entsprechen.

11. Nun wollen wir noch die gemeinsamen Invarianten einer Kreiskurve $f = 0$ und eines Kreises $\varphi = \alpha u\bar u + \beta u + \bar\beta\bar u + \gamma = 0$ anführen. Zu dieser Berechnung ist notwendig, statt des Kreises $\varphi = 0$ die allerdings entartete Kreiskurve II. Ordnung $\varphi^2 = 0$ zu nehmen und mit Hilfe von (12) die gemeinsamen Invarianten von φ^2 mit f bzw. h und k zu bestimmen. Man findet so:

$$\begin{aligned}(26)\quad i_1 = {} & A\gamma^2 - 2B\gamma\bar\beta - 2\bar B\gamma\beta + C\bar\beta^2 + 2D(\beta\bar\beta + \alpha\gamma) \\ & + \bar C\beta^2 - 2E\alpha\bar\beta - 2\bar E\alpha\beta + F\alpha^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(27)\quad i_2 = {} & (AD - B\bar B)\gamma^2 - (AE - \bar BC)\gamma\bar\beta - (A\bar E - B\bar C)\gamma\beta \\ & + (BE - DC)\bar\beta^2 + \tfrac{1}{2}(AF - C\bar C)(\beta\bar\beta + \alpha\gamma) + (\bar B\bar E - D\bar C)\beta^2 \\ & - (BF - C\bar E)\alpha\bar\beta - (\bar BF - \bar CE)\alpha\beta + (DF - E\bar E)\alpha^2.\end{aligned}$$

$$(27')\qquad i_3 = \begin{vmatrix} A & B & \bar B & D & \alpha \\ B & C & D & E & \beta \\ \bar B & D & \bar C & \bar E & \bar\beta \\ D & E & \bar E & F & \gamma \\ \alpha & \beta & \bar\beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir fügen noch der Vollständigkeit halber die nur von $\varphi = 0$ abhängende Invariante:

$$(27'')\qquad i_0 = \beta\bar\beta - \alpha\gamma$$

hinzu.

II. Kanonische Gleichungen und Formen der Kreiskurve.

12. Wir wollen zuerst die Kreise bestimmen, welche die Kreiskurve unter paarweise gleichen Winkeln schneiden. Wir werfen ein zusammengehöriges Paar solcher Punkte nach $u = 0$ und $u = \infty$, so daß der betrachtete Kreis in die Gerade $u - \bar u = 0$ übergehe. Die Kreiskurve hat dann die Gestalt:

$$(28)\quad 2Bu^2\bar u + 2\bar Bu\bar u^2 + Cu^2 + 4Du\bar u + \bar C\bar u^2 + 2Eu + 2\bar E\bar u = 0.$$

Die Tangenten an die Kreiskurve bei $u = 0$ und $u = \infty$ sind beziehungsweise die Geraden $Eu + \bar{E}\bar{u} = 0$ und $Bu + \bar{B}\bar{u} = 0$, die mit der Koordinatenachse $u - \bar{u} = 0$ dann gleiche Winkel bilden, wenn $B\bar{E} - \bar{B}E = 0$ ist.

Setzen wir $E = r^2 B$, $\bar{E} = r^2 \bar{B}$ und unterwerfen wir die Kreiskurve (28) der Inversion $u' = \frac{r^2}{\bar{u}}$, so erkennt man leicht, daß die Kurve in sich selbst übergeht. Die Kreiskurve liegt symmetrisch in bezug auf den Kreis $u\bar{u} - r^2 = 0$, welcher deshalb ein Inversionskreis genannt wurde. Die Gerade $u - \bar{u} = 0$ schneidet dann die Kurve auch in den beiden übrigen Punkten unter gleichen Winkeln. Also allgemein:

Die zu einem Inversionskreise orthogonalen Kreise schneiden die Kreiskurve unter paarweise gleichen Winkeln.

13. Die Anzahl der Inversionskreise bestimmen wir nun leicht auf folgende Weise. Wir legen einen beliebigen Punkt der Kurve in den Punkt $u = 0$ und verlegen einen solchen zweiten Punkt der Kurve nach $u = \infty$, daß für die transformierte Kurvengleichung aus $A = 0, F = 0$ noch $B\bar{E} - \bar{B}E = 0$ folgt. Nun können wir dies direkt ausführen, wenn wir nach allen möglichen Kreiskurven fragen, bei denen die Invarianten I_2, I_3, I_4 gegebene Werte besitzen und deren Koeffizienten den kanonisierenden Bedingungen $A = F = B\bar{E} - \bar{B}E = 0$ genügen. Unter diesen Voraussetzungen ist nun:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2D^2 + C\bar{C} - 4r^2 B\bar{B}, \\ I_3 &= -DC\bar{C} + r^2 (C\bar{B}^2 + \bar{C}B^2), \\ J_4 &= D^4 - D^2 C\bar{C} + 2Dr^2 (C\bar{B}^2 + \bar{C}B^2) - 4r^2 D^2 B\bar{B}. \end{aligned} \tag{29}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber sofort:

$$D^4 - I_2 D^2 - 2I_3 D + J_4 = 0. \tag{30}$$

Man nennt[13]) diese Gleichung die kanonisierende Gleichung. Zu jeder Wurzel D von (30) gehört ein Inversionskreis. Zur Bestimmung der fünf Unbekannten r, B, $\bar{B}$, C, $\bar{C}$ stehen zwar nur noch zwei Gleichungen zur Verfügung, doch die unendlich vielen Lösungen von (29) gehen aus einer von ihnen durch eine solche lineare Transformation der Kreiskurve hervor, für welche der Koeffizient D seinen Wert behält. Durch die vorherige Transformation $u' = ru$ und nach der Division der transformierten Gleichung $f = 0$ durch r^2 erreichen wir, daß wir in (29) r^2 gleich 1 setzen dürfen. Weiter dürfen wir eine den Bedingungen (29) genügende Kreiskurve einer solchen Transformation des Einheitskreises $u\bar{u} - 1 = 0$ in sich unterwerfen, welche ein beliebiges anderes Paar zum Einheitskreise symmetrisch gelegener Punkte der Kurve nach $u = 0$ und $u = \infty$ verlegt. Die Koeffizienten der neuen

[13]) Andoyer, S. 89 u. 113.

Kreiskurve bezeichnen wir mit einem Strich und es ist wiederum $A' = F' = B'\bar{E}' - \bar{B}'E' = 0$. Da die Substitutionsdeterminante gleich 1 ist, so ist für den Inversionskreis $u\bar{u} - 1 = 0$ nun $\beta'\bar{\beta}' - \alpha'\gamma' = \beta\bar{\beta} - \alpha\gamma$, also $\alpha'\gamma' = \alpha\gamma = 1$. Wenn wir endlich die Unveränderlichkeit der gemeinsamen Invariante der Kreiskurve und des Einheitskreises i_1 anwenden, so ist nach (26):

$$2\,D'\alpha'\gamma' = 2\,D\alpha\gamma \quad \text{oder} \quad D' = D.$$

Die Anzahl der Inversionskreise ist also vier und es ist leicht einzusehen, daß sie paarweise orthogonal sind. In der Tat schneidet jeder zu zwei Inversionskreisen orthogonale Kreis die Kreiskurve in vier in bezug auf die Inversionskreise symmetrisch gelegenen Punkten, was nur möglich ist, wenn die Inversionskreise zueinander orthogonal sind.

14. Die Kreiskurve II. Ordnung besitzt also eine Gleichung von der Form (28), wenn wir zwei in bezug auf einen Inversionskreis symmetrisch gelegene Punkte nach $u = 0$ und $u = \infty$ verlegen, was auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Wir wollen nun die kanonisierenden Bedingungen $A = F = B\bar{E} - \bar{B}E = 0$ durch Hinzufügung neuer Gleichungen derart erweitern, daß für die Koeffizienten der gesuchten Kreiskurve nur endlich viele voneinander nicht wesentlich verschiedene Lösungen in Betracht kommen.

Legen wir durch den Punkt $u = 0$ die Gerade $\beta u + \bar{\beta}\,\bar{u} = 0$, so schneidet diese die Kreiskurve in vier Punkten 0, ∞, u_1, u_2, deren letzte zwei der aus (25) gewonnenen Gleichung II. Grades:

$$2\,\beta\,(\bar{B}\beta - B\bar{\beta})\,u^2 + (C\bar{\beta}^2 - 4\,D\,\beta\bar{\beta} + \bar{C}\beta^2)\,u + 2\,\bar{\beta}\,(E\bar{\beta} - \bar{E}\beta) = 0$$

genügen. Ist $C\bar{\beta}^2 - 4\,D\bar{\beta}\,\beta + \bar{C}\,\beta^2 = 0$, so schneidet die gegebene Gerade die Kreiskurve in vier harmonischen Punkten, wobei die Punkte 0, ∞ ein zusammengehöriges Paar bilden. Im allgemeinen gibt es zwei Geraden von der verlangten Eigenschaft, die aber zusammenfallen, wenn $C\bar{C} - 4\,D^2 = 0$ ist. Drehen wir in diesem Falle das Koordinatensystem so, daß die ausgezeichnete Gerade zur reellen Achse $u - \bar{u} = 0$ wird, so müssen wir noch $C + \bar{C} + 4\,D = 0$ verlangen. Aus den beiden letzten Bedingungen folgt aber $C = \bar{C} = -2\,D$. Nun beweist man aus den Bedingungen (29) leicht folgenden Satz:

Die kanonisierenden Bedingungen $A = F = B\bar{E} - \bar{B}E = C + 2\,D = \bar{C} + 2\,D = 0$ *bestimmen, von Achsenvertauschungen abgesehen, eine Kreiskurve II. Ordnung, deren Invarianten* I_2, I_3 *und* I_4 *gegebene Werte besitzen.*

Die Gleichung dieser besonderen Form der Kreiskurve II. Ordnung lautet:

$$Bu^2\,\bar{u} + \bar{B}u\bar{u}^2 - D\,(u - \bar{u})^2 + r^2\,(Bu + \bar{B}\,\bar{u}) = 0.$$

Die entartete Kreiskurve II. Ordnung $r = 0$ heißt in der einschlägigen Literatur[14]) die schiefe Kissoide; ist noch $\bar{B} = B$, so erhalten wir die Kissoide des Diokles.

15. Zu der Existenz mehrerer Inversionskreise gelangen wir auch durch die Untersuchung einer anderen altbekannten Eigenschaft der Kreiskurve, nämlich durch die Bestimmung der Lage ihrer Scheitelpunkte. Die Eigenschaft dieser Punkte, daß in jedem von ihnen der Schmiegungskreis eine Berührung III. Ordnung mit der Kurve besitzt, ist ja invariant gegenüber linearen Transformationen.

Wir nehmen zwei solche Punkte, die in bezug auf einen Inversionskreis symmetrisch liegen sollen, verlegen sie nach $u = 0$ und $u = \infty$ und drehen das Koordinatensystem derart, daß der dem Punkte $u = 0$ zugeordnete Schmiegungskreis die Gerade $u + \bar{u} = 0$ berührt. In diesem Falle ist $A = F = B\bar{E} - \bar{B}E = 0$ und also neben $\bar{E} = E$ auch $\bar{B} = B$. Die Gleichung des betrachteten Schmiegungskreises sei etwa:

$$\alpha u \bar{u} + E(u + \bar{u}) = 0.$$

Dann folgt aber aus (25), da nur das Glied mit u^4 übrigbleiben darf:

$$(31) \qquad \alpha[(C - 2D) + \alpha] = 0, \qquad (C - 4D + \bar{C}) + 2\alpha = 0.$$

Den Fall $\alpha = 0$ dürfen wir ausschließen, da sonst die Gerade $u + \bar{u} = 0$ acht Punkte mit der Kreiskurve gemeinsam hätte. Es darf also nur $\alpha = 2D - C$ genommen werden, woraus dann $\bar{C} = C$ folgt. Die Gleichung der Kreiskurve ist also:

$$2Bu\bar{u}(u + \bar{u}) + C(u^2 + \bar{u}^2) + 4Du\bar{u} + 2E(u + \bar{u}) = 0$$

und somit symmetrisch in u und $\bar{u}$, d. h. die Gerade $u - \bar{u} = 0$ ist ein weiterer Inversionskreis der betrachteten Kurve:

Die Scheitelpunkte der Kreiskurve liegen auf den Inversionskreisen und umgekehrt, die Schnittpunkte der Kreiskurve mit den Inversionskreisen sind Scheitelpunkte.

In der Tat, legen wir den Schnittpunkt nach $u = 0$ und machen wir den Inversionskreis zur Geraden $u - \bar{u} = 0$, so ist $\bar{B} = B$, $\bar{C} = C$, $\bar{E} = E$ und $F = 0$. Die Gleichungen (31) werden dann wegen $\bar{C} = C$ identisch.

16. Wir wollen nun zwei von den vier Inversionskreisen auswählen und sie in die reelle bzw. imaginäre Achse transformieren. Weil diese Auswahl auf sechs verschiedene Arten geschehen kann, so muß die sich ergebende kanonisierende Gleichung sechsten Grades sein. Da die transformierte Kreiskurve die Inversionen $u' = \bar{u}$, $u' = -\bar{u}$ zuläßt, ist $\bar{B} = B = 0$, $\bar{C} = C$,

[14]) Loria, S. 36 u. 46.

$\overline{E} = E = 0$, so daß die Gleichung der Kurve folgende einfache Gestalt besitzt:

$$A u^2 \bar{u}^2 + C(u^2 + \bar{u}^2) + 4 D u\bar{u} + F = 0. \tag{32}$$

Man bestätigt leicht, indem man die entsprechenden Inversionen an der Gleichung (32) ausübt, daß die Inversionskreise dieser Kreiskurve die folgenden Kreise:

$$u + \bar{u} = 0, \quad u - \bar{u} = 0, \quad A u\bar{u} - \sqrt{AF} = 0, \quad A u\bar{u} + \sqrt{AF} = 0$$

sind.

Für die Invarianten bekommen wir folgende Ausdrücke:

$$I_2 = D^2 + AF + C^2, \tag{33}$$

$$I_3 = D(AF - C^2), \tag{34}$$

$$I_4 = 8 D^2 (AF + C^2) + (AF - C^2)^2, \tag{35}$$

woraus sich sofort für D folgende kanonisierende Gleichung ergibt:

$$16 D^6 - 8 I_2 D^4 + I_4 D^2 - I_3^2 = 0. \tag{36}$$

Die Beziehung dieser Gleichung zu der Gleichung (30) ist einfach: Die Gleichung (36) ist die Resolvente von (30), wobei die Wurzeln von (36) die arithmetischen Mittel jener von (30) sind. Aus (33) und (34) folgen zu jedem Werte von D leicht jene von AF und C.

17. Da es sich empfiehlt, bei allen Rechnungen über die Kreiskurven diese auf die Gestalt (32) zu reduzieren, wollen wir ausführlich alle oben angeführten Kovarianten angeben. Die Kovarianten h und k sind beziehungsweise:

$$h = AD u^2 \bar{u}^2 - DC(u^2 + \bar{u}^2) + (AF - C^2) u\bar{u} + DF, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} k = {} & A(D^2 - C^2) u^2 \bar{u}^2 + C(D^2 - AF)(u^2 + \bar{u}^2) \\ & + 2 D(AF + C^2 - 2 D^2) u\bar{u} + F(D^2 - C^2). \end{aligned} \tag{38}$$

Aus diesen Ausdrücken ersieht man schon, daß die Kreiskurven $f = 0$, $h = 0$ und $k = 0$ dieselben Inversionskreise besitzen. Für die Brennpunktgleichungen $b = 0$ und $c = 0$ findet man endlich folgende Ausdrücke:

$$b = -AC u^4 + (4 D^2 - AF - C^2) u^2 - FC, \tag{39}$$

$$c = AC D^2 u^4 + [\tfrac{1}{4}(AF - C^2)^2 - D^2(AF + C^2)] u^2 + FC D^2. \tag{40}$$

Es folgt aus (38) leicht für die Brennpunktgleichung $d = 0$ von k die einfache Beziehung:

$$d = J_4 b.$$

Die Kreiskurven $f = 0$ und $k = 0$ besitzen also dieselben Brennpunkte, sie sind konfokal.

Im folgenden werden wir oft die aus (39) und (40) zu berechnenden Werte von u^2 und $ACu^4 + FC$ benötigen. Wir merken uns daher:

$$\Delta u^2 = D^2 b + c, \tag{41}$$

$$\Delta (ACu^4 + FC) = (6 D^2 - I_2) c - (6 D^4 - 3 I_2 D^2 + \tfrac{1}{4} I_4) b, \tag{42}$$

wo

$$\Delta = 12 D^4 - 4 I_2 D^2 + \tfrac{1}{4} I_4 \tag{43}$$

von einem numerischen Faktor abgesehen, die Ableitung von (36) nach D^2 bedeutet.

18. Die Gestalt der Kreiskurven (32), (37), (38) ist seit altersher bekannt unter dem Namen der spirischen Linie des Perseus, für welche ausgedehnte Untersuchungen vor allem ihrer metrischen Eigenschaften vorliegen[15]).

Ausgezeichnete spirische Linien bekommt man, wenn man noch $I_3 = 0$ verlangt. Nach (34) folgt dann, daß im Falle $D = 0$ die Kreiskurve $f = 0$ zur Cassinischen Kurve wird. Allgemeiner bedeutet aber $I_3 = 0$, daß sich die zugeordnete Kreiskurve $h = 0$ auf ein Punktepaar zusammenzieht.

19. Eine andere in der Literatur [16]) bekannte Kurvenart bekommen wir durch eine besonders einfache Transformation. Wir legen einen Brennpunkt der Kreiskurve $f = 0$ nach ∞ und den nach den Gleichungen (22) zugeordneten Brennpunkt von $h = 0$ nach 0. Setzen wir also in (22) $u = \infty$, $v = 0$, so bekommen wir sofort $B = C = 0$ und somit auch $\bar{B} = \bar{C} = 0$. Verlangen wir noch $\bar{E} = E$, was wir durch eine Drehung um die Punkte 0, ∞ erreichen können, so ist die Gestalt der so transformierten Kreiskurve:

$$Au^2\bar{u}^2 + 4 Du\bar{u} + 2 E (u + \bar{u}) + F = 0,$$

worin man leicht ein kartesisches Oval erkennt.

Auf einige weitere kanonische Gestalten der Kreiskurve II. Ordnung werden wir noch im Laufe späterer Untersuchungen stoßen.

20. Mit Hilfe der Formeln für die spirische Linie sind wir jetzt im Stande, die Vollständigkeit des Systems der Invarianten I_2, I_3 und I_4 zu beweisen. Wir wollen zeigen, daß man jede Invariante I, die eine ganze homogene Funktion der Koeffizienten der betrachteten Kreiskurve $f = 0$ ist, als eine ganze homogene Funktion von I_2, I_3 und I_4 darstellen kann.

Die beliebige Invariante I sei in allen Koeffizienten von $f = 0$ vom n-ten Grade, es sei also I vom Gewicht n. Ordnet die lineare Substitution L der Veränderlichen u und den Koeffizienten A, B, $\bar{B}$, ..., F die neue Veränderliche u' und die Koeffizienten A', B', $\bar{B}'$, ..., F' zu, wobei die Deter-

---

[15]) Loria, S. 124; De la Gournerie, Mémoire sur les liques spiriques. J. de Math. (2), **14** (1869), S. 9 und 103; Siebeck, Über eine Gattung von Kurven vierten Grades, welche mit elliptischen Funktionen zusammenhängen. J. f. Math. **57** (1860), S. 359; **59** (1861), S. 173.

[16]) Loria, S. 174.

minante von L gleich d sei, so ergibt ein Vergleich der Substitutionskoeffizienten:

(44) $$I' = (d\,\bar{d})^{-n} I.$$

Für unitäre Substitutionen L, deren Determinante also $+1$ oder -1 ist, ist nach (44) I eine absolute Invariante. Wir transformieren mit Hilfe einer solchen Substitution die vorgelegte Kreiskurve in eine spirische Linie. Um aber die Bezeichnungen zu vereinfachen, wollen wir voraussetzen, daß bereits $f = 0$ die Gleichung einer spirischen Linie sei. Dann ist offenbar:

$$I = I(A, C, D, F).$$

Wir wollen nun die Abhängigkeit der Funktion I von A, C, D und F näher untersuchen. Transformieren wir die Gleichung (32) von $f = 0$ mittels der Substitution $u' = \frac{1}{u}$, so behalten C und D ihre Werte, während sich A und F untereinander vertauschen. Die Funktion I enthält also A und F in den symmetrischen Formen $A + F$ und AF. Die lineare Substitution $u' = \varrho u$, wo ϱ reell ist, ändert dagegen A, C, D und F in $A\varrho^{-4}$, $C\varrho^{-2}$, $D\varrho^{-2}$ und F, also insbesondere $A + F$ in $A\varrho^{-4} + F$. Da im Falle dieser Substitution alle Glieder von I den Faktor ϱ^{-2n} bekommen, so müßte $A\varrho^{-4} + F = \varrho^{-2}(A + F)$ sein, was offenbar für beliebige Werte von ϱ unmöglich ist. Die Funktion I enthält also die Veränderlichen A und F nur in der Verbindung AF. Ebenso leicht kann man zeigen, daß I nur von C^2 abhängt. Wäre etwa:

$$I = I_1 + CI_2,$$

wo I_1 und I_2 nur noch AF, C^2 und D enthalten, so würde die Substitution $u' = iu$ die Werte von A, F, D unverändert lassen, C aber in $-C$ und also $I_1 + CI_2$ in $I_1 - CI_2$ verwandeln.

Wir sehen also, daß die Funktion I nur von den Werten AF, C^2 und D abhängt:

$$I = I(AF, C^2, D).$$

Berechnen wir nun aus (33) und (34) die Werte von AF und C^2 und setzen sie in die Funktion I ein, so erhalten wir in verständlicher Weise:

$$I = I\left(I_2, \frac{I_3}{D}, D\right).$$

Wenden wir noch die Gleichung (36) an, so können wir aus der obigen Gleichung alle Potenzen von $\frac{I_3}{D}$ mit einem Exponent größer als 1 und alle Potenzen von D mit einem Exponent größer als 6 entfernen:

(45) $$I = I\left(I_2, I_3, I_4, D, \frac{I_3}{D}\right).$$

In der letzten Gleichung tritt $\frac{I_3}{D}$ nur in der ersten, D aber in den ersten fünf Potenzen auf. Multiplizieren wir (45) mit D, so bekommen wir eine

Gleichung sechsten Grades für D, die mit (36) alle Wurzeln gemein haben muß. Eine letzte Anwendung von (36) gibt also:

$$I = I(I_2, I_3, I_3),$$

w. z. z. w.

III. Allgemeine Eigenschaften der Kreiskurven zweiter Ordnung.

21. Untersuchen wir die auf die spirische Gestalt reduzierte Kreiskurve, so sind offenbar solche Eigenschaften der spirischen Linie, welche sich in invarianter Weise ausdrücken lassen auch allgemeine Eigenschaften einer jeden Kreiskurve.

Auf diese Weise wollen wir zuerst allgemeine Sätze über die gegenseitige Lage der Brennpunkte und der Inversionskreise einer Kreiskurve bestimmen. Die Brennpunkte genügen den Gleichungen $b = 0$, $\bar{b} = 0$, die aber im Falle der spirischen Linie in eine einzige zusammenfallen:

$$AC u^4 + (AF + C^2 - 4D^2) u^2 + FC = 0.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind alle reell bzw. rein imaginär, wenn $AF > 0$, oder paarweise reell und rein imaginär, wenn $AF < 0$ ist. Man bekommt alle 16 Brennpunkte der Kreiskurve, wenn wir $\xi + i\eta = u_k$, $\xi - i\eta = u_l$ setzen und daraus ξ und η berechnen:

$$\xi = \frac{u_l + u_k}{2}, \quad \eta = i\,\frac{u_l - u_k}{2}.$$

Man bestätigt leicht, daß sie zu je vieren auf den Inversionskreisen liegen. Die reellen Brennpunkte folgen daraus, wenn wir zu u_k jeweils $u_l = \bar{u}_k$ nehmen. Nun sahen wir oben, daß die spirische Linie folgende Inversionskreise:

$$i(u - \bar{u}) = 0, \quad u + \bar{u} = 0, \qquad Au\bar{u} - \sqrt{AF} = 0, \quad Au\bar{u} + \sqrt{AF} = 0$$

besitzt. Sind die Koeffizienten in der Gleichung der spirischen Linie reell, so entscheidet über die Realität dieser Kreise die Größe AF. Dabei wird ein Kreis als reell aufgefaßt, wenn in $\alpha u\bar{u} + \beta u + \bar{\beta}\bar{u} + \gamma = 0$ α, γ reell, β und $\bar{\beta}$ aber konjugiert komplex sind. Wir erhalten so folgende bereits bekannte[17]) Einteilung der Kreiskurven II. Ordnung:

A. Bei den Kreiskurven mit einem Paar reeller und einem Paar komplexer Inversionskreise liegen die reellen Brennpunkte paarweise auf beiden reellen Inversionskreisen.

B. Bei den Kreiskurven mit vier reellen Inversionskreisen liegen die reellen Brennpunkte auf demselben Inversionskreise und

C. die komplexen Kreiskurven.

22. Die letzte Einteilung wollen wir dadurch vervollständigen, daß wir sie mit Hilfe der Werte der Invarianten I_2, I_3, I_4, g_2, g_3 ausdrücken. Zu

[17]) Darboux, S. 30.

diesem Zweck berechnen wir uns aus (33) und (34) das Produkt $16\,AFC^2$. Es ist, wenn wir mit φ die linke Seite der kanonisierenden Gleichung:

$$16\,D^6 - 8\,I_2\,D^4 + I_4\,D^2 - I_3^2 = 0$$

bezeichnen:

$$(46) \qquad 16\,AFC^2 = -48\,D^4 + 16\,I_2\,D^2 + 4\,I_2^2 - 4\,I_4 = 12\,g_2 - \varphi',$$

wo φ' die erste Ableitung von φ nach D^2 bedeutet.

Ist die Diskriminante $g_2^3 - 27\,g_3^2$ von φ negativ, so besitzt die Gleichung $\varphi = 0$ eine positive und zwei konjugiert komplexe Wurzeln. Ist g_2 negativ, so ist nach (46) für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ das Produkt $16\,AFC^2$ negativ. Wenn wir also das Vorzeichen von D geeignet wählen, so ist AF negativ, und C^2 positiv, das ist aber der Fall A. der obigen Einteilung (siehe Fig. 1).

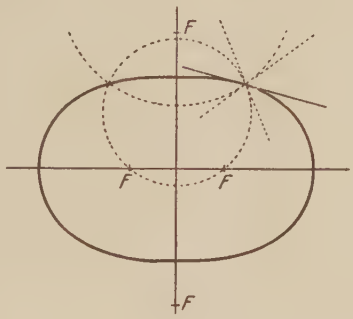


Fig. 1.

Ist g_2 positiv aber $g_2^3 - 27\,g_3^2 < 0$, so berechnen wir uns die Werte von D^2, für welche $12\,g_2 - \varphi' = 0$ wird. Wir finden für $6\,D^2$ bzw. die reellen Werte:

$$(47) \qquad I_2 - 2\sqrt{3\,g_2}, \qquad I_2 + 2\sqrt{3\,g_2}.$$

Für diese beiden Werte von D^2 berechnen wir uns die entsprechenden Werte der Funktion φ:

$$\tfrac{4}{9}\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}\,g_3 - g_2\sqrt{g_2}), \qquad \tfrac{4}{9}\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}\,g_3 + g_2\sqrt{g_2}),$$

wo alle Wurzelzeichen positiv genommen sind. Das Produkt dieser beiden Werte ist vom numerischen Faktor abgesehen $27\,g_3^2 - g_2^3$ also im eben behandelten Falle positiv. Im Intervalle (47) kann also φ nur eine gerade Zahl von Wurzeln besitzen, die aber Null sein muß, da $\varphi = 0$ nur eine reelle Wurzel besitzt. Nun ist $12\,g_2 - \varphi'$ im Intervall (47) positiv, außerhalb aber negativ, es ist also wiederum $16\,AFC^2$ für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ negativ und somit auch $AF < 0$.

Nun wollen wir noch den Fall $g_2^3 - 27\,g_3^2 > 0$ erledigen. Die Gleichung $\varphi = 0$ besitzt alsdann drei reelle Wurzeln, die nur für $I_2 > 0$, $I_4 > 0$ alle positiv sind. In allen anderen Fällen haben wir zwei negative und eine positive Wurzel. In jedem Falle liegen aber alle diese Wurzeln im Intervall (47), da die Werte von φ, φ', φ'' im rechten Endpunkte positiv, im linken dagegen abwechselnd negativ und positiv sind. Die Funktion φ ist also rechts von $I_2 + 2\sqrt{3\,g_2}$ dauern positiv, links von $I_2 - 2\sqrt{3\,g_2}$ aber dauernd negativ. Das Produkt AFC^2 ist positiv und somit AF, C^2 von denselben Vorzeichen

wie $AF + C^2 = I_2 - 2D^2$. Nun besitzt $3(I_2 - 2D^2)$ in den Endpunkten des Intervalles bzw. die Werte:

$$2I_2 + 2\sqrt{3g_2}, \qquad 2I_2 - 2\sqrt{3g_2},$$

deren Produkt $3I_4$ ist. Sind nun I_2, I_4 beide positiv, dann ist auch $I_2 - 2D^2$ im ganzen Intervall positiv und somit auch AF und C^2, das ist aber der Fall B. der obigen Einteilung (s. Fig. 2).

Ist I_2 oder I_4 oder beides negativ, so können wir ebenso leicht zeigen, daß die entsprechende Kreiskurve komplex ist. Ist in der Tat I_4 negativ und I_2 positiv, so schneidet, wenn wir für den Augenblick $D^2 = x$ und $y = I_2 - 2x$ setzen, die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse unterhalb der positiven Wurzel von $\varphi = 0$, da für $2D^2 = I_2$ die Funktion φ gleich $\frac{1}{2} I_2 I_4 - I_3^2$ und also negativ ist. Für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ ist also $AF + C^2$ und somit C^2 negativ, während für die negative Wurzel von $\varphi = 0$ D^2 negativ und AF, C^2 positiv sind.

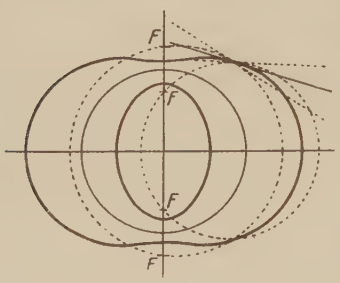


Fig. 2.

Im Falle $I_4 > 0$, $I_2 < 0$ schneidet die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse außerhalb des Intervalles (47), in dessen Endpunkten $I_2 - 2D^2$ negativ ist. Wir erkennen so, daß für $D^2 > 0$ dagegen AF, $C^2 < 0$ ist und für $D^2 < 0$ ebenso AF, $C^2 < 0$ ist. Im letzten Falle ist die entsprechende Kreiskurve rein imaginär.

Ist endlich $I_2 < 0$, $I_4 < 0$, so schneidet die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse im Intervall (47), doch da $x_0 = \frac{1}{2} I_2$ negativ ist unterhalb der positiven Wurzel von $\varphi = 0$, so daß wiederum nur komplexe oder rein imaginäre Fälle möglich sind.

Wir können nunmehr folgende endgültige Einteilung der Kreiskurven II. Ordnung aufstellen:

A. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$ *besitzen zwei reelle und zwei komplexe Inversionskreise und die reellen Brennpunkte liegen paarweise auf den beiden reellen Inversionskreisen.*

B. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ *und* $I_2 > 0$, $I_4 > 0$, *besitzen vier reelle Inversionskreise und die reellen Brennpunkte liegen auf einem Inversionskreise.*

C. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ *und* $I_2 < 0$ *oder* $I_4 < 0$ *oder* $I_2, I_4 < 0$ *sind komplex.*

23. Es könnte vorkommen, da auch im Falle C. die Invarianten I_2, I_3, I_4 reelle Größen sind, daß nur die auf die spirische Gestalt reduzierte Kreiskurve komplexe Koeffizienten erhält. Nun ist leicht einzusehen, daß dies nicht der Fall ist. Nehmen wir in der Tat eine reelle Kreiskurve mit $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$,

so liegen wegen der letzten Ungleichung die vier reellen Brennpunkte auf einem Kreise. Wir bilden nun durch eine lineare Transformation diesen Kreis derart auf die reelle x-Achse ab, daß die Brennpunkte symmetrisch zur y-Achse zu liegen kommen. Die Koeffizienten in der Gleichung der transformierten Kreiskurve bleiben dabei reell bzw. in vorgeschriebener Art konjugiert komplex. Die Brennpunktgleichung besitzt vier reelle Wurzeln und wegen der Symmetrie zur y-Achse nur gerade Potenzen der Unbekannten. Die Koeffizienten der neuen Gleichung genügen also nach (16) folgenden Bedingungen:

$$(48)\qquad \begin{aligned} 2DB - C\bar{B} - AE &= 0, \qquad 2D\bar{E} - \bar{C}E - F\bar{B} = 0,\\ 2D\bar{B} - \bar{C}B - A\bar{E} &= 0, \qquad 2DE - C\bar{E} - FB = 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen E, $\bar{E}$, so bekommen wir für B, $\bar{B}$ folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} (4D^2 + C\bar{C} - AF)\,\bar{B} - 4D\bar{C}B &= 0,\\ -4DC\bar{B} + (4D^2 + C\bar{C} - AF)\,B &= 0. \end{aligned}$$

Ist $(4D^2 + C\bar{C} - AF)^2 - 16D^2C\bar{C} \neq 0$, so folgt $B = \bar{B} = 0$, dann auch $E = \bar{E} = 0$, also die spirische Gestalt. Dann folgt aber aus (33) und (35), da die Koeffizienten reell sind, $I_2 > 0$, $I_4 > 0$.

Die Bedingung $(4D^2 + C\bar{C} - AF)^2 - 16D^2C\bar{C} = 0$ hat zur Folge. wenn $D \neq 0$ ist, daß die Kreiskurve noch einen dritten Doppelpunkt hat, Ist aber $D = 0$, so ist auch $AF - C\bar{C} = 0$ und nach (48) $AE + C\bar{B} = 0$, $A\bar{E} + \bar{C}B = 0$. Dies sind aber kanonisierende Bedingungen einer auf eine neue Art reduzierten Kreiskurve, die wir als ein Gegenstück der spirischen Linie auffassen können. Das Bemerkenswerte dieser Reduktion ist, daß sie sich gleichzeitig auf alle drei Kovarianten f, h, k auswirkt. Die reduzierte Gleichung ist aber nur im Falle $g_2^3 - 27\,g_3^2 < 0$ reell, so daß jedenfalls der Fall C. wiederum auf komplexe Kreiskurven führt.

24. Man definiert z. B. die spirische Linie in mannigfacher Weise als den geometrischen Ort jener Punkte, für welche die Entfernungen von festen Punkten lineare oder quadratische Relationen erfüllen. Diese Definitionen sind aber in unserer Theorie unbrauchbar, da ja die Entfernung zweier Punkte keine Invariante der linearen Transformation ist. Wir wollen daher eine solche Definition der spirischen Linie aufstellen, welche nur invariante Größen enthält und also für eine beliebige Kreiskurve gilt.

Wir nehmen, um diese Rechnungen möglichst einfach durchzuführen, den Fall einer spirischen Linie mit vier reellen Brennpunkten, die auf der x-Achse liegen sollen. Wir bezeichnen diese Punkte mit $\pm e_1$, $\pm e_2$, wobei also

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{4D^2 - AF - C^2}{AC}, \quad e_1^2 e_2^2 = \frac{F}{A}$$

ist. Durch einen gegebenen Punkt u der spirischen Linie legen wir zwei Kreise bzw. durch die Punkte $-e_1$, e_1 und $-e_2$, e_2. Diese beiden Kreise sollen (s. Fig. 3) nun mit der x-Achse die Winkel ε_1 und ε_2 bilden. Die Gleichungen dieser beiden Kreise sind dann:

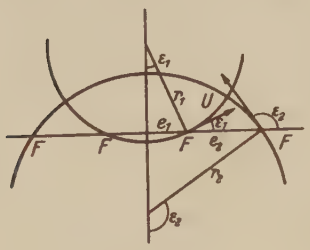


Fig. 3.

$$u\bar{u} + ie_k \operatorname{cotg} \varepsilon_k (u - \bar{u}) - e_k^2 = 0,$$
$$k = 1, 2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber leicht

$$i(u - \bar{u}) = \frac{e_1^2 - e_2^2}{e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_2},$$

$$u\bar{u} = e_1 e_2 \frac{e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_2}{e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_2}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung der Kreiskurve $f = 0$, so finden wir nach einigen Umformungen:

$$\operatorname{cotg}^2 \varepsilon_1 + \operatorname{cotg}^2 \varepsilon_2 - 2p \operatorname{cotg} \varepsilon_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = p^2 - 1, \tag{49}$$

wo

$$p = \frac{2D - C}{\sqrt{AF}}$$

ist und sich in bestimmter Weise durch Invarianten der Kreiskurve ausdrücken läßt. Multiplizieren wir die Gleichung (49) mit $\sin^2 \varepsilon_1 \sin^2 \varepsilon_2$, so erhalten wir endlich:

$$\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = \pm 1. \tag{50}$$

Man bekommt zwei Formen der gleichen Art, wenn man die vier Brennpunkte auf andere Weise zu Paaren kombiniert und durch die Punkte eines Paares wie oben Kreise legt.

Da diese Relationen offenbar invariant sind, so haben wir also, wenn wir komplexe Winkel und komplexe Punkte (vgl. Fig. 1 und 2) zulassen, für die allgemeine Kreiskurve folgende Definition:

Legt man durch vier Punkte eines gegebenen Kreises zwei veränderliche Kreise K_1, K_2, welche mit dem gegebenen solche Winkel ε_1, ε_2 bilden, daß eine Relation der Form:

$$\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = 1$$

erfüllt ist, so liegen die Schnittpunkte der Kreise K_1, K_2 auf einer Kreiskurve II. Ordnung.

25. Diese Kreispaare besitzen noch eine andere wichtige Eigenschaft, die schon von Darboux angegeben wurde[18]): *Die Tangente an die Kreiskurve im gegebenen Punkte ist eine Symmetrale des Winkels, gebildet von den Tangenten an die beiden Kreise im betrachteten Punkte.*

---

[18]) Darboux, S. 56.

Wir beweisen dies, um im Rahmen der Kreisgeometrie zu bleiben, mit Hilfe zweier Kreise, die wir sinngemäß als Symmetralkreise bezeichnen können. Setzen wir:

$$\Phi_k = \alpha_k u\bar{u} + \beta_k u + \bar{\beta}_k \bar{u} + \gamma_k = 0, \qquad k = 1, 2,$$

so bestätigt man mit elementaren Rechnungen, daß die Tangenten in den gemeinsamen Schnittpunkten an die Kreise:

$$r_2\Phi_1 + r_1\Phi_2 = 0, \quad r_2\Phi_1 - r_1\Phi_2 = 0,$$

wo r_k die Invariante $\sqrt{\beta_k\bar{\beta}_k - \alpha_k\gamma_k}$ von Φ_k bedeutet, Symmetralen der Tangenten an die Grundkreise $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_2 = 0$ sind.

Wir bestimmen ferner die Bedingung, welche ein zum Inversionskreis $u + \bar{u} = 0$ orthogonaler Kreis $\alpha u\bar{u} + \beta i(u - \bar{u}) + \gamma = 0$ erfüllen muß, damit er die Kreiskurve:

$$Au^2\bar{u}^2 + C(u - \bar{u})^2 + 2(2D + C)u\bar{u} + f = 0$$

berührt. Wir finden, daß die reellen Zahlen α, β, γ der folgenden Gleichung:

$$\beta^2[(2D + C)^2 - AF] + C[A\gamma^2 - 2(2D + C)\gamma\alpha + F\alpha^2] = 0$$

genügen müssen.

Wir berechnen nun für die Kreise:

$$\Phi_k = u\bar{u} + i e_k \operatorname{cotg} \varepsilon_k (u - \bar{u}) - e_k^2 = 0$$

der vorigen Nummer die Gleichungen der beiden Symmetralkreise. Diese fassen wir in der folgenden Gleichung:

$$u\bar{u}(e_2 \sin \varepsilon_1 + \eta e_1 \sin \varepsilon_2) + i e_1 e_2 (\cos \varepsilon_1 + \eta \cos \varepsilon_2)(u - \bar{u}) - e_1 e_2 (e_1 \sin e_1 + \eta e_2 \sin \varepsilon_2) = 0$$

zusammen, wo η gleich $+1$ oder -1 ist. Setzen wir die Koeffizienten der letzten Gleichung in die oben aufgestellte Tangentialbedingung, so findet man für den Ausdruck:

$$AC[A\gamma^2 - 2(2D + C)\gamma\alpha + F\alpha^2]$$

den Wert

$$[(2D + C)^2 - AF][F(\sin^2 \varepsilon_1 + \sin^2 \varepsilon_2) + 2\eta(2D - C) e_1 e_2 \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2],$$

woraus dann mit Leichtigkeit die Gleichung:

$$\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = \eta$$

folgt.

IV. Kreise in bezug auf eine Kreiskurve zweiter Ordnung.

26. Die „invariante" Lage eines Kreises zur gegebenen Kreiskurve II. Ordnung ist bestimmt durch die Verhältnisse der gemischten Invarianten i_0, i_1, i_2, i_3. Für besondere Werte dieser Invarianten erhalten wir zur

Kreiskurve ausgezeichnet gelegene Kreise. Berechnet man z. B. die Werte von i für die vier Inversionskreise, so findet man:

$$(51) \quad i_1 = -2 i_0 l, \quad i_2 = \frac{i_0}{2}(I_2 - 2 l^2), \quad i_3 = i_0 (3 I_3 + I_2 l - 2 l^3),$$

wo l der schon so oft erwähnten Gleichung:

$$(52) \qquad l^4 - I_2 l^2 - 2 I_3 l + J_4 = 0$$

genügt.

27. Eine andere Anwendung finden die Invarianten i bei der Bestimmung des Doppelverhältnisses der vier Punkte, in welchen ein Kreis die gegebene Kreiskurve schneidet. Verlegt man einen von diesen Schnittpunkten nach $u = 0$, einen anderen aber nach $u = \infty$, so kann man für die rationalen Invarianten g_2 und g_3, die wir hier mit γ_2 und γ_3 bezeichnen wollen, leicht folgende Werte berechnen:

$$\gamma_2 = \tfrac{1}{3}(i_1^3 + 12 i_2 i_0 + 6 I_2 i_0^2),$$
$$\gamma_3 = -\tfrac{1}{4}[i_1^3 + 9 i_1 i_0 (2 i_2 + I_2 i_0) + 54 i_3 i_0^2].$$

Aus den letzten Formeln folgert man ohne weiteres die invariant geschriebene Bedingung der Kreise, die die Kreiskurve in vier harmonischen ($\gamma_3 = 0$) oder in vier äquianharmonischen ($\gamma_2 = 0$) Punkten schneiden. Insbesondere gehören die Kreise $i_1 = i_3 = 0$ zum ersten und die Kreise $i_1 = 0$, $2 i_2 + I_2 i_0 = 0$ zum zweiten Falle. Endlich ergeben die Gleichungen $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ die einfach unendlich vielen Schmiegungskreise der Kreiskurve. Man bestätigt leicht, wenn man den betrachteten Punkt nach $u = 0$ verlegt, daß die Schmiegungskreise mit $i_1 = 6 l i_0$, wo l (52) genügt, zu den Scheitelpunkten der Kreiskurve gehören. Eine andere Art besonderer Schmiegungskreise sind jene mit $i_1 = i_3 = 2 i_2 + I_2 i_0 = 0$.

28. Wir reduzieren eine beliebige Kreiskurve auf die spirische Gestalt, wenn wir zuerst ihre Inversionskreise bestimmen und zwei von diesen in die Achsen des Koordinatensystems transformieren. Da diese die Kreiskurve orthogonal schneiden, so fragen wir also nach solchen Kreisen, die die letztgenannte Eigenschaft besitzen. Die Orthogonalitätsbedingung zweier Kurven $f(u, \bar{u}) = 0$ und $g(u, \bar{u}) = 0$ lautet aber offenbar:

$$(53) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}} = 0.$$

Um diese Bedingung invariant ausdrücken zu können, berechnen wir uns für die Kreiskurven $f = 0$ und

$$g = \alpha u \bar{u} + \beta u + \bar{\beta} \bar{u} + \gamma = 0$$

die aus (9) folgende Kovariante. Aus (9) folgt, da $m = 2$, $m_1 = 1$, $\varrho = \varrho_1 = 0$ und also $m + m_1 - 2 = 1$ ist, daß die Kovariante:

$$g' = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}} g + f \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \bar{u}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}}\right),$$

gleich Null gesetzt, die Gleichung eines Kreises ist. Die Orthogonalitätsbedingung (53) der Kurven $f = 0$ und $g = 0$ entspricht dann der invarianten Gleichung $g' = 0$, die explizit aufgeschrieben lautet:

$$(54)\quad u\bar{u}\,(D\alpha - \bar{B}\beta - B\bar{\beta} + A\gamma) + u\,(E\alpha - D\beta - C\bar{\beta} + B\gamma) + \bar{u}\,(\bar{E}\alpha - \bar{C}\beta - D\bar{\beta} + \bar{B}\gamma) + (F\alpha - \bar{E}\beta - E\bar{\beta} + D\gamma) = 0.$$

Der Kreis $g = 0$ schneidet die Kreiskurve $f = 0$ in allen vier Punkten orthogonal, wenn g' identisch gleich lg wird. Die Koeffizienten der Inversionskreise genügen also folgende Gleichungen:

$$(55)\quad \begin{aligned} (D-l)\alpha - \bar{B}\beta - B\bar{\beta} + A\gamma &= 0,\\ E\alpha - (D+l)\beta - C\bar{\beta} + B\gamma &= 0,\\ \bar{E}\alpha - \bar{C}\beta - (D+l)\bar{\beta} + \bar{B}\gamma &= 0,\\ F\alpha - \bar{E}\beta - E\bar{\beta} + (D-l)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung für l ist in Determinantenform leicht anzuschreiben, ausgerechnet ist sie natürlich (52).

Die Bedeutung von l folgt leicht aus (55). Multipliziert man die Gleichungen (55) bzw. mit γ, $-\bar{\beta}$, $-\beta$, α und addiert sie alsdann, so folgt:

$$i_1 + 2li_0 = 0,$$

wie das bereits in (51) angegeben wurde.

29. Die Kreisgleichung $g' = 0$ erzeugt aber, wenn wir von ihr noch die mit einer beliebigen Konstanten l multiplizierte Kreisgleichung $g = 0$ abziehen, eine wichtige der gegebenen Kreiskurve zugeordnete und von einem Parameter l abhängende Kreistransformation:

$$(56)\quad \begin{aligned} \varrho\alpha_1 &= (D-l)\alpha - \bar{B}\beta - B\bar{\beta} + A\gamma,\\ \varrho\beta_1 &= E\alpha - (D+l)\beta - C\bar{\beta} + B\gamma,\\ \varrho\bar{\beta}_1 &= \bar{E}\alpha - \bar{C}\beta - (D+l)\bar{\beta} + \bar{B}\gamma,\\ \varrho\gamma_1 &= F\alpha - \bar{E}\beta - E\bar{\beta} + (D-l)\gamma. \end{aligned}$$

Die Transformation $g \to g'$ ist in dem Sinne invariant gegenüber linearen Transformationen, daß letzte die Zuordnung der beiden Kreise g und g' nicht zerstören. Man sieht dies auch ein, wenn wir die Gleichungen (56) bzw. mit γ, $-\bar{\beta}$, $-\beta$, α multipliziert addieren und so die gegenüber linearen Transformationen invariante Beziehung:

$$\varrho\,(\beta\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}\beta_1 - \alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) + i_1 + 2li_0 = 0$$

gewinnen. Damit haben wir sogleich die geometrische Interpretation der gemischten Invariante $i_1 + 2li_0$ gefunden:

Jedem Kreise, der die Bedingung $i_1 + 2li_0 = 0$ erfüllt, entspricht infolge der Transformation (56) *ein Kreis, welcher zu dem ursprünglichen orthogonal ist.*

Auch die so erhaltenen Kreise genügen selbst einer leicht anzugebenden Bedingung. Eliminieren wir aus (56) und der Orthogonalitätsbedingung der Kreise $(\alpha_1, \beta_1, \bar{\beta}_1, \gamma_1)$ und $(\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma)$ die Koeffizienten $\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma$ und unterdrücken dann den Index 1, so finden wir:

$$(57) \qquad \begin{vmatrix} A & B & \bar{B} & D+l & \alpha \\ B & C & D-l & E & \beta \\ \bar{B} & D-l & \bar{C} & \bar{E} & \bar{\beta} \\ D+l & E & \bar{E} & F & \gamma \\ \alpha & \beta & \bar{\beta} & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet:

$$(58) \qquad i_3 - (2\,i_2 + I_2 i_0)l + i_1 l^2 + 2\,i_0 l^3 = 0.$$

Also:

Jedem Kreise, der der Bedingung $i_1 + 2\,l i_0 = 0$ *genügt, entspricht infolge der Transformation* (56) *ein Kreis, der* (58) *erfüllt.*

Berechnet man aus (56) noch den Ausdruck $\varrho^2(\beta_1\bar{\beta}_1 - \alpha_1\gamma_1)$, so findet man:

$$2\,\varrho^2(\beta_1\bar{\beta}_1 - \alpha_1\gamma_1) + (2\,i_2 + I_2 i_0) + 2\,i_1 l - 2\,i_0 l^2 = 0$$

und somit:

Jedem Kreise, der die Bedingung $(2\,i_2 + I_2 i_0) + 2\,i_1 l - 2\,i_0 l^2 = 0$ *erfüllt, entspricht infolge der Transformation* (56) *ein Punktkreis.*

30. Die Transformation (56), angewandt auf Punktkreise, etwa $\alpha = 1$, $\beta = -\bar{z}$, $\bar{\beta} = -z$, $\gamma = z\bar{z}$ gibt einfache geometrische Deutungen der Gleichungen $f = 0$, $h = 0$, $k = 0$. Die Anwendung der oben bewiesenen Sätze führt dann zu folgenden Theoremen:

Jedem Punkte von $f = 0$ *entspricht infolge* (56) *ein Kreis, der die Kreiskurve in diesem Punkte berührt.*

Jedem Punkte der Kreiskurve $h + lf = 0$ *entspricht infolge* (56) *wiederum ein Punkt.*

Jeder Punkt der Kreiskurve $k - 2\,hl + fl^2 = 0$ *entsteht aus der Transformation* (56) *eines bestimmten, die Kreiskurve berührenden Kreises.*

In der Tat entspricht nach (56) dem Punkte $u = 0$ der Kreiskurve $f = 0$ der Kreis $(D + l)\,u\bar{u} + Eu + \bar{E}\bar{u} = 0$. Ebenso leicht beweist man den letzten Satz, wenn der betrachtete Punkt der Kreiskurve der Punkt $u = 0$ ist und als Kreis, aus welchem $u = 0$ entsteht, die Gerade $\alpha = \gamma = 0$, $\bar{\beta} = \beta$ genommen wird.

Durch besondere Wahl des Parameters l können wir auch erreichen, daß die den einzelnen Punkten der Kreiskurve $f = 0$ entsprechenden Kreise Schmiegungskreise sind. Dazu ist noch notwendig, l in $(D + l)\,u\bar{u} + Eu + \bar{E}\bar{u} = 0$ derart zu bestimmen, daß der Koeffizient von u in (25) verschwindet. Dies ergibt:

$$l = -\frac{C\bar{E}^2 - 2\,DE\bar{E} + \bar{C}E^2}{2\,E\bar{E}},$$

woraus man mühelos für l folgende invariante Schreibweise bestimmen kann:

$$l = \frac{k}{2h}, \tag{59}$$

31. Die Kreistransformation (56) ist für die Kreiskurve das Analogon der Polarentheorie der Kegelschnitte, doch sind die Unterschiede nicht unbedeutend. Sie ist nicht wie bei Kegelschnitten die Zuordnung von Pol und Polare involutorisch, sondern ist im allgemeinen von unendlich hoher Ordnung.

Um die Eigenschaften dieser Transformation näher zu untersuchen, bemerken wir, daß wir sie als eine besondere lineare Transformation des komplexen Raumes $(\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma)$ auffassen können. In der Tat sind die Fixpunkte von (56) in diesem Raume solche vier Punkte, daß die entsprechenden Kreise zueinander orthogonal sind. Ist $\varphi_i = 0$ jener Inversionskreis, dem die Wurzel l_i von (52) entspricht, so multipliziert sich φ_i bei der Ausübung der Transformation (56) mit dem Faktor $(l_i + l)$. Schreiben wir also einen beliebigen Kreis ψ in der Form $\sum_1^4 a_i \varphi_i$, so ist der nach (56) transformierte Kreis ψ_1 einfach:

$$\psi_1 = \sum_1^4 a_i (l_i + l)\, \varphi_i.$$

Die Transformationen (56), die Kreiskurven mit denselben Inversionskreisen entsprechen, werden sich kommutativ zusammensetzen lassen und ihre Gesamtheit bildet eine von drei wesentlichen Parametern abhängende kommutative Gruppe.

Ist $A = B = \bar{B} = \ldots = F = 0$, so ist die zugehörige Transformation (56) die Einheitstransformation. Um rechnerisch die Zusammensetzung zweier Transformationen T_1 und T_2 auszuführen, geben wir den beiden Kreiskurven, die dieselben Inversionskreise besitzen sollen, die spirische Gestalt. Es ist dann leicht, einzusehen, daß die allgemeinste Kreiskurve mit gegebenen Inversionskreisen in der Form:

$$pf + qh + rk = 0$$

geschrieben werden kann. In der Tat hat nach (32) die Gleichung der allgemeinsten Kreiskurve, welche die Inversionskreise:

$$u + \bar{u} = 0, \quad u - \bar{u} = 0, \quad Au\bar{u} + \sqrt{AF} = 0, \quad Au\bar{u} - \sqrt{AF} = 0$$

besitzt, die Gestalt:

$$(Au^2\bar{u}^2 + F) + C_1 (u^2 + \bar{u}^2) + 4 D_1 u\bar{u} = 0.$$

Eliminieren wir aus der letzten Gleichung und aus den mit Hilfe von (32), (37), (38) geschriebenen Gleichungen von $f = 0$, $h = 0$ und $k = 0$ die Ausdrücke $(Au\bar{u}^2 + F)$, $(u^2 + \bar{u}^2)$ und $u\bar{u}$, so bekommen wir eine in f, h und k lineare Gleichung, wie oben behauptet wurde.

Enthält die Transformation T_i die Parameter p_i, q_i, r_i, l_i und das Produkt $T_1 T_2$ aber die Parameter P, Q, R, L, so finden wir:

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{4} I_2 (p_1 q_2 + q_1 p_2) + \tfrac{1}{2} I_3 (p_1 r_2 + q_1 q_2 + r_1 p_2) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} J_4 (q_1 r_2 + r_1 q_2) + (l_1 p_2 + p_1 l_2), \\ Q &= 2 p_1 p_2 + \tfrac{1}{2} I_3 (q_1 r_2 + r_1 q_2) - 2 J_4 r_1 r_2 + (l_1 q_2 + q_1 l_2), \\ R &= \tfrac{1}{2} (p_1 q_2 + q_1 p_2) - \tfrac{1}{4} I_2 (q_1 r_2 + r_1 q_2) - I_3 r_1 r_2 + (l_1 r_2 + r_1 l_2), \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} L &= l_1 l_2 + \tfrac{1}{2} I_2 p_1 p_2 + \tfrac{3}{4} I_3 (p_1 q_2 + q_1 p_2) + \tfrac{1}{16} I_4 q_1 q_2 \\ &\quad - J_4 (p_1 r_2 + r_1 p_2) + \tfrac{1}{8} I_2 I_3 (q_1 r_2 + r_1 q_2) \\ &\quad + (\tfrac{3}{4} I_3^2 + \tfrac{1}{2} I_2 J_4) r_1 r_2. \end{aligned} \tag{61}$$

Die kommutative Eigenschaft des Produktes $T_1 T_2$ tritt in dieser Form voll zutage. Die Formeln (60) definieren eine von Parametern l_1 und l_2 abhängige Zusammensetzung von Kreiskurven mit denselben Inversionskreisen. Wir fassen diese Resultate in folgendem Satze zusammen:

Die Kreistransformationen (56), *die mit veränderlichen Parameter l allen Kreiskurven mit denselben Inversionskreisen entsprechen, bilden eine von drei wesentlichen Parametern abhängende kommutative Gruppe.*

32. Setzen wir in (60) $P = Q = R = 0$, so können wir daraus eindeutig die Verhältnisse $p_2 : q_2 : r_2 : l_2$ der zu T_1 inversen Transformation T_1^{-1} bestimmen. Ist insbesondere $p_1 = 1$, $q_1 = r_1 = 0$, $l_1 = l$, so ist die zu (56) inverse Transformation gegeben durch $p_2 = l^2$, $q_2 = -2l$, $r_2 = 1$, $l_2 = l^3 - \frac{1}{2} I_2 l + \frac{1}{3} I_3$ und somit die zugehörige Kreiskurve $l^2 f - 2lh + k = 0$.

Ist $p_1 = p_2 = 1$, $q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = 0$, $l_1 = l_2 = l$, so ist das Quadrat der Transformation (56) gegeben durch

$$P = 2l, \quad Q = 2, \quad R = 0, \quad L = l^2 + \tfrac{1}{2} I_2$$

und also zur Kreiskurve $lf + h = 0$ gehörig.

Die Relation (61) vereinfacht sich bedeutend, wenn wir von der gemischten Invariante J_2 der beiden Kreiskurven (p_1, q_1, r_1) und (p_2, q_2, r_2) Gebrauch machen:

$$L = l_1 l_2 + \tfrac{1}{4} J_2.$$

V. Systeme von Kreiskurven zweiter Ordnung.

33. Die allgemeine Form einer Kreiskurve II. Ordnung f_1, welche dieselben Inversionskreise besitzt wie f, ist:

$$f_1 = pf + qh + rk.$$

Es empfiehlt sich aber, $p = \nu^2 - \mu$, $q = 2\nu$, $r = 1$ zu setzen, wobei die Kreiskurve f_1 durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$f_1 = (\nu^2 f + 2\nu h + k) - \mu f.$$

Für die Kreiskurven f_1 berechnen wir mit Hilfe der Formeln für die spirische Linie die Brennpunktgleichung, die invariant geschrieben, folgendermaßen lautet:

$$(62) \qquad 4\mu c + [\mu^2 - \mu(2\nu^2 - I_2) + (\nu^4 - I_2\nu^2 - 2I_3\nu + J_4)]b = 0.$$

Ist $\mu = 0$, so besitzt die Kreiskurve f_1 dieselben Brennpunkte wie f, die beiden Kreiskurven sind also konfokal.

Man sieht ohne Mühe ein, daß sich zwei Kreiskurven mit denselben Inversionskreisen in allen acht Schnittpunkten unter gleichen Winkeln schneiden müssen. In der Tat findet man auch, wenn man mittels der Formel:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\frac{\partial f_1}{\partial u}}{2\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|}$$

den Winkel φ zwischen den Kurven $f = 0$ und $f_1 = 0$ berechnet, für φ folgenden Ausdruck:

$$(63) \qquad \cos\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - (\nu^4 - I_2\nu^2 - 2I_3\nu + J_4)}}.$$

Die Kreiskurven f_1 mit $\mu = 0$ schneiden also f orthogonal:

Die zur gegebenen Kreiskurve f konfokalen und orthogonalen Kreiskurven besitzen die Form:

$$f_1 = \nu^2 f + 2\nu h + k.$$

34. Eine besondere Kurvenfamilie erhalten wir, wenn wir

$$(64) \qquad \mu^2 = \nu^4 - I_2\nu^2 - 2I_3\nu + J_4$$

verlangen. In diesem Falle verliert der Winkel zwischen f und einer solchen f_1 jeden Sinn. Die Schnittpunkte von f_1 und f liegen dann in jenen Punkten von $f = 0$, in welchen die zugeordneten Tangenten durch einen unendlich fernen Kreispunkt gehen. Da diese Punkte imaginär sind, so wollen wir die nach (64) ausgezeichnete Lage von f_1 zu f folgendermaßen in reeller Form ausdrücken:

Die einander zugeordneten Brennpunkte von f_1 und h_1 liegen zur ursprünglichen Kreiskurve f spiegelsymmetrisch.

Die eben erwähnte Kreiskurve h_1 folgt natürlich aus f_1 wie h aus f.

Um den obigen Satz rechnerisch zu beweisen, bestimmen wir die Gleichung der gemeinsamen Punkte von $f = 0$ und $f_1 = 0$. Man findet, wenn man sich der Kovarianten b und c bedient, folgende Gleichung:

$$(65) \qquad 16c^2 - 8(2\nu^2 - I_2)cb + (8I_3\nu + I_4)b^2 = 0.$$

Nun hat die letzte allgemein komplexe Gleichung in jedem Falle acht Lösungen, denen in der u-Ebene ebenso viele reelle Punkte entsprechen. Jene von diesen

Punkten, welche auf einer der beiden Kreiskurven liegen, sind die reellen Schnittpunkte beider Kurven. Die übrigen Punkte sind aber jene Punkte der Ebene, welchen in bezug auf jede Kreiskurve dieselben spiegelsymmetrischen Punkte entsprechen. Die oben erwähnte Beziehung von f_1 zu f verlangt also, daß die linke Seite von (62) ein linearer Faktor der linken Seite von (65) ist. Setzt man also den Wert von c aus (62) in (65) ein, so findet man als Bedingungsgleichung eben (64).

35. Die zu f konfokalen Kreiskurven $f_1 = v^2 f + 2\,v\,h + k$ sind aber nicht die einzigen Kreiskurven, die f orthogonal schneiden. Wir wollen daher allgemein jene Kreiskurven $g = 0$ bestimmen, für die in allen gemeinsamen Schnittpunkten von $f = 0$ und $g = 0$ noch:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

erfüllt ist. Wendet man nach (9) die Kovariante:

$$4\,g' = f\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial \bar{u}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial \bar{u}}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial \bar{u}}\,g$$

an, die, gleich Null gesetzt, wegen $m + m_1 - 2 = 2$ wiederum eine Kreiskurve II. Ordnung ist, so ist offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung der Orthogonalität von f und g, daß die Kreiskurve $g' = 0$ durch alle Schnittpunkte von f und g geht, daß also identisch:

$$g' = \mu f + \nu g \tag{66}$$

ist. Zur Ausführung der nötigen Rechnungen geben wir der Kreiskurve $f = 0$ die spirische Gestalt. Die Diskussion der aus (66) hergeleiteten linearen Gleichungen für die Koeffizienten der Kreiskurve $g = 0$ ergibt außer dem schon behandelten quadratischen Büschel $f_1 = v^2 f + 2\,v h + k$ noch 6 lineare Büschel von Kreiskurven. Bezeichnet man mit $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ die Gleichungen der vier Inversionskreise, die nach (52) den Wurzeln l_i entsprechen sollen, so sind die Kreiskurven des linearen Büschels:

$$\left[\left(\frac{l_i + l_j}{2}\right)^2 f + 2\,\frac{l_i + l_j}{2}\,h + k\right] + \varrho\,\varphi_i\,\varphi_j = 0 \tag{67}$$

zur Kreiskurve $f = 0$ orthogonal.

Jedes lineare Büschel (67) bestimmt auf beiden zugehörigen Inversionskreisen φ_i und φ_j ein System von acht Punkten mit der besonderen Eigenschaft, daß jede Kreiskurve durch diese Punkte die gegebene Kreiskurve $f = 0$ orthogonal schneidet. Man könnte in Analogie zum gewöhnlichen Kreise das System der acht Punkte ein Mittelpunktsystem der Kreiskurve $f = 0$ bezeichnen. Jede Kreiskurve würde demnach sechs Mittelpunktssysteme besitzen.

Wir erwähnen noch, daß nach der Diskussion der aus (66) hergeleiteten Gleichungen auch jene Kreiskurven des quadratischen Büschels $f_1 = \nu^2 f + 2\nu h + k$, deren Parameter ν der Gleichung:

$$2\nu^3 - I_2\nu - I_3 = 0$$

genügen, irgendwelche besondere Eigenschaften aufzuweisen scheinen.

VI. Geometrische Deutungen der Invarianten einer Kreiskurve zweiter Ordnung.

36. Die geometrische Deutung der Invarianten g_2 und g_3 ist bekannt[19]). Ist $g_3 = 0$ oder $g_2 = 0$, so liegen die vier reellen Brennpunkte harmonisch bzw. äquianharmonisch. Zieht man von beiden unendlich fernen Kreispunkten Tangenten an die Kreiskurve, so sind bekanntlich die Doppelverhältnisse der beiden Tangentenquadrupel einander gleich und letzte daher projektiv. Jede Tangente des einen Büschels schneidet eine jede Tangente des zweiten in einem Brennpunkte. Da die Strahlen zweier projektiver Quadrupel auf vier Arten aufeinander bezogen werden können, so liegen die Brennpunkte zu je vieren auf vier Kreisen. Es ist dies der Inhalt des Hartschen Satzes und wir wollen diese Kreise die Hartschen Kreise der Kreiskurve nennen.

Ist aber $g_3 = 0$, so ist das Doppelverhältnis der beiden Tangentenquadrupel harmonisch und die Tangenten können auf acht verschiedene Weisen projektiv aufeinander bezogen werden. Die Anzahl der Hartschen Kreise ist also acht, ebenso findet man, daß bei $g_2 = 0$ diese Anzahl zwölf sein muß. Also:

Ist $g_3 = 0$ oder $g_2 = 0$, so liegen die Brennpunkte zu je vieren auf acht bzw. zwölf Hartschen Kreisen.

37. Die Bedeutung von $I_3 = 0$ haben wir bereits erwähnt. In diesem Falle reduziert sich die abgeleitete Kreiskurve $h = 0$ auf ein Punktepaar. Ähnliche Bedeutung besitzt das Verschwinden von J_4, für die Kreiskurve $k = 0$, die in diesem Falle in zwei Kreise zerfällt. Dadurch ist aber auch die ursprüngliche Kreiskurve $f = 0$ geometrisch ausgezeichnet.

Im Falle $I_3 = 0$ dürfen wir, da die Determinante (13) verschwindet, setzen:

$$\bar{C} = \lambda A + 2\mu \bar{B}, \qquad \bar{E} = \lambda B + 2\mu D, \qquad F = \lambda C + 2\mu E.$$

und somit:

$$C = \bar{\lambda} A + 2\bar{\mu} B, \qquad E = \bar{\lambda} B + 2\bar{\mu} D,$$
$$F = \lambda\bar{\lambda} A + 2\lambda\bar{\mu} B + 2\bar{\lambda}\mu B + 4\mu\bar{\mu} D.$$

---

[19]) R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I, Leipzig (1916), S. 121 u. 135.

Die Kreiskurve $f = 0$ können wir also in folgender Weise schreiben:

$$A\,(u^2+\lambda)\,(\bar{u}^2+\bar{\lambda}) + 2\,B\,(u^2+\lambda)\,(\bar{u}+\bar{\mu}) + 2\,B\,(u+\mu)\,(\bar{u}^2+\bar{\lambda}) + 4\,D\,(u+\mu)\,(\bar{u}+\bar{\mu}) = 0.$$

Also:

Die Kreiskurve mit verschwindender Invariante I_3 entsteht, wenn man einen geeigneten Kreis der besonderen Transformation:

$$z = u + \frac{1}{u}$$

unterwirft.

38. Die Kreiskurven mit $I_3 = 0$ besitzen eine bereits von Darboux[20]) angegebene Erzeugungsweise. Bezeichnen wir mit u_i, $i = 1, 2, 3, 4$ vier Punkte der u-Ebene, so ist die von Darboux behandelte Kreiskurve:

$$|z-u_i|^2\,|z-u_2|^2 = k\,|z-u_3|^2\,|z-u_4|^2$$

von der erwähnten Art. Eine wesentlich andere Kreiskurve mit $I_3 = 0$ ist definiert durch das Verschwinden folgender Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & |u-u_1|^2 & |u-u_2|^2 \\ |u-u_3|^2 & |u_1-u_3|^2 & |u_2-u_3|^2 \\ |u-u_4|^2 & |u_1-u_4|^2 & |u_2-u_4|^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{68}$$

die den Punkten u_i offenbar invariant zugeordnet ist. Legt man etwa u_3 und u_4 nach 0 und ∞, so kann man leicht bestätigen, daß $I_3 = 0$ ist.

Die Erzeugungsweise einer Kreiskurve (68) ist einfach. Sucht man die Bedingung, unter welcher sich zwei Kreise, die beziehungsweise durch die Punkte u, u_1, u_2 und u, u_3, u_4 gehen, orthogonal schneiden, so muß man verlangen, daß das folgende Matrizenprodukt:

$$\begin{Vmatrix} u\bar{u} & u & \bar{u} & 1 \\ u_1\bar{u}_1 & u_1 & \bar{u}_1 & 1 \\ u_2\bar{u}_2 & u_2 & u_2 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & -\bar{u} & -u & u\bar{u} \\ 1 & -\bar{u}_3 & -u_3 & u_3\bar{u}_3 \\ 1 & -\bar{u}_4 & -u_4 & u_4\bar{u}_4 \end{Vmatrix}$$

gleich Null ist. Das Produkt beider Matrizen ergibt aber gerade die Determinante (68). Also:

Die Schnittpunkte eines beliebigen Kreises durch die Punkte u_1, u_2 mit jenem Kreise durch u_3, u_4, der zu dem ersten orthogonal ist, liegen auf der Kreiskurve (68).

Zu vier gegebenen Punkten u_i existieren noch zwei solche Kreiskurven, die man aus (68) erhält, wenn man 2 mit 3 bzw. 4 vertauscht. Man beweist leicht, daß sich alle drei Kurven in denselben acht Punkten schneiden, unter denen aber vier Punkte u_i vorkommen. Bezeichnen wir die übrigen vier Punkte mit v_i, $i = 1, 2, 3, 4$, so sind auf diese Weise vier beliebigen Punkten u_i

[20]) Darboux, S. 78ff.

vier ganz bestimmte Punkte v_i zugeordnet. Die geometrische Konstruktion der Punkte v_i ist mindestens in einem Falle höchst einfach. Liegen die Punkte u_i derart, daß sie Eckpunkte und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks sind, so sind die Punkte v_i der unendlich ferne Punkt und die drei Höhenfußpunkte (s. Fig. 4). Es folgt daraus der weniger bekannte Satz, demzufolge die Summe der Quadrate einer Seite und des Höhenabschnittes zwischen dem Höhenschnittpunkt und des der Seite entgegengesetzten Eckpunktes für alle drei Seiten des Dreiecks dieselbe ist.

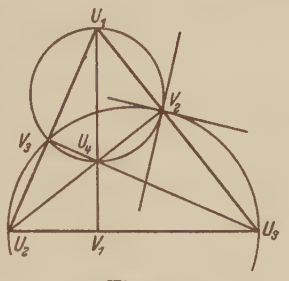


Fig. 4.

Verlangen wir in der Tat, daß die Kreiskurve (68) durch den Punkt $u = \infty$ geht, so bekommen wir, wenn wir (68) mit u^2 dividieren und dann $\frac{1}{u}$ gleich Null setzen, die folgende Beziehung:

$$|u_2 - u_3|^2 + |u_1 - u_4|^2 = |u_1 - u_3|^2 + |u_2 - u_4|^2.$$

Weil $u = \infty$ auch ein Punkt der aus (68) durch Vertauschung von 2 und 3 folgenden Kreiskurve sein soll, so ergibt dieselbe Vertauschung, ausgeführt in der obigen Gleichung, die neue Beziehung:

$$|u_2 - u_3|^2 + |u_1 - u_4|^2 = |u_1 - u_2|^2 + |u_3 - u_4|^2.$$

Die Punkte u_1, u_2, u_3 sind Eckpunkte, u_4 aber der Höhenschnittpunkt eines sonst beliebigen Dreiecks (s. Fig. 4).

39. Bedeutend schwieriger ist die geometrische Deutung der einfachsten Invariante I_2 und damit der der Invarianten I_4 und J_4. Zu diesem Zweck ist es notwendig, ein zur Kreiskurve $f = 0$ besonders gelegenes Punktsystem einzuführen, welches wir kurz das Grundpunktsystem nennen wollen.

Um dies zu erreichen, untersuchen wir zuerst die aus $I_2 = 2D^2 + AF + C\overline{C} - 2(B\overline{E} + \overline{B}E)$ hergeleitete Reduktion der gegebenen Kreiskurve $f = 0$ auf die kanonische Gestalt:

$$f = Au^2\bar{u}^2 + 2Bu^2\bar{u} + 2\bar{B}u\bar{u}_2 + 2Eu + 2\bar{E}\bar{u} + F = 0, \tag{69}$$

wo:

$$C = D = \overline{C} = B\overline{E} + \overline{B}E = 0 \tag{70}$$

sind. In diesem Falle erhalten wir für die Invarianten I_2, I_3, J_4 folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} I_2 &= AF, \\ I_3 &= -(AE\overline{E} + FB\overline{B}), \\ J_4 &= (B\overline{E} - \overline{B}E)^2 = -4B\overline{B}E\overline{E}. \end{aligned} \tag{71}$$

Diese Reduktion ist also nur reell, wenn $J_4 < 0$ ist.

Aus $B\bar{E} + \bar{B}E = 0$, $B\bar{E} - \bar{B}E = \sqrt{J_4}$ folgt sofort:

$$E = \frac{\sqrt{J_4}}{2B}, \qquad \bar{E} = -\frac{\sqrt{J_4}}{2\bar{B}}. \tag{72}$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für I_3 ein und schreiben wir für $\frac{1}{A} B\bar{E} = t$, so muß t folgender Gleichung genügen:

$$4 I_2 t^2 + 4 I_3 t - J_4 = 0. \tag{73}$$

Jeder Wurzel t_j der letzten Gleichung entspricht von Drehungen und Dehnungen abgesehen eine einzige Reduktion der Kreiskurve. In der Tat bekommt man aus (71) und (72):

$$B = \sqrt{A t_j}\, e^{i\vartheta}, \qquad E = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{J_4}{A t_j}}\, e^{i\vartheta}, \qquad F = \frac{1}{A} I_2$$

und man beweist leicht, daß jeder Änderung von A eine Dehnung der u-Ebene entspricht. Den beiden Wurzeln von (73) würden also noch zwei verschiedene Formen (69) entsprechen. Nun bestätigt man leicht, daß die Vertauschung der Wurzeln t_1, t_2 auch durch die lineare Transformation:

$$u' = \frac{1}{u}$$

erreicht werden kann. Also:

Die Reduktion der Kreiskurve auf die Gestalt (69) *ist bis auf solche Transformationen der u-Ebene, die die beiden Punkte* 0 *und* ∞ *ungeändert lassen oder vertauschen, eindeutig bestimmt.*

40. Neben dem Punktepaar 0, ∞ haben für die kanonische Gestalt (69) noch jene Punktpaare dieselbe Bedeutung, die aus 0, ∞ durch Spiegelung an den Inversionskreisen von (69) entstehen. Da die Spiegelung an einem Inversionskreis als Produkt der Spiegelungen an den drei übrigen Inversionskreisen ausdrückbar ist, gibt es im ganzen acht Paare solcher zur gegebenen Kreiskurve ausgezeichnet gelegenen Punkte. Sie bilden das am Anfang von Nummer 39 angesagte Grundpunktsystem der Kreiskurve.

Die Lagebestimmung dieser Punkte ist einfach. Da diese Punkte symmetrisch in bezug auf die Inversionskreise liegen, dürfen wir sie als Schnittpunkte solcher Kreiskurven auffassen, die mit der ursprünglichen dieselben Inversionskreise besitzen. Wir bestimmen daher das Büschel jener Kreiskurven $pf + qh + rk$, die durch die Punkte 0 und ∞ gehen. Zu diesem Zweck berechnen wir uns für den Fall einer Kreiskurve (69) den ersten und den letzten Koeffizienten der Kreiskurven h und k. Wir finden nach (11) und (21):

$$h = -B\bar{B}u^2\bar{u}^2 + \ldots - E\bar{E},$$

$$k = -\begin{vmatrix} A & B & \bar{B} \\ B & 0 & 0 \\ \bar{B} & 0 & 0 \end{vmatrix} u^2\bar{u}^2 + \ldots - \begin{vmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & \bar{E} \\ E & \bar{E} & F \end{vmatrix}.$$

Es folgt daraus ohne weiteres, daß die betrachteten Punkte auf der abgeleiteten Kreiskurve $k = 0$ liegen. Die zweite Kreiskurve nehmen wir dann in der Form $h + \lambda f = 0$ und bestimmen den Parameter λ derart, daß die so ausgewählte Kreiskurve durch die Punkte 0 und ∞ geht. Es soll also:

$$\lambda A - B\bar{B} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda F - E\bar{E} = 0$$

sein. Der Parameter λ genügt der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 AF - \lambda(AE\bar{E} + FB\bar{B}) + B\bar{B}E\bar{E} = 0,$$

die wir mit Hilfe von (71) invariant folgendermaßen schreiben können:

$$4\,I_2\lambda^2 + 4\,I_3\lambda - J_4 = 0.$$

Die gesuchten Kreiskurven sind $h + t_1 f = 0$ und $h + t_2 f = 0$. Also: *Das Grundpunktsystem der Kreiskurve $f = 0$ ist gebildet von den Schnittpunkten der Kreiskurven $k = 0$ mit der zerfallenden Kreiskurve IV. Ordnung:*

$$(h + t_1 f)(h + t_2 f) = 4\,I_2 h^2 - 4\,I_3 hf - J_4 f = 0.$$

Die geometrische Deutung der Invarianten I_2 und J_4 ist jetzt leicht auszusprechen.

Ist $I_2 = 0$, so liegen die Grundpunkte der Kreiskurve $f = 0$ zu je acht auf der ursprünglichen Kreiskurve $f = 0$ und auf der abgeleiteten $16\,I_3 h - I_4 f = 0$, ist dagegen $J_4 = 0$, so liegen sie auf $h = 0$ und $I_3 h - I_2 f = 0$.

VII. Spiegelungen an einer Kreiskurve zweiter Ordnung. Uniformisierung der Invarianten der Kreiskurve.

41. Die Spiegelung an der gegebenen Kreiskurve $f(u, \bar{u}) = 0$ ist definiert durch die folgende Gleichung:

$$(S) \qquad (A\bar{u}^2 + 2\,B\bar{u} + C)\,v^2 + 2\,(\bar{B}\,\bar{u}^2 + 2\,D\,\bar{u} + E)\,v + (\bar{C}\,\bar{u}^2 + 2\,\bar{E}\,\bar{u} + F) = 0.$$

Dem Punkte u entsprechen zwei Punkte v, die jedoch zusammenfallen, wenn u ein Brennpunkt von f ist. Während aber die Spiegelung am Kreis involutorisch ist, besitzt sie bei einer Kreiskurve II. Ordnung im allgemeinen eine unendlich hohe Ordnung. Es ist jedoch notwendig, zu erklären, was man unter einer beliebigen Potenz von S verstehen soll. Bezeichnet man die beiden Punkte, die nach $S\,u$ entsprechen, mit v_1, v_1' (s. Fig. 5), so ordnet die Spiegelung S jedem der Punkte v_1 und v_1' wiederum zwei Punkte zu, von denen aber einer der Ausgangspunkt u ist. Die Spiegelung S ordne also v_1 die Punkte v_2, v_2' und v_1' ähnlich v_2', u zu. Der Übergang von u zu v_2, v_2' ist dann eine Transformation, die mit S^2 bezeichnet werden kann. Ordnet weiter S dem Punkte v_2

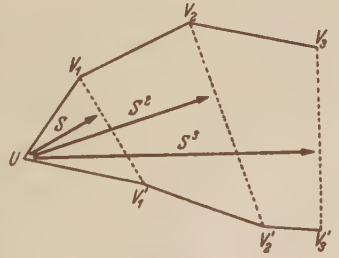


Fig. 5.

die Punkte v_1, v_3 und dem Punkte v_2' ähnlich v_1', v_3' zu, so ist der Übergang von u zu v_3, v_3' die Spiegelung S^3, usw.

In Anlehnung an die Transformationstheorie der Kreise wollen wir die geraden Potenzen S^{2m} Punkttransformationen erster, die ungeraden Potenzen S^{2m-1} als solche zweiter Art bezeichnen.

Ist speziell u ein Brennpunkt von $f = 0$, so ist $v_1' = v_1$, dann aber auch $v_2' = v_2, v_3' = v_3, \ldots$ Die Brennpunkte von $f = 0$ besitzen also die allgemeinere Eigenschaft, daß ihnen auch die Transformation S^n nur einzelne Punkte zuordnet.

42. Die ungerade Potenz S^{2m-1} der Spiegelung S ist als eine Punkttransformation zweiter Art selbst wieder eine Spiegelung, und zwar an einer solchen Kreiskurve II. Ordnung, die dieselben Brennpunkte wie $f = 0$ und also die Form $f_1 = s^2 f + 2\,sth + t^2 k = 0$ besitzt.

Aus der Gleichung (62) folgt für die Brennpunktgleichung b_1 von f_1:

$$b_1 = (s^4 - I_2 s^2 t^2 - 2\,I_3 s t^3 + J_4 t^4)\,b. \tag{74}$$

Die gerade Potenz S^{2m} von S, die eine mehrdeutige Punkttransformation erster Art ist, kann als eine ein-eindeutige Transformation derjenigen Riemannschen Fläche gedeutet werden, deren Windungspunkte die Brennpunkte von $f = 0$ sind. Zur Darstellung der Spiegelungspotenzen gerader Ordnung benötigen wir drei von zwei gleichartigen Variabeln u und w abhängende Kovarianten.

Als einfachste Kovariante nehmen wir $\varphi = 16\,(u - w)^2$. Eine zweite Kovariante bekommen wir aus b durch Polarenbildung. Fügen wir dieser Kovariante noch ein geeignetes Multiplum von $I_2 \varphi$ zu, so erhalten wir:

$$\psi = -8\,(ACu^2w^2 + FC) - 4\,(AF + C^2)(u^2 + w^2) + 32\,D^2\,u\,w. \tag{75}$$

Ähnlich bestimmen wir uns:

$$\chi = 16\,D^2\,(ACu^2w^2 + FC) + (AF - C^2)^2\,(u^2 + w^2) + 2\,[(AF - C^2)^2 - 8\,D^2\,(AF + C^2)]\,uw. \tag{76}$$

Die eingeführten Kovarianten φ, ψ und χ erfüllen die folgende Gleichung:

$$\psi^2 - \varphi\chi = 64\,b\,(u)\,b\,(w). \tag{77}$$

Die der geraden Potenz S^{2m} entsprechende Gleichung zwischen den Variabeln u und w läßt sich in der Form $\varphi_1 = \sigma^2\varphi + 2\,\sigma\tau\psi + \tau^2\chi = 0$ schreiben und es ist in der Tat die Diskriminante β_1 von $\varphi_1 = 0$, wenn diese als Gleichung von w betrachtet wird:

$$\beta_1 = -16\,\tau\,(16\,\sigma^3 - 8\,I_2\sigma^2\tau + I_4\,\sigma\tau^2 - I_3^2\tau^3)b. \tag{78}$$

43. Mit Hilfe des oben Gesagten wollen wir zuerst die Spiegelungen an den Kreiskurven $f = 0$ und $f_1 = s^2 f + 2\,sth + t^2 k = 0$ zusammensetzen. Es ist in der spirischen Gestalt:

$$f(u, \bar{v}) = (Au^2 + C)\,\bar{v}^2 + 4\,Du \cdot \bar{v} + (Cu^2 + F) = 0,$$
$$f(\bar{v}, w) = (A_1 w^2 + C_1)\,\bar{v}^2 + 4\,D_1 w \cdot \bar{v} + (C_1 u^2 + F_1) = 0, \tag{79}$$

wo:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{F_1}{F} = s^2 + 2Dst + (D^2 - C^2)t^2,$$

$$\frac{C_1}{C} = s^2 - 2Dst + (D^2 - AF)t^2,$$

$$D_1 = Ds^2 + \tfrac{1}{2}(AF - C^2)st + \tfrac{1}{2}D(AF + C^2 - 2D^2)t^2$$

ist. Die Resultante der quadratischen Gleichungen (79) schreiben wir in symmetrischer Form:

$$(80)\quad [(A_1w^2 + C_1)(Cu^2 + F) + (C_1w^2 + F_1)(Au^2 + C) - 8DD_1wu]^2 - 4[(Au^2 + C)(Cu^2 + F) - 4D^2u^2] \times [(A_1w^2 + C)(C_1w^2 + F_1) - 4D_1^2w^2] = 0.$$

Die erhaltene Bedingung läßt sich leicht mittels der Kovarianten φ, ψ und χ ausdrücken. In den Faktoren des zweiten Gliedes erkennt man sofort die Brennpunktgleichungen von $f = 0$ und $f_1 = 0$, und man kann daher den Wert dieses Gliedes mit Hilfe von (74) und (77) ohne Rechnung hinschreiben. Der Klammerausdruck beim ersten Gliede ist linear in den Ausdrücken $ACu^2w^2 + FC$, $u^2 + w^2$ und uw und kann leicht in eine lineare Form von φ, ψ und χ umgerechnet werden. Auf solche Weise erhalten wir:

$$[(8I_3st + I_4t^2)\varphi - 8(2s^2 - I_2t^2)\psi + 16t^2\chi]^2 - 256(s^4 - I_2s^2t^2 - 2I_3st^3 + J_4t^4)(\psi^2 - \varphi\chi) = 0$$

oder ausgerechnet:

$$(81)\quad l^2\varphi^2 - 2lm\varphi\psi + 4ln\psi^2 + (m^2 - 2ln)\varphi\chi - 2mn\psi\chi + n^2\chi^2 = 0,$$

wo:

$$(82)\qquad l = 8I_3st + I_4t^2, \quad m = 16s^2 - 8I_2t^2, \quad n = 16t^2$$

bedeutet.

Die Diskriminante der quadratischen Form (81) verschwindet, diese kann also als Produkt zweier linearer Formen geschrieben werden. Noch mehr: die linearen Formen sind von der speziellen Gestalt $\varphi_1 = \sigma^2\varphi + 2\sigma\tau\psi + \tau^2\chi$. In der Tat reduzieren sich die drei Bedingungen, unter welchen (81) durch φ_1 teilbar ist, auf die einzige Gleichung:

$$l\tau^2 + m\tau\sigma + n\sigma^2 = 0$$

oder, wenn man für l, m, n ihre Werte aus (82) einsetzt:

$$(83)\qquad \tau^2(8I_3st + I_4t^2) + 8\tau\sigma(2s^2 - I_2t^2) + 16\sigma^2t^2 = 0.$$

44. Auf dieselbe Weise wollen wir die Spiegelung an der Kreiskurve $f = 0$ mit der Punkttransformation erster Art $\varphi_1 = \sigma^2\varphi + 2\sigma\tau\psi + \tau^2\chi = 0$ zusammensetzen. Wir schreiben wieder:

$$(84)\qquad \begin{aligned} f(\bar{u}, v) &= (A\bar{u}^2 + C)v^2 + 4D\bar{u}\cdot v + (C\bar{u}^2 + F) = 0, \\ \varphi_1(v, w) &= (A_1w^2 + C_1)v^2 + 2D_1w\cdot v + (C_1w^2 + F_1) = 0, \end{aligned}$$

wo:

$$\frac{A_1}{AC} = \frac{F_1}{FC} = 16\,\tau\,(D^2\,\tau - \sigma),$$

(85)
$$C_1 = (AF - C^2)^2\tau^2 - 8\,(AF + C^2)\,\tau\sigma + 16\,\sigma^2,$$
$$D_1 = [(AF - C^2)^2 - 8\,D^2\,(AF + C^2)]\,\tau^2 + 32\,D^2\tau\sigma - 16\,\sigma^2$$

ist. Die Resultante von (84) hat die Form:

$$[(A_1w^2 + F_1)\,(C\bar{u}^2 + F) + (C_1w^2 + F_1)\,(A\bar{u}^2 + C) - 4\,DD_1w\bar{u}]^2$$
$$- 4\,[(A\bar{u}^2 + C)\,(C\bar{u}^2 + F) - 4\,D^2\,\bar{u}^2]$$
$$\times\,[(A_1w^2 + C_1)\,(C_1w^2 + F_1) - D_1^2w^2] = 0.$$

Die letzte Gleichung behandeln wir, wie oben die Gleichung (86) und bekommen:

$$[f\,(I_4\tau^2 - 8\,I_2\tau\sigma + 16\sigma^2) - 8hI_3\tau^2 + 16\,k\sigma\tau]^2$$
$$+ 64\,(h^2 - kf)\,\tau\,(16\,\sigma^3 - 8\,I_2\sigma^2\tau + I_4\sigma\tau^2 - I_3^2\tau^3) = 0.$$

Ausgerechnet erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\lambda = I_4\tau^2 - 8\,I_2\tau\sigma + 16\,\sigma^2, \quad \mu = 8\,I_3\sigma^2, \quad \nu = 16\,\sigma\tau,$$

die quadratische Form:

(86) $$\lambda^2f^2 - 2\,\lambda\mu fh + 4\,\lambda\nu h^2 + (\mu^2 - 2\,\lambda\nu)fk - 2\,\mu\nu hk + \nu^2\,k = 0.$$

Die letzte Gleichung hat dieselben Eigenschaften wie oben (81). Sie ist teilbar durch die lineare Form $f_1 = fs^2 + 2\,hst + kt^2$, wenn:

$$\lambda\,t^2 + \mu st + \nu s^2 = 0$$

oder ausgerechnet:

(87) $$t^2\,(I_4\tau^2 - 8\,I_2\sigma\tau + 16\,\sigma^2) + 8\,stI_3\tau^2 + 16s^2\sigma\tau = 0.$$

Man bestätigt leicht, daß die letzte Gleichung durch Umstellung der Glieder aus (83) entsteht. Wir schreiben sie noch symmetrisch:

(88) $$16\,\sigma\,(\sigma t^2 + \tau s^2) + 8\,\tau t\,(I_3\tau s - I_2\,\sigma\,t) + I_4\tau^2\,t^2 = 0.$$

Die letztgewonnene Gleichung ist für eine Theorie der Spiegelungen an einer Kreiskurve II. Ordnung von großer Bedeutung. Wir wollen sie die *Spiegelungsgleichung* der Kreiskurve nennen.

45. Wir wollen jetzt die oben durchgeführte Untersuchung benutzen, um explizit eine beliebige Potenz S^n von S darzustellen. Zuerst wollen wir noch folgende einheitlichere Bezeichnungsweise einführen.

Die Transformation S^n, wo n eine ungerade Zahl ist, ist eine Spiegelung an der Kreiskurve:

(89) $$f_n = fs_n^2 + 2\,hs_nt_n + kt_n^2 = 0.$$

Die Brennpunktsgleichung von $f_n = 0$ sei b_n, die man nach (74) in der Form $b_n = r_n^2\,b$ schreiben kann, wo:

(90) $$r_n^2 = s_n^4 - I_2\,s_n^2\,t_n^2 - 2\,I_3\,s_n\,t_n^3 + J_4\,t_n^4$$

bedeutet. Die Größen s_n, t_n, r_n nennen wir die Parameter der Spiegelung S^n.

Die Punkttransformation erster Art S^n, wo n eine gerade Zahl ist, sei bestimmt durch die folgende Gleichung:

$$\varphi_n = \varphi s_n^2 + 2\,\psi s_n t_n + \chi t_n^2. \tag{91}$$

Die Diskriminante von $\varphi_n = 0$ sei wiederum b_n, die nach (78) in der Form $b_n = r_n^2 b$ geschrieben werden kann, wo:

$$r_n^2 = 16\,t_n (I_3^2 t_n^3 - I_4 t_n^2 s_n + 8\,I_2 t_n s_n^2 - 16\,s_n^3). \tag{92}$$

Wir schreiben also allgemein für die Bestimmungsstücke der Transformation S^n die Buchstaben s_n, t_n, r_n mit dem Unterschiede, daß für ungerades n die Formeln (89) und (90), für gerades n aber (91) und (92) zu gebrauchen sind.

Ist $n = 2m$ gerade, so genügen die beiden Parameter s_{2m}, t_{2m} der Gleichung (83), die jetzt lautet:

$$\begin{aligned} 16\,t_{2m-1}^2 s_{2m}^2 + 8\,(2\,s_{2m-1}^2 - I_2 t_{2m-1}^2)\,s_{2m} t_{2m} \\ + (8\,I_3 s_{2m-1} t_{2m-1} + I_4 t_{2m-1}^2)\,t_{2m}^2 = 0. \end{aligned} \tag{93}$$

Für ungerades $n = 2m + 1$ bestimmen wir s_{2m+1}, t_{2m+1} aus der Gleichung (87), die jetzt lautet:

$$\begin{aligned} 16\,s_{2m} t_{2m} s_{2m+1}^2 + 8\,I_3 t_{2m}^2 s_{2m+1} t_{2m+1} \\ + (16\,s_{2m}^2 - 8\,I_2 s_{2m} t_{2m} + I_4 t_{2m}^2)\,t_{2m+1}^2 = 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Wir bemerken noch, daß die Gleichungen (93) und (94) außer der Lösung s_{2m}, t_{2m} bzw. s_{2m+1}, t_{2m+1}, noch die Lösung s_{2m-2}, t_{2m-2} bzw. s_{2m-1}, t_{2m-1} besitzen. Wir geben daher zum späteren Gebrauch noch folgende Beziehungen an:

$$\begin{aligned} \frac{s_{2m-2}}{t_{2m-2}} + \frac{s_{2m}}{t_{2m}} &= \frac{I_2 t_{2m-1}^2 - 2\,s_{2m-1}^2}{2\,t_{2m-1}^3}, \\ \frac{s_{2m-2}}{t_{2m-2}} \cdot \frac{s_{2m}}{t_{2m}} &= \frac{8\,I_3 s_{2m-1} + I_4 t_{2m-1}}{16\,t_{2m-1}}. \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{2m-1}}{t_{2m-1}} + \frac{s_{2m+1}}{t_{2m+1}} &= -\frac{I_3 t_{2m}}{2\,s_{2m}}, \\ \frac{s_{2m-1}}{t_{2m-1}} \cdot \frac{s_{2m+1}}{t_{2m+1}} &= \frac{16 s_{2m}^2 - 8\,I_2 s_{2m} t_{2m} + I_4 t_{2m}^2}{16\,s_{2m} t_{2m}}. \end{aligned} \tag{96}$$

46. Die Parameter der ersten Potenz von S sind offenbar:

$$s_1 = 1, \quad t_1 = 0, \quad r_1 = 1.$$

Für s_2, t_2 der Transformation S^2 folgt aus (93) $s_2 t_2 = 0$. Nun entspricht $t_2 = 0$ die identische Transformation $w = u$, so daß nur $s_2 = 0$ in Betracht kommt. Die Parameter von S^2 sind also:

$$s_2 = 0, \quad t_2 = 1, \quad r_2 = 4\,I_3. \tag{97}$$

Für die Spiegelung S^3 bestimmen wir s_3, t_3 aus (94) und bekommen:

$$8 I_3 s_3 + I_4 t_3 = 0.$$

Die Parameter von S^3 wählen wir folgendermaßen:

(98) $$s_3 = -\tfrac{1}{16} I_4, \qquad t_3 = \tfrac{1}{2} I_3, \qquad r_3 = \tfrac{1}{32}(4 I_2 I_3^2 - \tfrac{1}{8} I_4^2).$$

Wir geben noch die Parameter s_4, t_4, r_4 für S^4 und s_5, t_5 für S^5:

(99) $$s_4 = \tfrac{1}{32}(4 I_2 I_3^2 - \tfrac{1}{8} I_4^2), \quad t_4 = \tfrac{1}{4} I_3^2,$$
$$r_4 = \tfrac{1}{64} I_3 (4 I_2 I_3^2 I_4 - 16 I_3^4 - \tfrac{1}{8} I_4^3),$$

(100) $$s_5 = \tfrac{1}{512}(4 I_2 I_3^2 I_4 - 32 I_3^4 - \tfrac{1}{8} I_4^3), \qquad t_5 = \tfrac{1}{64} I_3 (4 I_2 I_3^2 - \tfrac{1}{8} I_4^2)$$

47. Aus den obigen Formeln erraten wir, daß sich die Parameter s und t auf folgende Weise mit Hilfe einer einzigen Größe q, die einfach mit r zusammenhängt, ausdrücken läßt:

(101) $$s_{2n} = q_{n+1} q_{n-1}, \quad t_{2n} = q_n^2,$$
$$8 I_3 s_{2n+1} = 16 q_{n+2} q_{n-1} - I_4 q_{n+1} q_n, \quad t_{2n+1} = q_{n+1} q_n$$

In Übereinstimmung mit oben ist also:

(102) $$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = \tfrac{1}{2} I_3, \quad q_3 = \tfrac{1}{32}(4 I_2 I_3^2 - \tfrac{1}{8} I_4^2),$$
$$q_4 = \tfrac{1}{512} I_3 (4 I_2 I_3^2 I_4 - 16 I_3^4 - \tfrac{1}{8} I_4^3)$$

Die rekurrenten Gleichungen für q_n finden wir, wenn wir (101) in die vier Gleichungen (95) und (96) setzen. Diese reduzieren sich dann auf folgende zwei

(103) $$16 (q_{n+2} q_{n-1}^2 + q_{n+1}^2 q_{n-2}) = 2 I_4 q_{n+1} q_n q_{n-1} - 4 I_3^2 q_n^3$$

und

(104) $$256 q_{n+2} q_{n-2} = 64 I_3^2 q_{n+1} q_{n-1} - 8 (4 I_2 I_3^2 - \tfrac{1}{8} I_4^2) q_n^2.$$

Die letzte Gleichung schreiben wir mit Hilfe von q_1, q_2 und q_3 noch einfacher:

(105) $$q_{n+2} q_{n-2} = q_2^2 q_{n+1} q_{n-1} - q_3 q_1 q_n^2.$$

Man beweist noch leicht, daß sie ihrerseits eine Folge von (163) ist. In der Tat, erniedrigen wir n in (103) um eine Einheit und eliminieren wir aus der gewonnenen Gleichung und (103) das Glied mit I_4, so erkennen wir, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{q_n^2} [q_{n+2} q_{n-2} - q_2^2 q_{n+1} q_{n-1}]$$

von n unabhängig ist. Der letzte Ausdruck ist aber für $n = 2$ gleich $-q_3 q_1$.

Die Gleichung (105) ist ein Spezialfall der allgemeineren:

(106) $$q_{n+i} q_{n-i} = q_i^2 q_{n+1} q_{n-1} - q_{i+1} q_{i-1} q_n^2.$$

Neue Spezialfälle der letzten Beziehung bekommen wir, wenn wir $i = n - 2$ und $i = n - 1$ nehmen. Wir finden:

(107) $$q_2 q_{2n-2} = q_{n-1} (q_{n+1} q_{n-2}^2 - q_n^2 q_{n-3})$$

und

$$q_1 q_{2n-1} = q_{n+1} q_{n-1}^3 - q_n^3 q_{n-2}. \tag{108}$$

Die beiden letzten Formeln wenden wir an, um zu beweisen, daß die aus (90) und (92) folgenden Werte für r_n^2 in der Tat vollkommene Quadrate sind. Man findet, wenn man in die erwähnten Ausdrücke Werte für s und t einsetzt und sie dann mit Hilfe von (107) und (108) geeignet umgestaltet, folgende Beziehungen zwischen r_n und q_n:

$$r_{2n} = 8 q_{2n}, \quad r_{2n+1} = q_{2n+1}. \tag{109}$$

48. Um die Parameter q für beliebiges n darzustellen, führen wir jetzt die Uniformisierung der Invarianten der Kreiskurve durch. Eliminieren wir aus:

$$12 g_2 = 4 I_2^2 - 3 I_4,$$
$$216 g_3 = 9 I_2 I_4 - 8 I_2^3 - 54 I_3^2$$

die Invariante I_4, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{I_3}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{I_2}{6}\right)^3 - g_2 \frac{I_2}{6} - g_3.$$

Benutzen wir also die Weierstraßsche Funktion $\wp(z, g_2, g_3)$, so dürfen wir nach der letzten Gleichung:

$$I_2 = 6 \wp, \quad I_3 = -2 \wp' \tag{110}$$

gleichsetzen. Es folgt aus dem weiter unten Entwickelten, daß für I_3 das negative Zeichen zu nehmen ist. Setzen wir $I_2 = 6 \wp$ in den Ausdruck für g_2 ein, so folgt für I_4:

$$I_4 = 8 \wp''. \tag{111}$$

Wir gewinnen so den folgenden fundamentalen Satz:

Die Invarianten I_2, I_3, I_4 der Kreiskurve II. Ordnung stimmen, von numerischen Faktoren abgesehen, mit der nullten, ersten und zweiten Ableitung der Weierstraßschen Funktion $\wp(z, g_2, g_3)$ überein.

Wir nennen die Größe z, die unendlich vieldeutig gegebenen Werte von I_2, I_3, I_4 entspricht, *die transzendente Invariante* der Kreiskurve.

49. Der Parameter q_n kann nun mit Hilfe der erfolgten Uniformisierung leicht ausgedrückt werden. Aus der Multiplikationstheorie der elliptischen Funktionen[21]) ist bekannt, daß die Funktionen:

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = \frac{\sigma(nz)}{[\sigma(z)]^{n^2}}$$

[21]) R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. II. (1922), S. 184.

den Relationen (106) genügen. Nun sind die Werte der ersten vier dieser Funktionen:

$$\psi^{(1)} = 1, \quad \psi^{(2)} = -\wp', \quad \psi^{(3)} = 3\wp^4 - \tfrac{3}{2} g_2 \wp^2 - 3 g_3 \wp - \tfrac{1}{16} g_2^2,$$
$$\psi^{(4)} = -\wp' [2\wp^6 - \tfrac{5}{2} g_2 \wp^4 - 10 g_3 \wp^3 - \tfrac{5}{8} g_2^2 \wp^2 - \tfrac{1}{2} g_2 g_3 \wp + \tfrac{1}{32} g_2^3 - g_3^2].$$

Setzt man in diese Ausdrücke die Werte für $\wp$, $\wp'$ aus (110) ein, so erhalten wir eben die Ausdrücke für q_1, q_2, q_3 und q_4. Da die Parameter q_n einerseits, die Funktionen $\psi^{(n)}$ aber andererseits nach denselben Rekursionsgleichungen aus den ersten vier folgen, so folgt offenbar:

$$q_n = \frac{\sigma(nz)}{[\sigma(z)]^{n^2}}. \tag{112}$$

Die Multiplikationssätze der speziellen elliptischen Funktion $\wp(z)$ bekommen so eine neue geometrische Deutung. Der Zusammenhang der Spiegelungstheorie mit diesen Sätzen findet seine Erklärung in den Beziehungen, welche zwischen den Spiegelungen und den Schließungspolygonen bestehen. Der Zusammenhang der Multiplikationssätze der $\wp$-Funktion mit dem Schließungsproblem der Kegelschnitte ist aber schon lange bekannt[22]).

VIII. Schließungspolygone der Kreiskurven zweiter Ordnung.

50. Die Spiegelungstheorie des vorigen Abschnittes benutzen wir nun zu einer abschließenden Untersuchung der einer Kreiskurve II. Ordnung eingeschriebenen Polygone. Die Ponceletschen Polygone der Kegelschnitte wurden von J. Steiner[23]) sinngemäß auf Kurven IV. Ordnung mit zwei Doppelpunkten übertragen. Von ihm stammt der Satz, daß Kurven, für welche ein solches eingeschriebenes Polygon existiert, dann deren unendlich viele besitzen.

Die Entstehungsweise dieser Polygone ist für eine Kreiskurve II. Ordnung die folgende: Aus dem Punkte L_1 der Kreiskurve führen wir zwei Geraden durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte M_0, N_0. Diese Geraden haben mit der Kurve schon je drei Punkte gemeinsam, so daß jede die Kurve nur noch in einem vierten Punkte schneidet: die Gerade $M_0 L_1$ in M_1 und $N_0 L_1$ in N_1. Die Geraden $N_0 M_1$ und $M_0 N_1$ schneiden aus demselben Grunde die Kurve bzw. nur noch in den Punkten M_2 und N_2, die Geraden $M_0 M_2$ und $N_0 N_2$ in M_3 und N_3. Allgemein schneiden die Geraden $N_0 M_{2m-1}$ und

---

[22]) Vgl. Fr. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. § 26, 27. Enzycl. d. math. Wiss. III., 2., 1., S. 46f; W. F. Meyer, Das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen. Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 108.

[23]) J. Steiner, Ges. Werke II., S. 373.

$M_0 N_{2m-1}$ die Kurve in den Punkten M_{2m} bzw. N_{2m} und ebenso $M_0 M_{2m}$ und $N_0 N_{2m}$ in M_{2m+1} bzw. N_{2m+1} (s. Fig. 6). Beim Problem der Schließungspolygone fragt man nun nach der Existenz einer ganzen Zahl n, für welche die beiden Punkte M_n und N_n zusammenfallen, so daß der Polygonzug mit den Eckpunkten:

$$M_n, M_{n-1}, \ldots,$$
$$M_1, L_1, N_1, \ldots, N_{n-1}, N_n$$

geschlossen ist.

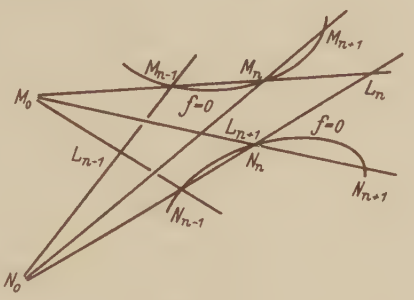


Fig. 6.

Die Seiten und die Eckpunkte eines solchen Polygons sind komplex, nur der dem Punkte L_1 gegenüberliegende Eckpunkt $M_n = N_n$ ist wieder ein reeller Punkt der Kurve.

Die Zuordnung der Punkte M_n und N_n zum gegebenen Anfangspunkte L_1 ist invarianter Natur. In der Tat können wir z. B. die Nachbareckpunkte M_{i-1}, M_{i+1} von M_i auch dadurch berechnen, daß wir die Schnittpunkte der Kurve und des Kreises mit dem Mittelpunkte M_i und dem Radius Null bestimmen.

51. Um ein Hilfsmittel zur Konstruktion der aus L_1 folgenden Punkte M_n und N_n zu gewinnen, bestimmen wir uns zu den zwei reellen Punkten A und D zwei solche Punkte B und C der u-Ebene, daß die Seiten des Vierecks $ABCD$ abwechselnd durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte M_0 und N_0 gehen. Um die Koordinaten dieser Punkte einfach zu bezeichnen, setzen wir fest, daß in der Schreibweise $P(t, w)$ die beiden komplexen Werte t, w in folgender Weise mit den kartesischen Koordinaten ξ, η des Punktes P zusammenhängen:

$$\xi + i\eta = t, \quad \xi - i\eta = w.$$

Der Punkt P ist also ein reeller Punkt der u-Ebene, wenn $w = \bar{t}$ ist.

Die Koordinaten der Punkte A und D seien also $u, \bar{u}$ und $v, \bar{v}$ und es sei der Punkt B der Schnittpunkt der Geraden AM_0 und DN_0. Die Geraden AM_0 und DN_0 sollen endlich durch die folgenden Gleichungen gegeben sein:

$$\xi + i\eta = u, \quad \xi - i\eta = \bar{v}.$$

Daraus folgt aber sofort, daß die Koordinaten des Punktes B die Werte $u, \bar{v}$ besitzen. Ebenso erhalten wir für den Punkt C, welcher der Schnittpunkt der Geraden AN_0 und DM_0 sein soll, die Koordinaten $v, \bar{u}$. Wir merken uns die Zusammensetzung der Koordinaten der einzelnen Punkte des Vierecks $ABCD$ aus der folgenden Übersicht:

(113) $$A(u, \bar{u}), \quad B(u, \bar{v}), \quad C(v, \bar{u}), \quad D(v, \bar{v}).$$

52. Das Viereck $ABCD$ wenden wir zuerst zur Behandlung der der Kreiskurve II. Ordnung eingeschriebenen Vierecke an. Wir setzen $A = L_1$, $B = M_1$, $C = N_1$ und $D = L_2$. Schreiben wir an, daß die Punkte L_1, M_1, N_1 auf der Kreiskurve $f = 0$ liegen, so bekommen wir folgende drei Gleichungen:

$$f(u, \bar{u}) = 0, \quad f(u, \bar{v}) = 0, \quad f(v, \bar{u}) = 0. \tag{114}$$

Um das gestellte Problem möglichst einfach zu lösen, bestimmen wir den geometrischen Ort der Punkte L_2, wenn der Punkt L_1 die gegebene Kreiskurve beschreibt. Eliminieren wir also aus den Gleichungen (114) u, $\bar{u}$, so definiert die erhaltene Gleichung in den Veränderlichen v, $\bar{v}$ die aus der gegebenen Kreiskurve mittels der Transformation $L_1 \to L_2$ entstandene Kurve. Nun ergibt die Eliminierung von $\bar{u}$ aus der ersten und dritten Gleichung von (114) die Gleichung der im vorigen Abschnitt mit S^2 bezeichneten Punkttransformation erster Art: $\chi(u, v) = 0$. Eliminieren wir endlich noch u aus der zweiten Gleichung von (114) und $\chi(u, v) = 0$, so bekommen wir wie im vorigen Abschnitt die zur Potenz S^3 gehörige Kreiskurve II. Ordnung:

$$I_4^2 f - 16 I_4 I_3 h + 64 I_3^2 k = 0. \tag{115}$$

Bewegt sich also der Punkt L_1 auf der Kreiskurve $f = 0$, so beschreibt der Punkt L_2 die Kreiskurve (115). Also:

Die Kreiskurve $f = 0$ besitzt einen und folglich unendlich viele der Kurve eingeschriebene Vierecke, wenn ihre Invariante I_3, verschwindet und umgekehrt.

Auch die durch die Transformation $L_1 \to L_2$ definierte Zuordnung der Punkte der beiden Kreiskurven $f = 0$ und (115) steht im einfachen Zusammenhange zu der Spiegelungstheorie der Kreiskurve II. Ordnung. Jedem Punkte der u-Ebene entsprechen infolge der Spiegelung $f(\bar{u}, v) = 0$ zwei Punkte v_1, v_2. Nun bestätigt man leicht, daß für die Punkte u der gegebenen Kreiskurve $f = 0$ etwa $v_1 = u$ wird, während der zweite Punkt v_2 eben jener Punkt der Kreiskurve (115) ist, der dem Punkte u infolge der Transformation $L_1 \to L_2$ entspricht.

53. Nun wollen wir noch den allgemeinen Fall erledigen und die Bedingung aufstellen, welcher eine gegebene Kreiskurve genügen muß, damit sie unendlich viele eingeschriebene $2n$-Ecke besitzt.

Zu diesem Zwecke definieren wir die Folge von Punkten:

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$$

durch die folgende Festsetzung: Der Punkt L_n sei der jeweils reelle Schnittpunkt der Geraden $M_{n-1}M_n$ und $N_{n-1}N_n$ (s. Fig. 6).

Wir lösen wieder am einfachsten das gestellte Problem, wenn wir die Kurve bestimmen, auf welche die Punkte L_n zu liegen kommen, wenn der Anfangspunkt L_1 die gegebene Kreiskurve $f = 0$ beschreibt. Nun zeigten wir in der vorigen Nummer für $n = 2$, daß die gesuchte Kurve die nach der

Spiegelungstheorie aus (89) folgende Kreiskurve $f_3 = 0$ ist. Es ist also zu erwarten, daß die Kurve der Punkte L_n die aus (89) folgende Kreiskurve $f_{2n-1} = 0$ ist.

Wir beweisen dies allgemein, wenn wir den Schluß von n auf $n+1$ anwenden. Wir setzen also voraus, daß die Trägerkurve der Punkte L_n die Kreiskurve $f_{2n-1} = 0$ ist und bestimmen den Ort der Punkte L_{n+1}. Bezeichnen wir allgemein die Koordinaten der Punkte L_n mit u_n, $\bar{u}_n$, so gibt die Anwendung des Vierecks $ABCD$ der Nummer 52 für die Eckpunkte des Vierecks $L_n M_n N_n L_{n+1}$, folgende Koordinaten:

$$L_n(u_n, \bar{u}_n), \quad M_n(u_n, \bar{u}_{n+1}), \quad N_n(u_{n+1}, \bar{u}_n), \quad L_{n+1}(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}).$$

Diese Koordinaten genügen, da der Punkt L_n auf der Kreiskurve $f_{2n-1} = 0$, die Punkte M_n und N_n aber auf der Kreiskurve $f = 0$ liegen, den folgenden Bedingungsgleichungen:

$$f_{2n-1}(u_n, \bar{u}_n) = 0, \quad f(u_n, \bar{u}_{n+1}) = 0, \quad f(u_{n+1}, \bar{u}_n) = 0. \tag{116}$$

Ähnlich wie oben ergibt die Eliminierung von $\bar{u}_n$ aus der ersten und dritten Gleichung von (116) die aus (91) folgende Gleichung $\varphi_{2n}(u_n, u_{n+1}) = 0$, während aus der Elimination von u_n aus $f(u_n, \bar{u}_{n+1}) = 0$ und $\varphi_{2n}(u_n, u_{n+1}) = 0$ die erwartete Gleichung $f_{2n+1}(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}) = 0$ folgt. Also:

Die Kreiskurve $f = 0$ besitzt einen und folglich unendlich viele eingeschriebene $2n$-Ecke, wenn ihre Invariante q_n aus (112) *verschwindet und umgekehrt.*

Die Kreiskurve $f = 0$ besitzt z. B. eingeschriebene Sechsecke oder Achtecke, wenn die Invarianten von $f = 0$ bzw. folgenden Gleichungen genügen:

$$I_4^3 - 32 I_2 I_3^3 = 0,$$
$$I_3 (I_4^3 + 128 I_3^4 - 32 I_2 I_3^2 I_4) = 0.$$

(Eingegangen am 13. Juni 1937.)

Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung.

Von

Franz Rellich in Marburg a. d. Lahn.

Die Frage, inwieweit eine Fläche bestimmt ist durch die Forderung, ihre Krümmung[1]) soll gleich einer vorgegebenen Konstanten a sein, läßt sich in wohlbekannter Weise durch Zurückführung auf ein Cauchysches Anfangswertproblem beantworten. Jede Fläche mit derselben Krümmung a genügt nämlich, wenn man ihre Gleichung von der Form $z = z(x, y)$ annimmt, der Gleichung $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 - a(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 = 0$. Die Charakteristiken dieser Gleichung sind die Asymptotenlinien, d. h. die Linien, deren Schmiegebenen zugleich Tangentialebenen sind. Nach einem Satz aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt daher der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz: Durch jeden Streifen, der kein Schmiegstreifen ist, d. h. dessen Flächenelement nirgends Schmiegebene ist, geht eine und nur eine Fläche mit der Krümmung a[2]).

Diese für den Fall konstanter Krümmung wohlbekannten Tatsachen werden hier in bestimmter Weise auch im Falle beliebiger (von Null verschiedener) Krümmung erhalten, und zwar wird für diesen allgemeinen Fall folgende Formulierung gewonnen. *Eindeutigkeitssatz*: Zwei Flächen negativer Krümmung mögen einen Streifen gemeinsam haben, der kein Schmiegstreifen ist; zieht man von zwei Punkten des Streifens aus auf beiden Flächen nach derselben Seite[3]) die beiden sich schneidenden Asymptotenlinien, so mögen die Flächen in den beiden so gewonnenen Schnittpunkten dieselbe Krümmung haben. Dann fallen die beiden Flächen zusammen. — *Existenzsatz*: Durch jeden Streifen, der kein Schmiegstreifen ist, geht eine (und nur eine) Fläche, deren Krümmung in folgendem Sinne willkürlich vorgeschrieben ist: in einer u, v-Ebene ist will-

[1]) Unter „Krümmung" schlechthin soll hier stets die Gaußsche Krümmung, das Produkt der beiden Hauptkrümmungen, verstanden werden.

[2]) Ausführliche Darstellung bei L. Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale (1927), Vol. I, Cap. XV, § 240 usw.

[3]) Ist für den Streifen $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}(s)$ die Trägerkurve, $\mathfrak{n}(s)$ der Normalenvektor, s die Bogenlänge, dann kann man auf dem Streifen eine rechte und linke Seite dadurch unterscheiden, daß man verlangt, der Vektor, welcher senkrecht auf $\mathfrak{g}'(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$ von links nach rechts weist, soll zusammen mit $\mathfrak{g}'(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$ eine positive Raumorientierung ergeben.

kürlich eine negative Funktion $K(u, v)$ gegeben und es ist die Kurve des Streifens so auf die Gerade $u = v = s$ abgebildet, daß dem Punkt $u = v = s$ der Punkt mit der Bogenlänge s auf dem Streifen entspricht; zwei Asymptotenlinien, die von den Punkten P und Q des Streifens ausgehen und sich auf der rechten (bzw. linken) Seite der Fläche schneiden, werden die beiden achsenparallelen Geraden der u, v-Ebene zugeordnet, die von den P, Q entsprechenden Punkten auf der Geraden $u = v$ ausgehen und sich im Gebiet $u > v$ (bzw. $u < v$) schneiden; dann soll die Krümmung der Fläche in dem Schnittpunkt zweier Asymptotenlinien denjenigen Wert haben, den die Funktion $K(u, v)$ in dem Schnittpunkt der diesen Asymptotenlinien entsprechenden achsenparallelen Geraden in der u, v-Ebene hat. — In der hier dargelegten Auffassung erscheint die Gleichung: „Krümmung einer Fläche = vorgegebene Funktion $K(u, v)$" als eine *natürliche Gleichung* der Fläche, durch die die Fläche bis auf einen Anfangsstreifen eindeutig bestimmt ist.

Im Falle positiver Krümmung (§ 3) treten, wenn man das Reelle nicht verlassen will, an Stelle der Asymptotenlinienparameter isotherm-konjugierte Parameter ($L = N$, $M = 0$) und es muß verlangt werden, daß die vorgegebenen Funktionen regulär analytisch sind. Hier ergibt sich auch ein Satz über den analytischen Charakter einer Fläche, deren positive Krümmung als Funktion von isotherm-konjugierten Parametern regulär analytisch ist.

In § 4 wird gezeigt, wie man eine Fläche mit vorgegebener negativen Krümmung so in zwei vorgegebene, sich schneidende Kurven einspannen kann, daß diese beiden Kurven Asymptotenlinien werden. Dabei sind die beiden Kurven gewissen Beschränkungen unterworfen, deren wichtigste durch den Satz von Beltrami-Enneper über die Windung einer Asymptotenlinie gegeben ist.

Die durchgehende Auszeichnung der Asymptotenlinien bei der Behandlung der gestellten Frage beruht auf der Tatsache, daß sie die charakteristischen Linien des zugrunde liegenden Differentialgleichungsproblems sind. Behandelt man die Frage, welche entsteht, wenn man an Stelle der Gaußschen Krümmung die mittlere Krümmung setzt, so treten an Stelle der Asymptotenlinien (bzw. der isotherm-konjugierten Parameter) die isotropen Linien (bzw. die isothermen Parameter). Das wird in § 5 kurz skizziert.

§ 1.

Transformation auf Asymptotenlinien-Parameter.

Satz 1. *Für jede dreimal stetig nach u, v differenzierbare Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, deren Krümmung $K(u, v)$ negativ ist und für die $u =$ konst. und $v =$ konst. Asymptotenlinien sind, gilt*

$$\mathfrak{x}_{uv} = \sqrt{-K}\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) - \frac{K_v}{4K}\mathfrak{x}_u - \frac{K_u}{4K}\mathfrak{x}_v; \tag{1}$$

dabei ist das Vorzeichen von $\sqrt{-K}$ *gleich dem Vorzeichen der Determinante* $(\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$ *zu wählen*[3a]).

Zum Beweis seien mit E, F, G bzw. L, M, N die Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Fundamentalform bezeichnet. In den Gaußschen Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{x}_{uv} = \frac{M}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) + \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \mathfrak{x}_u + \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} \mathfrak{x}_v \tag{2}$$

wird dann wegen $L = N = 0$ offenbar $\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{-K}$. Während aus den Gauß-Codazzischen Gleichungen

$$\begin{cases} -2(EG-F^2) M_u + M(2FE_v - 2FF_u - EG_u + E_u G) + A = 0, \\ 2(EG-F^2) M_v + M(2FF_v - 2FG_u - EG_v + GE_v) + B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

mit

$$\begin{cases} A = 2(EG-F^2) L_v + L(FG_u - GE_v) + N(2EF_u - EE_v - FE_u), \\ B = -2(EG-F^2) N_u + N(EG_u - FE_v) + L(GG_u + FG_v - 2GF_v) \end{cases} \tag{3}$$

wegen $L = N = 0$ und $M^2 = -K(EG-F^2)$ leicht

$$\frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} = -\frac{K_v}{4K}, \quad \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)} = -\frac{K_u}{4K}$$[4])

folgt. Dies in (2) berücksichtigt liefert die Behauptung. Später wird folgende Umkehrung benötigt:

Satz 2. *In einer Umgebung von* $u = v = 0$ *sei* $k(u, v)$ *stetig differenzierbar und negativ gegeben; der Flächenvektor* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, *dreimal stetig differenzierbar mit* $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, *genüge dort den Gleichungen*

$$\mathfrak{x}_{uv} = \sqrt{-k}\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) - \frac{k_v}{4k} \mathfrak{x}_u - \frac{k_u}{4k} \mathfrak{x}_v; \tag{4}$$

längs der Geraden $u = v$ *sei* $L = N = 0$. *Dann ist* $L = N = 0$ *in einer ganzen Umgebung von* $u = v = 0$, *die Linien* $u =$ konst. *und* $v =$ konst. *sind Asymptotenlinien der Fläche und* $k(u, v)$ *ist die Krümmung der Fläche.*

[3a]) Falls die Linien $u =$ konst., $v =$ konst. nicht geradlinig sind, kann man die geometrische Bedeutung des Vorzeichens von $\sqrt{-K}$ in (1) einsehen mit Hilfe des Satzes von Beltrami-Enneper über die Windung von Asymptotenlinien, der aus (1) so folgt: Wegen $\mathfrak{x}_{uu}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = 0$ ist $\mathfrak{x}_v = \lambda \mathfrak{x}_{uu} + \mu \mathfrak{x}_u$, weil $\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_u$ linear unabhängig sein müssen ($v =$ konst. nicht geradlinig!). Also $\mathfrak{x}_{uv} = \lambda \mathfrak{x}_{uuu} + \mu \mathfrak{x}_{uu} + \lambda_u \mathfrak{x}_{uu} + \mu_u \mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \lambda(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu})$, $\mathfrak{x}_{uv}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = \lambda^2 \mathfrak{x}_{uuu}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu})$. Nach (1) daher $\lambda^2(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uuu}) = \sqrt{-K}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 = \sqrt{-K}\,\lambda^2(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2$. Wegen $\lambda \neq 0$ daraus $\frac{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uuu})}{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu})^2} = \sqrt{-K}$. Entsprechend $\frac{(\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_{vvv})}{(\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv})^2} = -\sqrt{-K}$. Also: In (1) ist das Vorzeichen von $\sqrt{-K}$ gleich dem Vorzeichen der Windung der Linien $v =$ konst. und entgegengesetzt gleich dem Vorzeichen der Windung der Linien $u =$ konst.

[4]) Vgl. L. Bianchi, l. c., insbesondere S. 240.

Zum Beweis multipliziere man (4) mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ und erhält

$$(\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) = \sqrt{-k}\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 \text{ oder } M^2 = -k\,(EG - F^2).$$

Daraus

$$2MM_u = -k_u\,(EG - F^2) - k\,(E_uG + EG_u - 2FF_u),$$
$$2MM_v = -k_v\,(EG - F^2) - k\,(E_vG + EG_v - 2FF_v),$$

so daß aus (4) folgt (beachte $M \neq 0$ wegen $M^2 = -k\,(EG - F^2)$)

$$\mathfrak{x}_{uv} = \frac{M}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) + \mathfrak{x}_u\left(-\frac{M_v}{2M} + \frac{E_vG + EG_v - 2FF_v}{4\,(EG - F^2)}\right)$$
$$+ \mathfrak{x}_v\left(-\frac{M_u}{2M} + \frac{E_uG + EG_u - 2FF_u}{4\,(EG - F^2)}\right).$$

Die Gleichungen von Gauß und Codazzi (3) liefern dann

$$\mathfrak{x}_{uv} = \frac{M}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) + \mathfrak{x}_v\left(\frac{EG_u - FE_v}{2\,(EG - F^2)} - \frac{A}{4M\,(EG - F^2)}\right)$$
$$+ \mathfrak{x}_u\left(\frac{GE_v - FG_u}{2\,(EG - F^2)} + \frac{B}{4M\,(EG - F^2)}\right).$$

Wegen (2) folgt $\mathfrak{x}_u B - \mathfrak{x}_v A = 0$, also $A = B = 0$ oder

$$(5)\quad \begin{cases} 2\,(EG - F^2)\,L_v + L\,(FG_u - GE_v) + N\,(2EF_u - EE_v - FE_u) = 0, \\ -2\,(EG - F^2)\,N_u + N\,(EG_u - FE_v) + L\,(GG_u + FG_u - 2GF_v) = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen fasse man als lineare, homogene Differentialgleichungen für die beiden Funktionen L und N auf. Da nach Voraussetzung $L = N = 0$ auf der Anfangskurve $u = v$ gilt, so ist auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für das Cauchysche Anfangswertproblem $L = N = 0$ in einer ganzen Umgebung von $u = v = 0$. Die Linien $u =$ konst. und $v =$ konst. sind also Asymptotenlinien der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$. Weiter folgt aus $k = \frac{-M^2}{EG - F^2}$ zusammen mit $L = N = 0$, daß $k(u, v)$ die Krümmung der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist.

§ 2.

Der Eindeutigkeits- und Existenzsatz.

Für den in der Einleitung ausgesprochenen Eindeutigkeitssatz geben wir zunächst eine analytische Formulierung. Nach Voraussetzung haben beide Flächen einen Streifen gemeinsam, d. h. längs einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}(s)$ mit der Bogenlänge s haben beide Flächen denselben Einheitsvektor $\mathfrak{n}(s)$ der Normalen. Daß der Streifen kein Schmiegstreifen ist, bedeutet $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} \neq 0$; also kann man $\mathfrak{n}$ so wählen, daß $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$ ist. Auf jeder der beiden Flächen wird die folgende Parametertransformation durchgeführt; sie möge nur

für die erste Fläche, die $\mathfrak{x}$-Fläche ausführlich geschildert werden. Zunächst werden Asymptotenlinienparameter u, v eingeführt: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$. Wegen $(\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)^2 = -K(EG - F^2)^2 \neq 0$ kann, allenfalls durch Vertauschen von u und v immer $\mathfrak{x}_{uv}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) > 0$ erreicht werden. Weiter läßt sich auf dem Streifen $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{n} \cdot |\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|$ erzielen, wenn nötig durch Ersetzen von u durch $-u$. Dem Kurvenpunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}(s)$ entspreche in der u, v-Ebene $u = \varphi(s)$, $v = \psi(s)$, wobei wegen $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} = (\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n}) \cdot 2\varphi' \psi' \neq 0$ sowohl $\varphi' \neq 0$ als auch $\psi' \neq 0$ sein muß. Wegen $\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n} = \mathfrak{x}_{uv}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \frac{1}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|} > 0$ und $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$ folgt sogar $\varphi' \cdot \psi' > 0$. Wenn also durch $u = \varphi(u_1)$, $v = \psi(v_1)$ neue Parameter u_1, v_1 eingeführt werden, so gilt auch für diese $\mathfrak{x}_{u_1 v_1}(\mathfrak{x}_{u_1} \times \mathfrak{x}_{v_1}) > 0$, $\mathfrak{x}_{u_1} \times \mathfrak{x}_{v_1} = \mathfrak{n} |\sqrt{(\mathfrak{x}_{u_1} \times \mathfrak{x}_{v_1})^2}|$, während jetzt dem Kurvenpunkt $\mathfrak{g}(s)$ in der Parameterebene $u_1 = v_1 = s$ entspricht. Schreibt man an Stelle von u_1, v_1 wieder u, v so ergibt sich

$$(6) \quad \mathfrak{x}_{uv}(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) > 0, \quad \mathfrak{x}(s, s) = \mathfrak{g}(s), \quad \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|}_{u=v=s} = \mathfrak{n}(s).$$

Auf dem Streifen unterscheiden wir eindeutig eine linke und eine rechte Seite der Kurve $\mathfrak{g}(s)$, indem wir verlangen, daß der Vektor, welcher senkrecht auf $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{n}$ von links nach rechts weist, zusammen mit $\mathfrak{g}'(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$ eine positive Raumorientierung ergeben soll. Die Abbildung der Fläche auf die Parameterebene induziert die Unterscheidung von rechter und linker Seite der Geraden $u = v$. In der u, v-Ebene weist dann die positive u-Achse auf die „rechte Seite" der Geraden $u = v = s$, weil $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{g}', \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\mathfrak{n} = |\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}| > 0$ ist. In genau derselben Weise bilden wir die zweite, die $\mathfrak{y}$-Fläche, die nach Voraussetzung durch denselben Streifen geht, auf dieselbe u, v-Ebene ab, so daß (6) auch für $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$ gilt und zwar mit denselben Funktionen $\mathfrak{g}(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$. Zwei Paare von Asymptotenlinien, die sich, von dem gleichen Punktepaar auf $\mathfrak{g}(s)$ ausgehend, auf beiden Flächen auf derselben Seite des Streifens schneiden, haben in der u, v-Ebene als gemeinsame Bilder zwei Gerade $u =$ konst. und $v =$ konst. In dem Schnittpunkt u, v dieser beiden Geraden haben also $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$ dieselbe Krümmung $K(u, v)$.

Nach diesen Vorbereitungen genügt es ersichtlich folgenden Eindeutigkeitssatz zu beweisen:

Eindeutigkeitssatz. *In einer Umgebung von* $u = v = 0$ *sollen die beiden Flächenvektoren* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ *und* $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$ *folgende Voraussetzungen erfüllen:*

1. $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$ *dreimal stetig nach* u, v *differenzierbar,* $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, $\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \neq 0$.

2. *In den Punkten, welche denselben Parameterwerten u, v entsprechen, haben beide Flächen dieselbe Krümmung $K(u, v) < 0$ und für beide Flächen sind die u, v-Linien Asymptotenlinien.*

3. *Für $u = v = s$ ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ und* $\dfrac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|} = \dfrac{\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v}{|\sqrt{(\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v)^2}|}$.

Wird $\mathfrak{x}(s, s) = \mathfrak{g}(s)$, $\left.\dfrac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|}\right|_{u=v=s} = \mathfrak{n}(s)$ *gesetzt, so sei s die Bogenlänge von $\mathfrak{g}(s)$, also* $\mathfrak{g}'^2 = 1$.

4. $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$.

Dann ist $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(u, v)$ in einer Umgebung von $u = v = 0$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} = 2 \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n} = 2 \mathfrak{y}_{uv} \mathfrak{n}$ ist $(\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) > 0$ und $(\mathfrak{y}_{uv}, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v) > 0$ in einer Umgebung von $u = v = 0$. Also gilt nach Satz 1 dort

$$\mathfrak{x}_{uv} = |\sqrt{-K}|(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) - \frac{K_v}{4K}\mathfrak{x}_u - \frac{K_u}{4K}\mathfrak{x}_v \tag{7}$$

und dieselbe Gleichung, mit derselben Funktion $K(u, v)$, gilt auch für $\mathfrak{y}(u, v)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist daher die Behauptung erwiesen, wenn für $u = v = s$ außer $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ auch noch $\mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}_u$ und $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v$ gezeigt werden kann. Dazu berücksichtige man, daß $\mathfrak{n}$ längs $u = v = s$ die Normale der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ ist, also $\mathfrak{x}_u \mathfrak{n}' = -\mathfrak{x}_u' \mathfrak{n} = -\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n}$. Andererseits ist $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} = 2 \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n}$, also

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{n}' = -\tfrac{1}{2} \mathfrak{g}'' \mathfrak{n}. \tag{8}$$

Ferner nach (7)

$$\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} = 2|\sqrt{-K}| \cdot |\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|, \quad \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{n} \cdot \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|},$$

also

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{g}' = \mathfrak{n} \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|}. \tag{9}$$

In einer Umgebung von $u = v = 0$ muß eine der drei Komponenten g_1', g_2', g_3' von $\mathfrak{g}'(s)$ von Null verschieden sein, wir nehmen an $g_3' \neq 0$. Die Gleichung (8) und die beiden ersten Gleichungen (9) lauten ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} x_u n_1' + y_u n_2' + z_u n_3' &= -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}), \\ y_u g_3' - z_u g_2' &= n_1 \frac{(\mathfrak{g}'' \mathfrak{n})}{2|\sqrt{-K}|}, \\ -x_u g_3' + z_u g_1' &= n_2 \frac{(\mathfrak{g}'' \mathfrak{n})}{2|\sqrt{-K}|}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Determinante dieses System ist $\Delta = g_3'(\mathfrak{n}' \mathfrak{g}') = -g_3'(\mathfrak{n} \mathfrak{g}'') \neq 0$. Also ist $\mathfrak{x}_u$ durch die Gleichungen (10) eindeutig bestimmt. Da die drei Komponenten von $\mathfrak{y}_u$ genau denselben Gleichungen (10) genügen, muß $\mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}_u$

für $u = v = s$ sein. Aus $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ längs $u = v = s$ folgt dort $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v$. Damit ist der behauptete Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Zu diesem Eindeutigkeitssatz tritt der folgende

Existenzsatz. *Im x, y, z-Raum sei ein Streifen gegeben durch den Kurvenvektor $\mathfrak{g}(s)$, dreimal stetig differenzierbar nach der Bogenlänge s in einer Umgebung von $s = 0$, und den normalen Einheitsvektor $\mathfrak{n}(s)$, zweimal stetig nach s differenzierbar; der Streifen sei kein Schmiegstreifen, $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$. In einer u, v-Ebene sei in einer Umgebung von $u = v = 0$ eine zweimal stetig differenzierbare, negative Funktion $K(u, v)$ vorgegeben. Dann gibt es in einer Umgebung von $u = v = 0$ eine dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, mit der Krümmung $K(u, v)$ und den Linien $u =$ konst. und $v =$ konst. als Asymptotenlinien, die durch den vorgegebenen Streifen hindurchgeht: $\mathfrak{x}(s, s) = \mathfrak{g}(s)$ und $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{n}(s) \, |\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|$ für $u = v = s$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ die (in einer Umgebung von $u = v = 0$ dreimal stetig differenzierbare) Lösung des Systems

$$\mathfrak{x}_{uv} = |\sqrt{-K}| \, (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) - \frac{K_v}{4K} \mathfrak{x}_u - \frac{K_u}{4K} \mathfrak{x}_v, \tag{11}$$

welche für $u = v = s$ folgenden Anfangsbedingungen genügt: 1. $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}(s)$, 2. $\mathfrak{x}_u$ gleich denjenigen Werten, wie sie sich eindeutig aus den Gleichungen (10) ergeben und 3. $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{g}' - \mathfrak{x}_u$. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $g_3' \neq 0$ in einer Umgebung von $s = 0$). Dann ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen (10)

$$x_u = z_u \frac{g_1'}{g_3'} - \frac{n_2}{g_3'} \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|}, \quad y_u = z_u \frac{g_2'}{g_3'} + \frac{n_1}{g_3'} \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|},$$

woraus

$$x_u g_2' - y_u g_1' = n_3 \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|}$$

folgt. Also

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{g}' = \mathfrak{n} \frac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2|\sqrt{-K}|} \quad \text{für} \quad u = v. \tag{10a}$$

Wegen $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$ ist $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, $\dfrac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}|} = \mathfrak{n}$ längs $u = v = s$. Nach (10) ist $\mathfrak{x}_u \mathfrak{n}' = -\frac{1}{2}(\mathfrak{g}'' \mathfrak{n})$, also $\mathfrak{x}_u' \mathfrak{n} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}) = \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{n} + \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n}$. Andererseits ist nach (11) $\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n} = |\sqrt{-K}| \cdot \sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}$, woraus wegen $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{n} \dfrac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{|2\sqrt{-K}|}$ folgt $\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{n} = \dfrac{\mathfrak{g}'' \mathfrak{n}}{2}$. Daher $\mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{n} = 0$ und entsprechend $\mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{n} = 0$, beides für $u = v = s$. Nach dem Satz 2 folgt jetzt, daß in einer ganzen Umgebung von $u = v = 0$ die u, v-Linien Asymptotenlinien der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ sind und daß $K(u, v)$ die Krümmung der Fläche ist, womit die Behauptung bewiesen ist. Daß aus diesem Existenzsatz auch der in der Einleitung formulierte Existenzsatz folgt, ist nach den Überlegungen zu Beginn des Paragraphen klar.

§ 3.

Der Fall positiver Krümmung.

Im Falle positiver Krümmung kann man sich nicht mehr, sofern man sich auf das Reelle beschränkt, auf Asymptotenlinien beziehen. An ihre Stelle treten isotherm-konjugierte Parameter, d. h. Parameter, für welche in der zweiten Fundamentalform $L = N$, $M = 0$ wird. Jeder dreimal stetig nach solchen Parametern α, β differenzierbare Flächenvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta \neq 0$, mit der positiven Krümmung $K(\alpha, \beta)$ genügt dann der Gleichung

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{x}_{\alpha\alpha} + \mathfrak{x}_{\beta\beta}) = \sqrt{K}(\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta) - \frac{K_\alpha}{4K}\mathfrak{x}_\alpha - \frac{K_\beta}{4K}\mathfrak{x}_\beta, \tag{12}$$

wie man entweder mit Hilfe der Gaußschen Ableitungsgleichungen und der Gauß-Codazzischen Gleichungen oder direkt aus (1) durch die Parametertransformation $u = \alpha + i\beta$, $v = \alpha - i\beta$ herleitet. Ebenso ergibt sich umgekehrt: Wenn ein in α, β regulär analytischer Flächenvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta \neq 0$, den Gleichungen (12) genügt, wobei $K(\alpha, \beta)$ eine regulär analytische, positive Funktion ist und wenn für diese Fläche längs $\alpha = \beta$ gilt $L = N$, $M = 0$, dann ist identisch $L = N$, $M = 0$ und $K(\alpha, \beta)$ ist die Krümmung der Fläche.

Auf Grund dieser beiden Tatsachen ergibt sich ganz entsprechend zu den Überlegungen des vorangehenden Paragraphen folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Vorgegeben seien

1. *Im x, y, z-Raum ein Streifen, beschrieben durch den Kurvenvektor $\mathfrak{g}(s)$ und den Normalen-Einheitsvektor $\mathfrak{n}(s)$, beide regulär analytisch in der Bogenlänge s von $\mathfrak{g}(s)$ für eine Umgebung von $s = 0$; der Streifen sei kein Schmiegstreifen, d. h.* $\mathfrak{g}'' \mathfrak{n} > 0$.

2. *In einer α, β-Ebene eine in der Umgebung von $\alpha = \beta = 0$ regulär analytische positive Funktion $K(\alpha, \beta)$. Dann gibt es in einer Umgebung von $\alpha = \beta = 0$ eine und nur eine regulär analytische Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta \neq 0$, mit der Krümmung $K(\alpha, \beta)$ und den Parametern α, β als isothermkonjugierten Parametern, die durch den vorgegebenen Streifen hindurchgeht:*

$$\mathfrak{x}(s, s) = \mathfrak{g}(s), \quad \frac{\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta}{|\sqrt{(\mathfrak{x}_\alpha \times \mathfrak{x}_\beta)^2}|} = \mathfrak{n}(s) \quad \text{für} \quad \alpha = \beta = s.$$

Schließlich ergibt sich aus (12) nach einem bekannten Satz über den analytischen Charakter der Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen unmittelbar das folgende Theorem:

In einer Umgebung von $\alpha = \beta = 0$ sei die Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ dreimal stetig nach α, β differenzierbar und es seien α, β isotherm-konjugierte Parameter (d. h. $L = N$, $M = 0$); die Krümmung $K(\alpha, \beta)$ der Fläche sei positiv und regulär analytisch in α, β. Dann ist $\mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ regulär analytisch in einer Umgebung von $\alpha = \beta = 0$.

§ 4.

Fläche mit vorgeschriebener Krümmung und zwei vorgeschriebenen Kurven als Asymptotenlinien.

Für Flächen negativer Krümmung gilt der Satz[5]):

Vorgegeben seien: 1. *In einer u, v-Ebene eine in einer Umgebung von $u = v = 0$ zweimal stetig differenzierbare, negative Funktion $K(u, v)$.* 2. *Im x, y, z-Raum zwei Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(s)$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}(s)$, in einer Umgebung von $s = 0$ dreimal stetig nach s differenzierbar, $\mathfrak{a}'^2 = \mathfrak{b}'^2 = 1$, $\mathfrak{a}'' \neq 0$, $\mathfrak{b}'' \neq 0$; die beiden Kurven schneiden sich im Punkte $\mathfrak{a}(0) = \mathfrak{b}(0)$ und die von $\mathfrak{a}'(0)$, $\mathfrak{b}'(0)$ aufgespannte Ebene ist im Schnittpunkt für beide Kurven Schmiegebene; die Torsion der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(s)$ ist gleich $|\sqrt{-K(s, 0)}|$, die der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}(s)$ gleich $-|\sqrt{-K(0, s)}|$. Dann gibt es eine (und nur eine), in einer Umgebung von $u = v = 0$ dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$, mit den Eigenschaften: die Linien $u =$ konst., $v =$ konst. sind Asymptotenlinien der Fläche; $K(u, v)$ ist die Krümmung der Fläche; $\mathfrak{x}(u, 0) = \mathfrak{a}(u)$, $\mathfrak{x}(0, v) = \mathfrak{b}(v)$, die beiden vorgegebenen Kurven liegen also auf der Fläche und sind Asymptotenlinien.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ die in einer Umgebung von $u = v = 0$ dreimal stetig differenzierbare (eindeutig bestimmte) Lösung von

$$\mathfrak{x}_{uv} = |\sqrt{-K}|\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) - \frac{K_v}{4K}\mathfrak{x}_u - \frac{K_u}{4K}\mathfrak{x}_v \tag{13}$$

für die $\mathfrak{x}(u, 0) = \mathfrak{a}(u)$, $\mathfrak{x}(0, v) = \mathfrak{b}(v)$ gilt. Dann genügt es zu zeigen, daß längs der u-Achse $L = 0$ und längs der v-Achse $N = 0$ gilt; denn aus (5) folgt dann $L = N = 0$ und daraus entsprechend zu Hilfssatz 2 die volle Behauptung. Nun ist $L = 0$ für $v = 0$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{a}'' \cdot (\mathfrak{a}' \times \mathfrak{x}_v) = 0$ oder $\mathfrak{x}_v = \lambda\,\mathfrak{a}'' + \mu\,\mathfrak{a}'$. Zunächst ist jedenfalls $\mathfrak{x}_v = \lambda\,\mathfrak{a}'' + \mu\,\mathfrak{a}' + \nu\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'')$, wo $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $\nu(u)$ in einer Umgebung von $u = 0$ stetig differenzierbar sind, und $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{x}_v = \lambda\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'') - \nu\,\mathfrak{a}''$. Wegen (13) ist $\mathfrak{x}_v' = |\sqrt{-K}|\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{x}_v) - \frac{K_v}{4K}\mathfrak{a}' - \frac{K_u}{4K}\mathfrak{x}_v$ für $v = 0$, also $\mathfrak{x}_v'\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{x}_v) = |\sqrt{-K}|\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{x}_v)^2$. Das gibt

$$\lambda\,\mathfrak{x}_v'\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'') - \nu\,\mathfrak{x}_v'\,\mathfrak{a}'' = |\sqrt{-K}|\,\{\lambda^2\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'')^2 + \nu^2\,\mathfrak{a}''^2\},$$

$$\{\lambda'\,\mathfrak{a}'' + \mu'\,\mathfrak{a}' + \nu'\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'') + \lambda\,\mathfrak{a}''' + \mu\,\mathfrak{a}'' + \nu\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}''')\}\,\{\lambda\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'') - \nu\,\mathfrak{a}''\}$$
$$= |\sqrt{-K}|\,\{\lambda^2\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'')^2 + \nu^2\,\mathfrak{a}''^2\},$$

$$\begin{cases} -\lambda'\nu\,\mathfrak{a}''^2 + \lambda\nu'\,\mathfrak{a}''^2 + \lambda^2\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \mathfrak{a}''') - \lambda\nu\,\mathfrak{a}''\,\mathfrak{a}''' - \nu\mu\,\mathfrak{a}''^2 \\ + \lambda\nu\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}''')\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'') + \nu^2\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \mathfrak{a}''') \\ = |\sqrt{-K}|\,\lambda^2\,(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}'')^2 + |\sqrt{-K}|\,\nu^2\,\mathfrak{a}''^2. \end{cases} \tag{14}$$

[5]) Für Flächen konstanter Krümmung ist dieser Satz bekannt. Vgl. L. Bianchi, l. c.

Wegen $\lambda^2(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \mathfrak{a}''') = |\sqrt{-K}|\,\lambda^2(\mathfrak{a}'\times\mathfrak{a}'')^2$ besitzt diese Gleichung, aufgefaßt als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\nu(u)$ jedenfalls die Lösung $\nu \equiv 0$. Für $u = v = 0$ ist $\mathfrak{x}_v$ der Tangentenvektor der Kurve $\mathfrak{x}(0, v) = \mathfrak{b}(v)$, also liegt $\mathfrak{x}_v$ in der gemeinsamen Schmiegebene, also $\mathfrak{x}_v = \lambda\mathfrak{x}'' + \mu\mathfrak{x}'$, $\nu(0) = 0$ und $\lambda(0) \neq 0$, weil in $u = v = 0$ die Vektoren $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{x}'$ linear unabhängig sein müssen (die beiden Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ sollten sich *schneiden*!). Also ist in einer Umgebung von $u = 0$ der Koeffizient $\lambda\,\mathfrak{a}''^2$ von ν' in (14) von Null verschieden, woraus $\nu(u) \equiv 0$ folgt. Also $L = 0$ für $v = 0$. Entsprechend zeigt man $N = 0$ für $u = 0$, womit der Beweis erbracht ist.

§ 5.

Mittlere Krümmung an Stelle von Gaußscher Krümmung.

Läßt man in den vorangehenden Überlegungen an Stelle der Gaußschen Krümmung die mittlere Krümmung H treten, so sind die charakteristischen Linien des entsprechenden Problems die isotropen Linien und man hat, um im Reellen zu bleiben, die isothermen Parameter ($E = G$, $F = 0$) einzuführen. Der tiefgreifende Unterschied zwischen „hyperbolischem" und „elliptischem" Fall, je nachdem ob die Gaußsche Krümmung negativ oder positiv ist, hat hier kein Analogon — es gibt hier nur den „elliptischen" Fall. An Stelle der Gleichungen (12) treten hier die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_{\alpha\alpha} + \mathfrak{x}_{\beta\beta}) = H(\mathfrak{x}_\alpha\times\mathfrak{x}_\beta) \tag{15}$$

gültig für jede Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{x}_\alpha\times\mathfrak{x}_\beta \neq 0$ mit der mittleren Krümmung H, deren Parameter α, β isotherm sind. Wenn umgekehrt (15) besteht für einen Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$ mit $\mathfrak{x}_\alpha\times\mathfrak{x}_\beta \neq 0$ und wenn längs $\alpha = \beta = s$ gilt $E = G$, $F = 0$, so sind α, β isotherme Parameter und H ist die mittlere Krümmung von $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, \beta)$. Mit Hilfe dieser beiden Tatsachen gelangt man zu einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz in völliger Analogie zu § 3.

(Eingegangen am 1. September 1937.)

Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete.

Von

Max Müller in Heidelberg.

Der folgende Satz soll bewiesen und mit älteren Ergebnissen verglichen werden:

Das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}_z$ liege im Kreis $|z| < 1$ und enthalte den Kreis $|z| < r$; das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}_w$ liege im Kreis $|w| < 1$ und enthalte den Kreis $|w| < r'$. Die Funktion $w = f(z)$ bilde $\mathfrak{G}_z$ auf $\mathfrak{G}_w$ derart konform und schlicht ab, daß $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Dann gilt für $|z| \leqq \vartheta r$ $(0 \leqq \vartheta < 1)$ die Abschätzung

$$|f(z) - z| \leqq \vartheta \sqrt{(rR)^2 + 4r(\sin A(r, \vartheta))^2}, \tag{1}$$

wobei

$$R = \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{r} - 1,\ 1 - r'\right\}, \tag{2}$$

$$A(r, \vartheta) = \operatorname{Min}\left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\log\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right\}. \tag{3}$$

In der Ungleichung (1) gilt für $\vartheta > 0$ das Gleichheitszeichen nur, wenn $r = 1$, $f(z) = r'z$, $|z| = \vartheta$ ist, dann aber für alle ϑ aus dem Intervall $0 < \vartheta < 1$.

§ 1.

Beweis des Satzes.

1. Da $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ im Kreise $|z| < r$, ist nach dem Schwarzschen Lemma für $|z| < r$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{r}; \tag{4}$$

diese Ungleichung gilt aber auch in dem Teil des Gebietes $\mathfrak{G}_z$, der dem Kreisring $r \leqq |z| < 1$ angehört, weil dort $|f(z)| < 1$ und $|z| \geqq r$ ist, also im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}_z$.

Bezeichnet $z = \varphi(w)$ die Umkehrungsfunktion von $w = f(z)$, so gilt, weil die Voraussetzungen bezüglich der Gebiete $\mathfrak{G}_z$ und $\mathfrak{G}_w$ einander entsprechen, in $\mathfrak{G}_w$ die Abschätzung

$$\left|\frac{\varphi(w)}{w}\right| \leqq \frac{1}{r'}.$$

Daher ist in $\mathfrak{G}_z$ auch

$$\left|\frac{z}{f(z)}\right| \leqq \frac{1}{r'}. \tag{5}$$

Wird

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \varrho(z), \quad \arg\frac{f(z)}{z} = \alpha(z), \tag{6}$$

also

$$\frac{f(z)}{z} = \varrho(z)\, e^{i\alpha(z)}$$

gesetzt, so ist nach (4) und (5) in $\mathfrak{G}_z$

$$0 < r' \leqq \varrho(z) \leqq \frac{1}{r}, \tag{7}$$

also

$$|\varrho(z) - 1| \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{r} - 1,\ 1 - r'\right\} = R. \tag{8}$$

2. Es ist

$$|f(z) - z| = |z|\left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| = |z|\,|\varrho(z)\, e^{i\alpha(z)} - 1|$$

und nach dem Cosinussatz

$$\begin{aligned}|\varrho(z)\, e^{i\alpha(z)} - 1|^2 &= 1 + (\varrho(z))^2 - 2\,\varrho(z)\cos\alpha(z)\\ &= (1 - \varrho(z))^2 + 2\,\varrho(z)\,(1 - \cos\alpha(z))\\ &= (1 - \varrho(z))^2 + 4\,\varrho(z)\left(\sin\frac{\alpha(z)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

also

$$|f(z) - z| = |z|\sqrt{(1 - \varrho(z))^2 + 4\,\varrho(z)\left(\sin\frac{\alpha(z)}{2}\right)^2}. \tag{9}$$

3. Nach (6) und (7) ist in $\mathfrak{G}_z$

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0,$$

also

$$\log\frac{f(z)}{z} = \log\left|\frac{f(z)}{z}\right| + i\arg\frac{f(z)}{z} = \log\varrho(z) + i\,\alpha(z)$$

eindeutig und regulär. Ferner ist nach Voraussetzung

$$\alpha(0) = \arg f'(0) = 0.$$

Daher ist, wenn $z = k e^{i\omega}$ gesetzt und $k < r_* < r$ genommen wird, nach einer bekannten Formel[1])

$$\alpha(z) = \alpha(k e^{i\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\varrho(r_*\, e^{i\lambda})\,\frac{k\, r_* \sin(\omega - \lambda)}{r_*^2 + k^2 - 2\,k\, r_*\cos(\omega - \lambda)}\, d\lambda, \tag{10}$$

[1]) Vgl. etwa Hurwitz-Courant, Funktionentheorie (3. Aufl., Berlin, Julius Springer, 1929), S. 322, Formel (5).

also mit Rücksicht auf (7)

$$|\alpha(z)| \leqq \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left|\frac{k\,r_*\sin(\omega-\lambda)}{r_*^2+k^2-2\,k\,r_*\cos(\omega-\lambda)}\right|d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left|\frac{k\,r_*\sin\tau}{r_*^2+k^2-2\,k\,r_*\cos\tau}\right|d\tau$$

$$= \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{r}\log\frac{r_*+k}{r_*-k}.$$

Dies gilt, wie nahe auch r_* bei r gewählt wird; läßt man $r_* \to r$ streben, so ergibt sich, daß

$$|\alpha(z)| \leqq \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{r}\log\frac{r+k}{r-k}.$$

Für $|z| = k \leqq \vartheta r$ ist also

$$|\alpha(z)| \leqq \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{r}\log\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}^{2}). \tag{11}$$

4. Nach (11) ist

$$\left(\sin\frac{\alpha(z)}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{|\alpha(z)|}{2}\right)^2 \leqq (\sin A(r,\vartheta))^2, \tag{12}$$

wo $A(r, \vartheta)$ der Formel (3) zu entnehmen ist.

Aus (9), (8), (7) und (12) folgt schließlich, daß für $|z| \leqq \vartheta r$

$$|f(z)-z| \leqq \vartheta r\sqrt{R^2+\frac{4}{r}(\sin A(r,\vartheta))^2}$$

$$= \vartheta\sqrt{(r\,R)^2+4\,r(\sin A(r,\vartheta))^2},$$

d. h. die Ungleichung (1).

5. Es ist jetzt noch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) für $\vartheta > 0$ zu erörtern.

In (4) gilt für $z \neq 0$ das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $f(z)$ die Form $f(z) = \varepsilon\frac{1}{r}z$ hat, wo ε eine Zahl vom Betrag 1 bedeutet, also, weil wir die Funktionen $f(z)$ so normierten, daß $f'(0) > 0$ sein soll, lediglich für die Funktion $f(z) = \frac{z}{r}$. Entsprechend gilt in (5) für $z \neq 0$ das Gleichheitszeichen nur für die Funktion $f(z) = r'z$. Daher gilt in (8) das Gleichheitszeichen nur, wenn entweder $f(z) = \frac{z}{r}$ und $R = \frac{1}{r} - 1$ oder wenn $f(z) = r'z$ und $R = 1 - r'$. Für diese beiden Funktionen ist aber $\alpha(z) \equiv 0$. Da für $0 < \vartheta < 1$, $0 < r < 1$ die rechte Seite der Ungleichung (11) positiv ist, gilt in den Ungleichungen (8) und (11), solange $0 < \vartheta < 1$, $0 < r < 1$ ist, nie gleichzeitig das Gleichheitszeichen. Ist aber $r = 1$, so gilt es genau für die Funktion $f(z) = r'z$ gleichzeitig. Auch in (8) und (12) gelten die Gleich-

[2]) Man kann diese Abschätzung auch gewinnen, ohne die Integraldarstellung von $\alpha(z)$ zu benutzen. Vgl. etwa C. Carathéodory, Conformal Representation (Cambridge 1932), S. 45.

heitszeichen nur dann gleichzeitig, wenn $r = 1$ und $f(z) = r'z$ ist. Schließlich gilt in der Ungleichung (1) für $\vartheta > 0$ das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $r = 1, f(z) = r'z, |z| = \vartheta$ ist, dann aber für alle ϑ des Intervalles $0 < \vartheta < 1$.

§ 2.

Zwei Spezialfälle.

1. Setzt man insbesondere $r = r'$, so wird, weil für $0 < r < 1$

$$1 - r = r\left(\frac{1}{r} - 1\right) < \frac{1}{r} - 1$$

ist,

$$R = \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{r} - 1,\ 1 - r'\right\} = \frac{1}{r} - 1.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satz ist also für $|z| \leqq \vartheta r$

$$|f(z) - z| \leqq S_0(r, \vartheta),$$

wobei

$$S_0(r, \vartheta) = \vartheta \sqrt{(1 - r)^2 + 4r(\sin A(r, \vartheta))^2}. \tag{13}$$

2. Im Spezialfall $r' = 1$, in welchem $\mathfrak{G}_w$ die Kreisscheibe $|w| < 1$ ist, wird ebenfalls $R = \frac{1}{r} - 1$, also ergibt sich für $|f(z) - z|$ in der Kreisscheibe $|z| \leqq \vartheta r$ wiederum die in Formel (13) angegebene Schranke $S_0(r, \vartheta)$.

Eine Vorstellung davon, was die Schranke $S_0(r, \vartheta)$ bei praktischen Rechnungen leisten kann, gibt die folgende kleine Wertetafel[3]):

ϑ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$S_0(0{,}5; \vartheta)$	0,050	0,103	0,161	0,226	0,302	0,394	0,509	0,662	0,892
$S_0(0{,}6; \vartheta)$	0,040	0,083	0,129	0,181	0,243	0,317	0,412	0,539	0,736
$S_0(0{,}7; \vartheta)$	0,030	0 062	0,097	0,136	0,183	0,239	0,311	0,408	0,563
$S_0(0{,}8; \vartheta)$	0,020	0,041	0,065	0,091	0,122	0,160	0,208	0,274	0,380
$S_0(0{,}9; \vartheta)$	0,010	0,021	0,032	0,045	0,061	0,080	0,104	0,138	0,191

§ 3.

Vergleich mit einer Schranke von Carathéodory.

Den ersten Spezialfall hat Herr C. Carathéodory[4]) untersucht; er fand auf einem Wege, der nicht kürzer ist als der unserige, und mit Benutzung derselben Hilfsmittel[5]) statt $S_0(r, \vartheta)$ die Schranke

$$m(r, \vartheta) = \vartheta\left[\frac{1 - r^3}{r^2} + \frac{4}{\pi r^2} \log \frac{1}{r} \log \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta}\right]$$

[3]) Die Zahlenangaben hat Herr K. Schmeiser nachgeprüft, wofür ich ihm auch an dieser Stelle danke.

[4]) C. Carathéodory, Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen. Schwarzfestschrift (Berlin, Julius Springer, 1914), S. 19—41, bes. Nr. 7. Ferner an dem in Anm. [2]) a. O., S. 50—52.

[5]) Lediglich die Ungleichung (11) gewinnt Herr Carathéodory anders. Vgl. Anm. [2]).

und erwähnt[6]), daß sich durch längere Rechnungen zeigen läßt, daß $m(r, \vartheta)$ durch eine viel kleinere Schranke ersetzt werden kann.

Da für $0 < r < 1,\ 0 < \vartheta < 1$

$$\sqrt{(1-r)^2 + 4r(\sin A(r,\vartheta))^2} \leqq (1-r) + 2r|\sin A(r,\vartheta)| \quad (14)$$

[7]),

$$1 - r < 1 - r^3 < \frac{1}{r^2}(1 - r^3),$$

$$|\sin A(r,\vartheta)| < A(r,\vartheta) \leqq \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}, \quad (15)$$

$$2r < 2 < \frac{4}{r^2},$$

ist stets

$$S_0(r,\vartheta) < m(r,\vartheta).$$

Außerdem bietet $S_0(r,\vartheta)$ den Vorteil, im Quadrat $0 < r < 1, 0 < \vartheta < 1$ beschränkt zu bleiben; es ist nämlich

$$0 \leqq S_0(r,\vartheta) \leqq \vartheta \sqrt{(1-r)^2 + 4r} = \vartheta(1+r) < 2. \quad (16)$$

Die Schranke $m(r,\vartheta)$ hat diese Eigenschaft nicht, denn es strebt $m(r,\vartheta) \to \infty$ für $\vartheta \to 1$, $m(r,\vartheta) \to \infty$ für $r \to 0$.

§ 4.

Vergleich mit Schranken von Bieberbach und Ostrowski.

1. Im zweiten Spezialfall ergaben Untersuchungen der Herren L. Bieberbach und A. Ostrowski[8]) die Schranke

$$S_1(r,\vartheta) = \vartheta(1-r) + \vartheta\sqrt{1-r^2}\ \sqrt{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}}, \quad (17)$$

die für $0 < r < 1,\ 0 < \vartheta < 1$ gilt.

Zunächst ist nach (14), (15) und (16)

$$S_0(r,\vartheta) \leqq \vartheta(1-r) + \vartheta \operatorname{Min}\left\{2r, \frac{2r}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right\} = S_2(r,\vartheta).$$

---

[6]) A. in [2]) a. O., S. 52.

[7]) Es ist nämlich für $0 < r < 1,\ 0 \leqq a \leqq 1$

$$(1 - r + 2ra)^2 - ((1-r)^2 + 4ra^2) = 4ra(1-r)(1-a) \geqq 0,$$

d. h.

$$\sqrt{(1-r)^2 + 4ra^2} \leqq 1 - r + 2ra.$$

[8]) Vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II (2. Aufl., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931), S. 10—12. A. Ostrowski, Über konforme Abbildungen annähernd kreisförmiger Gebiete. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), S. 78—81.

Jedenfalls ist $S_2(r, \vartheta) \leqq S_1(r, \vartheta)$, also erst recht $S_0(r, \vartheta) \leqq S_1(r, \vartheta)$ für alle diejenigen Stellen des Quadrates $0 < r < 1$, $0 < \vartheta < 1$, für welche entweder

$$2r \leqq \sqrt{1-r^2}\ \sqrt{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}} \tag{18}$$

oder

$$\frac{2r}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \leqq \sqrt{1-r^2}\ \sqrt{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}}. \tag{19}$$

Die Ungleichung (18) ist erfüllt, wenn

$$\vartheta \geqq \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4r^2}{1-r^2}\right)} = \vartheta_0(r), \tag{20}$$

d. h. wenn bei festem r die Zahl ϑ hinreichend nahe bei 1 gewählt wird.

Die Ungleichung (19) ist erfüllt, wenn

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{r^2 \log^2 r}{1-r^2} \frac{\left(\log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2}{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}} \leqq 1. \tag{21}$$

Nun ist im Intervall $0 < r < 1$, wie eine elementare Rechnung zeigt,

$$0 < \frac{r^2 \log^2 r}{1-r^2} < 0{,}163;$$

daher ist die Ungleichung (21) gewiß erfüllt, wenn

$$h(\vartheta) = \frac{\left(\log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2}{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}} < 15{,}1 < \frac{\pi^2}{4 \cdot 0{,}163}.$$

Es ist

$$\lim_{\vartheta \to 0} h(\vartheta) = 4, \qquad \lim_{\vartheta \to 1} h(\vartheta) = \infty,$$

ferner

$$h'(\vartheta) = 2 \frac{\log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}}{(1-\vartheta^2)\left(\log \frac{1}{1-\vartheta^2}\right)^2} \left[2 \log \frac{1}{1-\vartheta^2} - \vartheta \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right];$$

hier ist der erste Faktor positiv; für den zweiten Faktor

$$k(\vartheta) = 2 \log \frac{1}{1-\vartheta^2} - \vartheta \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} = -(2+\vartheta)\log(1+\vartheta) - (2-\vartheta)\log(1-\vartheta)$$

findet man

$$k'(\vartheta) = \frac{2\vartheta}{1-\vartheta^2} - \log(1+\vartheta) + \log(1-\vartheta), \quad k''(\vartheta) = \frac{4\vartheta^2}{(1-\vartheta^2)^2}.$$

Da $k''(\vartheta) > 0$, $k'(0) = 0$, $k(0) = 0$, ist also $k(\vartheta) > 0$. Daher ist $h'(\vartheta) > 0$, d. h. $h(\vartheta)$ steigt monoton und durchläuft genau einmal den Wert 15,1. Eine einfache Rechnung zeigt, daß noch

$$h(0{,}99999) < 15{,}1.$$

Es ergibt sich also, daß für $0 < r < 1$, $0 < \vartheta \leqq 0{,}99999$

$$S_0(r, \vartheta) \leqq S_2(r, \vartheta) \leqq S_1(r, \vartheta). \tag{22}$$

Die in Formel (20) definierte Funktion $\vartheta_0(r)$ steigt im Intervall $0 < r < 1$ monoton vom Wert 0 zum Wert 1 an. Wählt man r_0 so, daß $0 < r_0 < 1$ und $\vartheta_0(r_0) \leqq 0{,}99999$, so gewinnt man ein Rechteck $0 < r < r_0$, $0 < \vartheta < 1$, in welchem die Ungleichung (22) ebenfalls gilt. Man kann $r_0 = 0{,}85$ wählen.

Damit ist in praktisch wohl ausreichendem Umfang die Überlegenheit der Schranke $S_0(r, \vartheta)$ — und sogar der Schranke $S_2(r, \vartheta)$ — über die Schranke $S_1(r, \vartheta)$ nachgewiesen.

2. Für Werte von r, die nahe bei 1 liegen, wird die Überlegenheit von $S_0(r, \vartheta)$ immer stärker. Es ist nämlich für $0 < \vartheta < 1$

$$S_0(1, \vartheta) = S_1(1, \vartheta) = 0, \tag{23}$$

ferner, wenn

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} > \frac{\pi}{2},$$

$\frac{\partial S_0}{\partial r} = \vartheta$ und, wenn

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial r} = \vartheta^2 \frac{1-r}{S_0(r, \vartheta)} \left[2 \sin\left(\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)}{1-r} \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{4}{\pi} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \cos\left(\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)}{1-r} \right].$$

Da

$$\lim_{r \to 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{r} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)}{1-r} = \frac{1}{\pi} \log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}$$

ist, wird

$$\lim_{r \to 1} \frac{1-r}{S_0(r, \vartheta)} = \frac{1}{\vartheta \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \left(\log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2}}$$

und

$$\lim_{r \to 1} \frac{\partial S_0}{\partial r} = - \vartheta \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \left(\log \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2}. \tag{24}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial S_1}{\partial r} = - \vartheta - \vartheta \sqrt{\log \frac{1}{1-\vartheta^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

also

$$\lim_{r \to 1} \frac{\partial S_1}{\partial r} = - \infty. \tag{25}$$

Aus (23), (24) und (25) folgt, daß

$$\lim_{r \to 1} \frac{S_0(r, \vartheta)}{S_1(r, \vartheta)} = \lim_{r \to 1} \frac{\frac{\partial S_0}{\partial r}}{\frac{\partial S_1}{\partial r}} = 0.$$

Hiermit ist die eingangs dieses Abschnittes ausgesprochene Behauptung bewiesen.

3. Die Funktion $S_1(r, \vartheta)$ bleibt nicht beschränkt, wenn $\vartheta \to 1$ strebt. Herr Ostrowski hat deshalb a. a. O. noch die weitere Schranke

$$S_3(r, \vartheta) = \vartheta(1 - r) + 2\sqrt{1 - r^2}^{\log \frac{1}{\vartheta}} \tag{26}$$

berechnet, die für $0 < r < 1$, $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ gilt und in diesem Rechteck zwischen den Grenzen 0 und 3 eingeschlossen ist.

Es ist $S_3(1, \vartheta) = 0$ und

$$\frac{\partial S_3}{\partial r} = -\vartheta - 2r \log \frac{1}{\vartheta} (1 - r^2)^{\frac{1}{2} \log \frac{1}{\vartheta} - 1},$$

also, weil für $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ der Exponent $\frac{1}{2} \log \frac{1}{\vartheta} - 1 < 0$ ist, $\lim_{r \to 1} \frac{\partial S_3}{\partial r} = -\infty$. Mithin

$$\lim_{r \to 1} \frac{S_0(r, \vartheta)}{S_3(r, \vartheta)} = 0.$$

Für Werte von r, die nahe genug bei 1 liegen, ist also die Schranke $S_0(r, \vartheta)$ wesentlich schärfer als die Schranke $S_3(r, \vartheta)$.

4. Wir untersuchen jetzt, wo

$$\sqrt{1 - r^2}^{\log \frac{1}{\vartheta}} \geqq \vartheta r \tag{27}$$

ist; denn dort ist nach (16) und (26) gewiß $S_3(r, \vartheta) \geqq S_0(r, \vartheta)$. Die Ungleichung (27) ist genau dann erfüllt, wenn

$$-\log r \geqq \log \vartheta \,[1 + \log \sqrt{1 - r^2}]. \tag{28}$$

Da $0 < r < 1$, $\frac{1}{2} \leqq \vartheta < 1$, also $-\log r > 0$, $\log \vartheta < 0$ ist, ist dies sicher der Fall, wenn

$$1 + \log \sqrt{1 - r^2} \geqq 0, \quad \text{d. h.} \quad r \leqq \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} = 0{,}9298\ldots.$$

Ist aber $1 + \log \sqrt{1 - r^2} < 0$, so ist die Ungleichung (28) oder

$$\log \vartheta \geqq \frac{-\log r}{1 + \log \sqrt{1 - r^2}}$$

dann und nur dann für alle ϑ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 befriedigt, wenn

$$\log \frac{1}{2} \geqq \frac{-\log r}{1 + \log \sqrt{1 - r^2}}$$

oder

$$\log 2 = 0{,}6931\ldots \leqq \frac{\log r}{1 + \log\sqrt{1 - r^2}}. \tag{29}$$

Die rechte Seite von (29) fällt im Intervall $\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} < r \leqq 1$ monoton von ∞ bis zum Wert 0. Es ergibt sich, daß die Ungleichung (29) erfüllt ist von allen zugelassenen Werten von r, die 0,940 nicht übertreffen. Für $r = 0{,}945$ ist sie dagegen nicht mehr richtig.

Hiermit ist bewiesen, daß für $0 < r \leqq 0{,}940$, $0{,}5 \leqq \vartheta < 1$ die Ungleichung $S_0(r, \vartheta) \leqq S_3(r, \vartheta)$ gilt.

Da $\vartheta \geqq \frac{1}{2}$, ist $\log \frac{1}{\vartheta} \leqq \log 2 < 0{,}695$ und für $0 < r < 1$

$$\sqrt{1 - r^2}^{\log \frac{1}{\vartheta}} > \sqrt{1 - r^2}^{0{,}695}.$$

Die Ungleichung

$$2\sqrt{1 - r^2}^{\log \frac{1}{\vartheta}} \geqq \vartheta\sqrt{1 - r^2}\sqrt{\log \frac{1}{1 - \vartheta^2}}$$

und damit, wie die Formeln (26) und (17) zeigen, die Ungleichung

$$S_3(r, \vartheta) \geqq S_1(r, \vartheta)$$

ist also erfüllt, wenn wir es so einrichten, daß

$$2\sqrt{1 - r^2}^{0{,}695} \geqq \vartheta\sqrt{1 - r^2}\sqrt{\log \frac{1}{1 - \vartheta^2}}$$

oder

$$\frac{4}{(1 - r^2)^{0{,}305}} \geqq \vartheta^2 \log \frac{1}{1 - \vartheta^2}. \tag{30}$$

Wir können uns auf solche Werte von r beschränken, die zwischen 0,94 und 1 liegen; für dieselben ist aber die linke Seite von (30) größer als 7,7; also ist, wie eine kurze Rechnung lehrt, die Ungleichung (30) gewiß erfüllt, wenn $0{,}5 \leqq \vartheta \leqq 0{,}9995$. Im Rechteck $0{,}94 \leqq r < 1$, $0{,}5 \leqq \vartheta \leqq 0{,}9995$ ist mithin $S_3(r, \vartheta) \geqq S_1(r, \vartheta)$, nach dem in Nr. 1 gefundenen Ergebnis (Ungleichung (22)) also auch $S_3(r, \vartheta) \geqq S_0(r, \vartheta)$. Wir haben damit bewiesen, daß für $0 < r < 1$, $0{,}5 \leqq \vartheta \leqq 0{,}9995$ die Schranke $S_0(r, \vartheta)$ schärfer ist als die Schranke $S_3(r, \vartheta)$.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß

$$\lim_{\vartheta \to 1} S_3(r, \vartheta) = 3 - r = 1 + r + 2(1 - r) > 1 + r = \lim_{\vartheta \to 1} S_0(r, \vartheta),$$

also für alle r, wenn nur ϑ nahe genug bei 1 liegt, $S_0(r, \vartheta)$ kleiner ist als $S_3(r, \vartheta)$.

Die Entscheidung der Frage, ob etwa ständig $S_0(r, \vartheta)$ kleiner ist als die anderen Schranken, dürfte mühsamere Betrachtungen erfordern. Es kann wohl auch darauf verzichtet werden.

(Eingegangen am 13. September 1937.)

Das spezielle Perron-Stieltjessche Integral.

Von

J. Ridder in Groningen.

In einer in der Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 578—604 erschienenen Arbeit behandelt A. J. Ward ein Perron-Stieltjessches Integrationsverfahren, das zu seiner Anwendbarkeit von der Funktion $\alpha(x)$, „in bezug auf" welche integriert werden soll, nur *Endlichkeit* fordert; während beim gewöhnlichen Perronschen- und bei dem von uns eingeführten (speziellen) Perron-Stieltjesschen Integral[1]) in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche im betrachteten Intervall (a, b) von beschränkter Variation ist, den extremen Derivierten bzw. den extremen $V(x)$-Derivierten (hierbei ist $V(a) = 0$ und $V(x)$ für $a < x \leqq b$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x)) im Zusammenhang mit dem Integranden $f(x)$ gewisse Ungleichheitsbedingungen auferlegt sind, fordert Ward von seinen Majoranten $\{\psi_{\alpha(x)}(x)\}$ und Minoranten $\{\varphi_{\alpha(x)}(x)\}$, daß in genügend kleiner Umgebung eines jeden Punktes x von (a, b) gewisse Ungleichungen zwischen $\psi_\alpha(x+h) - \psi_\alpha(x)$ bzw. $\varphi_\alpha(x+h) - \varphi_\alpha(x)$ und $f(x) \cdot \{\alpha(x+h) - \alpha(x)\}$ erfüllt sind ($f(x)$ wird dabei in (a, b) als endlich angenommen). Dieses Verfahren hat zwar den Vorteil, daß die zur Anwendung der Perronschen Methode notwendige Eigenschaft, nach der Majoranten und Minoranten eine in (a, b) nicht-abnehmende Differenz haben, leicht beweisbar wird; dagegen ist nicht ohne weiteres einzusehen, wie sich der bei der ursprünglichen Perron-Integration unmittelbar evidente Zusammenhang zwischen unbestimmtem Integral und primitiver Funktion auf den Fall der Integration und Differentiation in bezug auf eine endlichwertige Funktion $\alpha(x)$ übertragen läßt. Im folgenden wird man sehen, daß sich im Falle einer *stetigen* Funktion $\alpha(x)$ mittels Differentiationseigenschaften $\alpha(x)$-Majoranten und $\alpha(x)$-Minoranten und eine zugehörige Integration in bezug auf $\alpha(x)$ definieren lassen, bei welchen der genannte Zusammenhang (der sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung) wieder leicht erkennbar wird.

Dadurch, daß die stetige Funktion $\alpha(x)$ das eine Mal im betrachteten Intervall von beschränkter Variation, das andere Mal BVV* (siehe die Definition in § 9) angenommen wird und den Majoranten und Minoranten einige weitere Bedingungen auferlegt werden, erhalten wir in den §§ 2 bis 8 bzw. 9 bis 14 zwei Integraldefinitionen, welche sich erweitern lassen auf den Fall von *unstetigen* Funktionen von beschränkter Variation bzw. BVV*. Auch dann läßt sich ein zugehöriger Fundamentalsatz leicht beweisen.

[1]) Siehe Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 127—150.

Wir bemerken nebenbei, daß sich sogar bei der Integration in bezug auf Funktionen, welche im betrachteten Intervall endlich und BVV* sind, ein sehr allgemeiner Satz über die partielle Integration ableiten läßt (§ 15), welcher einen für die Anwendungen wichtigen Satz über partielle Integration beim speziellen Denjoyschen Integral[2]) (oder, was auf dasselbe hinauskommt, beim Perron-Integral) als Spezialfall umfaßt.

I. Das spezielle P.-S. Integral in bezug auf eine stetige Funktion $\alpha(x)$.

§ 1.

Definition 1. $F(x)$ und $\alpha(x)$ seien endlich in den Punkten einer Teilmenge P des abgeschlossenen Intervalls (a, b). Wenn jede Umgebung eines Punktes ξ von P Punkte (x) von P mit $x > \xi$ und $\alpha(x) > \alpha(\xi)$ enthält, so definiere

$$\underline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, r_1} F(\xi) = \liminf_{\substack{x \to \xi;\, x \in P;\\ x > \xi;\, \alpha(x) > \alpha(\xi)}} \frac{F(x) - F(\xi)}{\alpha(x) - \alpha(\xi)} \quad \text{(endlich oder unendlich)}$$

die untere rechte $\alpha(x)$-Derivierte erster Art von $F(x)$ in ξ in bezug auf P.

Wenn jede Umgebung von ξ Punkte (x) von P mit $x > \xi$ und $\alpha(x) < \alpha(\xi)$ enthält, so definiere

$$\underline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, r_2} F(\xi) = \liminf_{\substack{x \to \xi;\, x \in P;\\ x > \xi;\, \alpha(x) < \alpha(\xi)}} \frac{F(x) - F(\xi)}{\alpha(x) - \alpha(\xi)} \quad \text{(endlich oder unendlich)}$$

die untere rechte $\alpha(x)$-Derivierte zweiter Art von $F(x)$ in ξ in bezug auf P.

Entsprechend lassen sich *die oberen rechten $\alpha(x)$-Derivierten erster und zweiter Art*, $\overline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, r_1} F(\xi)$ bzw. $\overline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, r_2} F(\xi)$, *von $F(x)$ in ξ in bezug auf P* einführen.

Auch lassen sich *vier extreme linksseitige $\alpha(x)$-Derivierte erster oder zweiter Art von $F(x)$ in ξ in bezug auf P* definieren; ξ soll dabei linksseitiger Häufungspunkt von P sein. Bei den $\alpha(x)$-Derivierten erster Art betrachte man dazu Punkte (x) von P mit $x < \xi$ und $\alpha(x) < \alpha(\xi)$, bei denjenigen zweiter Art Punkte (x) von P mit $x < \xi$ und $\alpha(x) > \alpha(\xi)$.

Definition 2. Wenn es in jeder Umgebung eines Punktes ξ von P Punkte (x) von P mit $x > \xi$ und $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ gibt, soll es in ξ *eine rechte $\alpha(x)$-Ableitung $D^{(P)}_{\alpha(x);\, r} F(\xi)$ von $F(x)$ in bezug auf P* geben, falls: 1. in genügend kleiner Umgebung von ξ in denjenigen Punkten (x) von P, für die $x > \xi$ und $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ ist, gleichzeitig $F(x) = F(\xi)$ gilt; und: 2. alle

---

[2]) Siehe z. B. Hobson, Theory of functions I (Third Ed. 1927), S. 711 oder Saks, Théorie de l'intégrale (Varsovie 1933), S. 203.

in ξ in bezug auf P existierenden, extremen rechten $\alpha(x)$-Derivierten erster und zweiter Art einander gleich sind. Dieser gemeinsame Wert sei dann der Wert von $D^{(P)}_{\alpha(x);r} F(\xi)$.

Ist für alle hinreichend nahe an ξ gelegenen Punkte $x > \xi$ von P immer $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ und $F(x) = F(\xi)$, so betrachten wir die rechte $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ in ξ in bezug auf P als existierend, jedoch von unbestimmtem Werte.

Die linke $\alpha(x)$-Ableitung $D^{(P)}_{\alpha(x);l} F(\xi)$ von $F(x)$ in ξ in bezug auf P läßt sich (so weit sie existiert) in analoger Weise einführen.

Definition 3. Ist unter den Voraussetzungen der Definition 2 $D^{(P)}_{\alpha(x);r} F(\xi) = D^{(P)}_{\alpha(x);l} F(\xi)$, so heißt der gemeinsame Wert *die $\alpha(x)$-Ableitung $D^{(P)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ von $F(x)$ in ξ in bezug auf P.*

Gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von ξ derart, daß in jedem zu $\mathfrak{U} \cdot P$ gehörenden Punkte x immer $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ und $F(x) = F(\xi)$ ist, so betrachten wir die $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ in ξ in bezug auf P als existierend, jedoch von unbestimmtem Werte[3]).

Definition A. $f(x)$ sei *endlich* und $\alpha(x)$ *stetig* im abgeschlossenen Intervall (a, b). Dann soll eine in (a, b) stetige Funktion *eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante* $\psi_{\alpha(x)}(x)$ heißen, wenn: 1. $\psi_\alpha(a) = 0$ ist; 2. mit Ausnahme abzählbar vieler, zu jedem Punkte ξ von (a, b) ein positives $h(\xi)$ gehört derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi, \xi + h(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\psi_\alpha(x) \geqq \psi_\alpha(\xi)$ ist; 3. in jedem Punkte x von (a, b), wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen,

$$\underline{D}_{\alpha(x);r_1} \psi_\alpha(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x);r_2} \psi_\alpha(x) \leqq f(x)$$

gilt, so weit in dem Punkte x diese extremen Derivierten (in bezug auf (a, b)) existieren.

Definition B. *Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Minorante* $\varphi_{\alpha(x)}(x)$ soll in (a, b) stetig sein und daneben die folgenden Eigenschaften haben: 1. $\varphi_\alpha(a) = 0$; 2. zu jedem Punkte ξ von (a, b), abzählbar viele ausgenommen, gehört ein positives $k(\xi)$ derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi, \xi + k(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\varphi_\alpha(x) \leqq \varphi_\alpha(\xi)$ ist; 3. in jedem Punkte x von (a, b), wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, ist

$$\overline{D}_{\alpha(x);r_1} \varphi_\alpha(x) \leqq f(x) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x);r_2} \varphi_\alpha(x) \geqq f(x),$$

so weit diese extremen Derivierten in x existieren.

---

[3]) In denjenigen (abzählbar vielen) Punkten, in welchen eine einseitige Unstetigkeit von $\alpha(x)$ auftritt, kann es bisweilen wünschenswert sein, bei der Definition der $\alpha(x)$-Ableitung nur die extremen $\alpha(x)$-Derivierten auf der Unstetigkeitsseite zu berücksichtigen. Vgl. loc. cit. [1]), S. 130—136 u. S. 143 (Satz XII).

Satz 1. *Ist $\alpha(x)$ in (a, b) stetig und sind $\psi_\alpha(x)$, $\varphi_\alpha(x)$ adjungierte Majorante und Minorante zu der endlichen Funktion $f(x)$, so ist $\psi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ eine monoton zunehmende Funktion (im weiteren Sinne).*

Beweis. Wir werden zeigen, daß die Annahme der Existenz von Funktionen $\psi_\alpha(x)$, $\varphi_\alpha(x)$, deren Differenz $\omega_\alpha(x) \equiv \psi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ *nicht* monoton zunehmend ist, zu einem Widerspruch führt.

In einem solchen Falle gibt es zwei Punkte c, d mit $a \leqq c < d \leqq b$, für die

$$\omega_\alpha(c) > \omega_\alpha(d)$$

ist. In jedem Punkte x von (c, d), mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge, ist

$$\underline{D}_{\alpha(x);\, r_1}\, \omega_\alpha(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x);\, r_2}\, \omega_\alpha(x) \leqq 0,$$

so weit diese extremen α-Derivierten in x existieren, während daneben x linker Endpunkt eines offenen Intervalls $(x, x + h(x))$ ist mit der Eigenschaft, daß in allen in diesem liegenden Punkten (x') mit $\alpha(x') = \alpha(x)$

$$\omega_\alpha(x') \geqq \omega_\alpha(x)$$

ist.

Wir definieren in den Punkten (x) mit $c \leqq x < d$

$\omega_\alpha^{(1)}(x) =$ Maximum von $\omega_\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (x, d),

und $\omega_\alpha^{(1)}(d) = \omega_\alpha(d)$.

Dann ist $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ eine in (c, d) nicht konstante, monoton abnehmende, stetige Funktion. Wenn $\sum_{(n)} u_n$ die Menge der größten, offenen Teilintervalle von (c, d) andeutet, in deren jedem $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ konstant ist, so ist die Menge $G \equiv (c, d) - \sum_{(n)} u_n$ abgeschlossen; vielleicht mit Ausnahme von c und d kann G keine isolierten Punkte enthalten. In den Punkten von G fallen $\omega_\alpha(x)$ und $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ zusammen.

Nun sei $\alpha^{(1)}(x)$ eine in (c, d) stetige Funktion mit $\alpha^{(1)}(x) = \alpha(x)$ in den Punkten von G, welche sich linear ändere in einem jeden der Intervalle (u_n).

Wenn c_n und d_n die Endpunkte des zugehörigen Intervalles u_n sind, so hat man in jedem Punkte x mit $c_n \leqq x < d_n$ entweder:

$$\underline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_1}\, \omega_\alpha^{(1)}(x) = 0; \quad \overline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_2}\, \omega_\alpha^{(1)}(x) \text{ existiert nicht,}$$

oder:

$$\underline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_1}\, \omega_\alpha^{(1)}(x) \text{ existiert nicht}; \quad \overline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_2}\, \omega_\alpha^{(1)}(x) = 0,$$

oder:

$\alpha^{(1)}(x) = \alpha^{(1)}(c_n)$; die beiden ebengenannten extremen $\alpha^{(1)}$-Derivierten existieren nicht.

Betrachten wir einen willkürlichen Punkt x der Menge $G - G \cdot E$, welcher nicht linker Endpunkt eines Intervalles u_n ist. x ist Häufungspunkt der Teilmenge $\sum_{(j)} u_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ von denjenigen zu den $\{u_n\}$ gehörenden

ntervallen, welche auf der rechten Seite von x liegen; für die Endpunkte $_{n_j}$, d_{n_j} aller hinreichend nahe an x liegenden Intervalle aus den $\{u_{n_j}\}$ sind

$$\alpha^{(1)}(c_{n_j}) - \alpha^{(1)}(x) \quad \text{und} \quad \alpha^{(1)}(d_{n_j}) - \alpha^{(1)}(x)$$

ntweder beide positiv oder beide negativ. Denn im entgegengesetzten Fall väre x auch rechtsseitiger Häufungspunkt einer abzählbaren Menge von Punkten $\{\bar{x}_{n_j}\}$ mit

$$c_{n_j} \leqq \bar{x}_{n_j} \leqq d_{n_j} \quad \text{und} \quad \alpha(\bar{x}_{n_j}) - \alpha(x) = 0.$$

Da für jedes $\bar{x}$ mit $x < \bar{x} \leqq d$

$$\omega_\alpha(\bar{x}) < \omega_\alpha(x)$$

st, könnte es dennoch kein offenes Intervall $i(x)$ mit dem linken Endpunkte x geben derart, daß in jedem der ebengenannten und zu $i(x)$ gehörenden Punkte $\{\bar{x}_{n_j}\}$

$$\omega_\alpha(\bar{x}_{n_j}) \geqq \omega_\alpha(x)$$

wäre, wie dies der Fall sein müßte, da x zu $(c, d) - E$ gehört.

Somit sind für jedes in genügend kleiner Umgebung von x liegende Intervall aus der Folge $\{u_{n_j}\}$ die Brüche

$$\frac{\omega_\alpha^{(1)}(\bar{x}) - \omega_\alpha^{(1)}(x)}{\alpha^{(1)}(\bar{x}) - \alpha^{(1)}(x)}, \quad \frac{\omega_\alpha^{(1)}(c_{n_j}) - \omega_\alpha^{(1)}(x)}{\alpha^{(1)}(c_{n_j}) - \alpha^{(1)}(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_\alpha^{(1)}(d_{n_j}) - \omega_\alpha^{(1)}(x)}{\alpha^{(1)}(d_{n_j}) - \alpha^{(1)}(x)},$$

wobei $c_{n_j} < \bar{x} < d_{n_j}$, entweder alle > 0 oder alle < 0; der Wert des ersten Bruches gehört zum abgeschlossenen Intervall, dessen Endpunkte die Werte der beiden andern Brüche sind. Da außerdem $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ und $\omega_\alpha(x)$, ebenso wie $\alpha^{(1)}(x)$ und $\alpha(x)$, in den Punkten von G einander gleich sind, und in x

$$\underline{D}_{\alpha(x);\, r_1} \omega_\alpha(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x);\, r_2} \omega_\alpha(x) \leqq 0$$

st (soweit diese extremen α-Derivierten existieren), ist auch

$$\underline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_1} \omega_\alpha^{(1)}(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_2} \omega_\alpha^{(1)}(x) \leqq 0,$$

oweit sie existieren. Daneben *ist x linksseitiger Endpunkt eines Intervalles, n welchem keine Punkte $(\bar{x})$ mit $\omega_\alpha^{(1)}(\bar{x}) = \omega_\alpha^{(1)}(x)$ oder $\alpha^{(1)}(\bar{x}) = \alpha^{(1)}(x)$ iegen*; daraus folgt, daß in x eine und nur eine der extremen $\alpha^{(1)}$-Derivierten $\underline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_1} \omega_\alpha^{(1)}(x)$, $\overline{D}_{\alpha^{(1)}(x);\, r_2} \omega_\alpha^{(1)}(x)$ existiert.

Die extremen $\alpha^{(1)}$-Derivierten von $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ haben in (c, d) analoge Eigenschaften vie die extremen α-Derivierten von $\omega_\alpha(x)$; nur ist dabei die abzählbare Aus-nahmemenge E durch eine (abzählbare) Ausnahmemenge $H \subseteq E \cdot G$ zu ersetzen.

Die Punkte von H lassen sich einschließen in eine Menge J von abzählbar vielen, offenen Intervallen (c_p, d_p) $(p = 1, 2, \ldots)$ derart, daß in jedem $c_p, d_p)$ die Oszillation von $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ kleiner ist als $\frac{\omega_\alpha^{(1)}(d) - \omega_\alpha^{(1)}(c)}{2^{p+1}}$. Ent-

hält K die Punkte c und d und daneben die Punkte der Komplementärmenge von J in bezug auf (c, d), so bilden die Werte von $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ in den Punkten von K eine auf der y-Achse abgeschlossene Menge $\omega_\alpha^{(1)}(K)$ von positivem Maße. Ändern wir die Menge $\omega_\alpha^{(1)}(K)$ durch abzählbar viele Translationen[4]) auf der y-Achse derartig ab, daß die Endpunkte einer jeden der zu $\omega_\alpha^{(1)}(K)$ komplementären Intervalle in einem Punkte zusammengefallen sind, so geht dabei die Funktion $\omega_\alpha^{(1)}(x)$ auf K in eine Funktion $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ über, der weiter in einem jeden der zu K komplementären Teilintervalle von (c, d) ein konstanter Wert beigelegt werden soll, und zwar der Wert von $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ in den Endpunkten des betrachteten Intervalls. *$\omega_\alpha^{(2)}(x)$ ist eine in (c, d) nicht konstante, stetige, monoton abnehmende Funktion.*

Die Funktion $\alpha^{(2)}(x)$ sei stetig in (c, d), ändere sich linear in einem jeden der größten, offenen Teilintervalle (v_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ von (c, d), in welchen $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ konstant ist, und sei gleich $\alpha^{(1)}(x)$ in den Punkten der in bezug auf (c, d) komplementären Menge von $\sum_{(n)} v_n$. *Jeder Punkt x mit $c \leqq x < d$ ist linker Endpunkt eines abgeschlossenen Intervalls, in welchem $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ konstant ist und $\alpha^{(2)}(x)$ sich linear ändert, oder in welchem keine Punkte $(\bar{x})$ liegen mit $\omega_\alpha^{(2)}(\bar{x}) = \omega_\alpha^{(2)}(x)$ oder $\alpha^{(2)}(\bar{x}) = \alpha^{(2)}(x)$.*

In jedem Punkte x mit $c \leqq x < d$ hat man entweder

$$\underline{D}_{\alpha^{(2)}(x);\, r_1} \omega_\alpha^{(2)}(x) \geqq 0; \quad \overline{D}_{\alpha^{(2)}(x);\, r_2} \omega_\alpha^{(2)}(x) \text{ existiert nicht,}$$

oder

$$\underline{D}_{\alpha^{(2)}(x);\, r_1} \omega_\alpha^{(2)}(x) \text{ existiert nicht; } \overline{D}_{\alpha^{(2)}(x);\, r_2} \omega_\alpha^{(2)}(x) \leqq 0,$$

oder

x ist linker Endpunkt eines abgeschlossenen Intervalles, in welchem $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ und $\alpha^{(2)}(x)$ konstant sind.

Aus den im vorletzten Absatz angegebenen Eigenschaften von $\alpha^{(2)}(x)$ und aus der Eigenschaft der Bildmenge $\omega_\alpha^{(2)}[(c, d)]$, positives Maß zu haben, läßt sich die Existenz einer perfekten Teilmenge M von (c, d) herleiten, auf welcher $\alpha^{(2)}(x)$ monoton ist, während die Bildmenge $\omega_\alpha^{(2)}(M)$ positives Maß hat[5]).

---

[4]) Wenn M_n die nach n Translationen aus $\omega_\alpha^{(1)}(K)$ hervorgegangene Menge ist und $(p^{(n)}, q^{(n)})$ das zu M_n komplementäre Intervall ist, dessen Länge möglichst groß ist und dessen Punkte möglichst kleine Ordinatenwerte haben, so soll die Menge P_n der Punkte (y) von M_n mit $y \leqq p^{(n)}$ durch eine Translation [die $(n+1)^{\text{te}}$] in Richtung der positiven y-Achse über einen Abstand $q^{(n)} - p^{(n)}$ in die Menge P_n^* übergeführt werden; M_{n+1} sei dann die Summe von P_n^* und der bei *dieser* Translation ungeändert gebliebenen Funktionswerte [welche die Menge $(q^{(n)}) + (M_n - P_n)$ bildeten].

[5]) Siehe I. Petrowsky, Rec. math. Moscou **41** (1934), S. 48—58, insbesondere S. 51—55.

Definieren wir in dem kleinsten, abgeschlossenen, M enthaltenden Teilintervall (e, f) von (c, d) *eine stetige Funktion* $\alpha^{(3)}(x)$:

$\alpha^{(3)}(x) = \alpha^{(2)}(x)$ in den Punkten von M;

$\alpha^{(3)}(x)$ linear in den zu M komplementären Teilintervallen von (e, f), so ist diese Funktion *in* (e, f) *monoton.*

Die Bildmenge $\omega_\alpha^{(2)}(M)$ ist abgeschlossen. Ändern wir $\omega_\alpha^{(2)}(M)$ durch abzählbar viele Translationen auf der y-Achse derartig ab, daß die Endpunkte eines jeden der zu $\omega_\alpha^{(2)}(M)$ komplementären Intervalle in einem Punkte zusammengefallen sind, so geht dabei die Funktion $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ auf M in die neue Funktion $\omega_\alpha^{(3)}(x)$ über, die wir überdies in jedem zu M komplementären Teilintervall konstant annehmen, und zwar gleich dem Werte von $\omega_\alpha^{(3)}(x)$ in den Endpunkten des betrachteten Intervalls. $\omega_\alpha^{(3)}(x)$ *ist eine in* (e, f) *nicht konstante, stetige, monoton abnehmende Funktion.*

Aus den Eigenschaften der Funktionen $\omega_\alpha^{(2)}(x)$ und $\alpha^{(2)}(x)$ läßt sich ableiten, *daß, wenn* $\alpha^{(3)}(x)$ *in* (e, f) *monoton zunimmt, in jedem Punkte* x *mit* $e \leqq x < f$ *entweder*

$$\underline{D}_{\alpha^{(3)}(x);\, r_1} \omega_\alpha^{(3)}(x) \geqq 0 \text{ ist;} \quad \overline{D}_{\alpha^{(3)}(x);\, r_2} \omega_\alpha^{(3)}(x) \text{ nicht existiert,}$$

oder:

x *linker Endpunkt eines abgeschlossenen Intervalls ist, in welchem* $\omega_\alpha^{(3)}(x)$ *und* $\alpha^{(3)}(x)$ *konstant sind.*

Daraus würde jedoch folgen, daß $\omega_\alpha^{(3)}(x)$ in (e, f) monoton zunähme [6]), während doch $\omega_\alpha^{(3)}(e) > \omega_\alpha^{(3)}(f)$ ist. Wir gelangen zu einem Widerspruch.

Auch wenn $\alpha^{(3)}(x)$ in (e, f) monoton abnimmt, gelangt man in analoger Weise zu einem Widerspruch.

Definition 4. $f(x)$ sei *endlich* und $\alpha(x)$ *stetig* im abgeschlossenen Intervall (a, b). Wenn $f(x)$ in (a, b) $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha(x)\}$ hat, setze man den Wert des *unbestimmten (speziellen) oberen* $\alpha(x)$*-Integrals* $\Psi_\alpha(x)$ in einem willkürlichen Punkte x von (a, b) gleich der unteren Schranke aller $\psi_\alpha(x)$-Werte in diesem Punkte, und den Wert des *unbestimmten (speziellen) unteren* $\alpha(x)$*-Integrals* $\Phi_\alpha(x)$ in x gleich der oberen Schranke aller $\varphi_\alpha(x)$-Werte in x. Wir schreiben:

$$\Psi_\alpha(x) \equiv \overline{\int_a^x} (PS) f(x)\, d\alpha(x) = \operatorname{fin\,inf} \psi_\alpha(x)$$

und

$$\Phi_\alpha(x) \equiv \underline{\int_a^x} (PS) f(x)\, d\alpha(x) = \operatorname{fin\,sup} \varphi_\alpha(x).$$

Wenn in (a, b) $\Psi_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x)$ ist, so definiere ihr gemeinsamer Wert *das unbestimmte (spezielle)* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha(x)$ von $f(x)$ in (a, b).

---

[6]) Dies läßt sich zeigen wie loc. cit. [1]), S. 137, Satz IV.

Es ist immer $\Psi_\alpha(x) \geqq \Phi_\alpha(x)$.

Satz 2. *Wenn $\Psi_\alpha(x)$ und $\Phi_\alpha(x)$ in (a, b) existieren, so sind die Differenzen $\psi_\alpha(x) - \Psi_\alpha(x)$ und $\Phi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ in (a, b) monoton zunehmende Funktionen.*

Satz 3. *Wenn das bestimmte (spezielle) $\alpha(x)$-Integral der endlichen Funktion $f(x)$ über (a, b) existiert, d. h. $\Psi_\alpha(b) = \Phi_\alpha(b)$ ist, so existiert in (a, b) auch das unbestimmte (spezielle) $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha(x)$ und ist eine in (a, b) stetige Funktion.*

Das (spezielle) $\alpha(x)$-Integral besitzt, wie man sofort einsieht, die gewöhnlichen elementaren Eigenschaften eines jeden Integralbegriffes.

Satz 4. *$\alpha(x)$ sei stetig im abgeschlossenen Intervall (a, b). Die ebenfalls in (a, b) stetige Funktion $F(x)$ besitze in den Punkten von (a, b), vielleicht diejenigen einer abzählbaren Menge E ausgenommen, eine entweder unbestimmte oder bestimmte und endliche, rechtsseitige $\alpha(x)$-Ableitung $D_{\alpha(x);r} F(x)$. Dann ist $F(x) - F(a)$ das unbestimmte (spezielle) $\alpha(x)$-Integral von $D_{\alpha(x);r} F(x)$ in (a, b); auf E und in den Unbestimmtheitspunkten von $D_{\alpha(x);r} F(x)$ darf man dieser Ableitung dabei willkürliche endliche Werte beilegen. $F(x)$ ist somit durch die Kenntnis von $D_{\alpha(x);r} F(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt*[7]).

Der erste Teil des Satzes folgt sofort aus der Eigenschaft von $F(x) - F(a)$, sowohl α-Majorante wie α-Minorante von $D_{\alpha(x);r} F(x)$ zu sein.

II. Das spezielle P.-S. Integral in bezug auf eine Funktion von beschränkter Variation.

§ 2.

Definition A_1. Wenn $\alpha(x)$ in (a, b) *stetig* und *von beschränkter Variation* ist, soll unter $\psi^{(1)}_{\alpha(x)}(x)$ eine gemäß Definition A zu einer *endlichen* Funktion $f(x)$ adjungierte α-Majorante verstanden werden, welche außerdem den Bedingungen genügt: 4. mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge gehört zu jedem Punkte ξ von (a, b) ein positives $l(\xi)$ derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi - l(\xi), \xi]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\psi^{(1)}_\alpha(x) \leqq \psi^{(1)}_\alpha(\xi)$ ist; 5. in jedem Punkte x von (a, b), wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, ist

$$\underline{D}_{\alpha(x);l_1} \psi^{(1)}_\alpha(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x);l_2} \psi^{(1)}_\alpha(x) \leqq f(x),$$

soweit in dem Punkte x diese extremen Derivierten (in bezug auf (a, b)) existieren.

---

[7]) Vgl. Petrowsky, loc. cit. [5]), S. 48, 49 u. 57; diese von uns aus dem ersten Teil von Satz 4 gezogene Folgerung wird von Petrowsky unmittelbar bewiesen nach einem Verfahren, das uns beim Beweise von Satz 1 zum Muster diente.

Definition B_1. Eine α-Minorante $\varphi^{(1)}_{\alpha(x)}(x)$ soll außer den in Definition B genannten noch folgenden Bedingungen genügen: 4. zu jedem Punkte ξ von (a, b), mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, gehört ein positives $m(\xi)$ derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi - m(\xi), \xi]$ mit $\alpha(x) = a(\xi)$ immer $\varphi^{(1)}_{\alpha}(x) \geqq \varphi^{(1)}_{\alpha}(\xi)$ ist; 5. in jedem Punkte x von (a, b), mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, gilt

$$\overline{D}_{\alpha(x);\, l_1}\ \varphi^{(1)}_{\alpha}(x) \leqq f(x) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x);\, l_2}\ \varphi^{(1)}_{\alpha}(x) \geqq f(x),$$

soweit diese extremen Derivierten in x existieren.

Definition 5 geht aus Definition 4 hervor, wenn man in dieser nur α-Majoranten $\{\psi^{(1)}_{\alpha}(x)\}$ und α-Minoranten $\{\varphi^{(1)}_{\alpha}(x)\}$ zuläßt; $\alpha(x)$ ist dabei somit in (a, b) *stetig* und *von beschränkter Variation*. Wir schreiben dann:

$$\Psi^{(1)}_{\alpha}(x) \equiv \overline{\int_a^x} (PS^{(1)})\, f(x)\, d\,\alpha(x) = \operatorname{fin\,inf} \psi^{(1)}_{\alpha}(x)$$

und

$$\Phi^{(1)}_{\alpha}(x) \equiv \underline{\int_a^x} (PS^{(1)})\, f(x)\, d\,\alpha(x) = \operatorname{fin\,sup} \varphi^{(1)}_{\alpha}(x),$$

während der gemeinsame Wert von $\Psi^{(1)}_{\alpha}(x)$ und $\Phi^{(1)}_{\alpha}(x)$ (falls dieser existiert) *das $\alpha^{(1)}$-Integral von $f(x)$ über (a, x)*, $S^{(1)}_{\alpha}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(1)})\, f(x)\, d\,\alpha(x)$, sein soll.

Definition 6. Im abgeschlossenen Intervall (a, b) sei $F(x)$ endlich und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation. Dann heißt $F(x)$ *auf der Teilmenge E von (a, b) unterhalb totalstetig** [*oberhalb totalstetig**] *in bezug auf $\alpha(x)$*, wenn die Summen von Funktionsdifferenzen

$$\sum_{(j)} \{F(b_j) - F(c_j)\} \quad \text{und} \quad \sum_{(j)} \{F(c_j) - F(a_j)\},$$

wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu E gehörende Endpunkte von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen sind, immer einen unteren Limes $\geqq 0$ [einen oberen Limes $\leqq 0$] haben, sobald die Summe $\sum_{(j)} \omega_{\alpha}(a_j, b_j)$ gegen Null konvergiert; hierbei deutet $\omega_{\alpha}(a_j, b_j)$ die Oszillation von $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a_j, b_j) an[8]).

---

[8]) Wir bemerken, daß *aus der Eigenschaft von $F(x)$ auf E unterhalb* [*oberhalb*] *totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ zu sein folgt, daß sie es auch ist in bezug auf die Totalvariation $V(x)$ von $\alpha(x)$ über (a, x) $(a \leqq x \leqq b)$, und umgekehrt.* Denn aus

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{(j)} \{V(b_j^{(k)}) - V(a_j^{(k)})\} = 0,$$

wobei für jede natürliche Zahl k die Summation gehört zu endlich vielen, nicht übereinander greifenden Teilintervallen $(a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ von (a, b), folgt immer

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{(j)} \omega_{\alpha}(a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) = 0,$$

und umgekehrt. Es wird genügen, die Umkehrung zu beweisen für den Fall, daß $\alpha(x)$ außerdem stetig in (a, b) ist. — In den Punkten von (a, b), eine Menge E vom

Satz 5. *Die in (a, b) stetige Funktion $\alpha(x)$ sei daselbst von beschränkter Variation. Wenn dann $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ eine gemäß Definition A_1 in (a, b) zu einer endlichwertigen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante ist, wird (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge E, überdecken lassen durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k), auf deren jeder $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ [9]) ist.*

Beweis. Zu jedem Punkte x von (a, b), mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge F, gehört eine natürliche Zahl $n(x)$ derart, daß aus $0 < x' - x < \frac{1}{n(x)}$

$$(1) \qquad \psi_\alpha^{(1)}(x') - \psi_\alpha^{(1)}(x) \geqq -n(x) \cdot |\alpha(x') - \alpha(x)|$$

folgt und aus $0 > x' - x > -\frac{1}{n(x)}$

$$(2) \qquad \psi_\alpha^{(1)}(x) - \psi_\alpha^{(1)}(x') \geqq -n(x) \cdot |\alpha(x) - \alpha(x')|.$$

Bei festem n sei Q_n die Menge der Punkte von (a, b), in welchen (1) und (2) unter den angegebenen Bedingungen gültig sind; dann wird $(a, b) = F + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$

$V(x)$-Maße Null ausgenommen, ist $|D_{V(x)}\alpha(x)| = 1$ (siehe z. B. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, 2e Éd. (1928), S. 259, 260). Bei willkürlich positivem $\varepsilon < 1/2$ gehört zu jedem Punkte x von $(a, b) - E$ ein positives $\eta(x)$ derart, daß aus $\omega_\alpha(x, x+h) < \eta(x)$ (h positiv) oder $\omega_\alpha(x+h, x) < \eta(x)$ (h negativ) folgt:

$$\left| \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{V(x+h) - V(x)} \right| > 1 - \varepsilon.$$

Für genügend kleines, positives θ wird die Menge H der Punkte (x) von $(a, b) - E$, für die das zugehörige $\eta(x) > \theta$ ist, ein äußeres $V(x)$-Maß $> V(b) - \varepsilon$ haben. — Es gibt ein positives K derart, daß für jede natürliche Zahl $k > K$

$$\sum_{(j)} \omega_\alpha(a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) < \theta$$

ist. Bei fest gewähltem $k > K$ wird für diejenigen abgeschlossenen Intervalle $(a_{j'}^{(k)}, b_{j'}^{(k)})$, welche mindestens einen Punkt von H enthalten,

$$(p) \qquad \sum_{(j')} \{V(b_{j'}^{(k)}) - V(a_{j'}^{(k)})\} < \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{(j')} 2\,\omega_\alpha(a_{j'}^{(k)}, b_{j'}^{(k)}) < \frac{2\theta}{1-\varepsilon}$$

sein; für die übrigen Intervalle $(a_{j''}^{(k)}, b_{j''}^{(k)})$ ist

$$(q) \qquad \sum_{(j'')} \{V(b_{j''}^{(k)}) - V(a_{j''}^{(k)})\} < \underline{m}_{V(x)}[(a, b) - H] < \varepsilon,$$

wobei $\underline{m}_{V(x)}$ das innere (Lebesguesche) $V(x)$-Maß andeutet. — Da es möglich ist, $\theta < \varepsilon$ zu wählen, folgt aus (p) und (q) für jedes $k > K$

$$\sum_{(j)} \{V(b_j^{(k)}) - V(a_j^{(k)})\} < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} + \varepsilon < 5\varepsilon.$$

[9]) Daraus folgt: 1. $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ ist von beschränkter Variation (abgekürzt: BV) auf P_k; 2. wenn π_k das kleinste, abgeschlossene, P_k enthaltende Teilintervall von (a, b) ist, so wird die Summe der Oszillationen von $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von π_k einen endlichen Wert haben. Eine Funktion, welche auf einer perfekten Menge den Bedingungen 1. und 2. genügt, wird BV* auf dieser Menge genannt (vgl. § 9).

sein. Zu jedem n gehören endlich viele, abgeschlossene Intervalle $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ (wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von Q_n enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen $(Q_n^{(i)})$ von Q_n mit derartigen Intervallen. Nun ist $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ auf der abgeschlossenen Hülle $H_n^{(i)}$ eines jeden $Q_n^{(i)}$; das folgt aus (1) und (2) und der Stetigkeit von $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ und von $\alpha(x)$. $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ ist nun auch unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ auf dem perfekten Kerne eines jeden $H_n^{(i)}$, woraus der Satz folgt.

Satz 6. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und von beschränkter Variation. Wenn dann $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ eine gemäß Definition B_1 in $(a\,b)$ zu der endlichen Funktion $f(x)$ adjungierte α-Minorante ist, läßt (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge G, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (R_k), auf deren jeder $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$*[10]) *ist.*

Aus den Definitionen A_1 und B_1 und l. c. [1]), S. 134 (Satz III), 132 (Text bei Fußnote 10) folgt[11]), *daß $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ und $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ endliche $\alpha(x)$-Ableitungen haben in den Punkten von (a, b), eine Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen; hierbei ist $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) $(a \leqq x \leqq b)$.*

Damit läßt sich ableiten der

Satz 7. *Jedes unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(1)}(x)$ einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ in bezug auf eine in (a, b) stetige Funktion $\alpha(x)$ von beschränkter Variation (Totalvariation über $(a, x) = V(x)$) hat in den Punkten von (a, b), eine Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, eine $\alpha(x)$-Ableitung gleich $f(x)$.*

Beweis. In den Punkten von (a, b), mit Ausnahme einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null, existiert $D_{V(x)}\alpha(x)$ und ist entweder $+1$ oder -1[12]). Daraus, aus Definition A_1 und der eben abgeleiteten Eigenschaft der Majoranten folgt, daß für eine Majorante $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ in jedem Punkte x von (a, b), eine Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen,

$$D_{V(x)}\,\psi_\alpha^{(1)}(x) \text{ existiert und } \geqq f(x) \text{ oder } \geqq -f(x)$$

ist, je nachdem in x $D_{V(x)}\alpha(x) = +1$ oder $= -1$ ist; die α-Minoranten besitzen eine gleichartige Eigenschaft, nur mit $\leqq$ statt $\geqq$.

Daraus folgt[13]), daß in den Punkten von (a, b), wieder mit Ausnahme einer Menge vom $V(x)$-Maße Null. entweder

---

[10]) $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ ist BV* auf jeder Menge R_k [vgl. Fußnote [9])].

[11]) Die Behauptung folgt auch aus den Sätzen 5, 6 und loc. cit. [1]), S. 142 [Text bei Fußnote [22])], 132 [Text bei Fußnote [10])]. — Es hätte schon genügt, wenn die in diesem Kapitel benutzten Resultate und Betrachtungen aus loc. cit. [1]), S. 136—145 nur für den Fall einer *stetigen* Funktion $\alpha(x)$ gegeben wären.

[12]) Siehe z. B. Lebesgue, loc. cit. [8]), S. 259, 260.

[13]) Man vergleiche loc. cit. [1]), S. 140 (Beweis des Satzes VII).

$D_{V(x)} S_\alpha^{(1)}(x) = f(x)$ und $D_{V(x)} \alpha(x) = +1$, somit $D_{\alpha(x)} S_\alpha^{(1)}(x) = f(x)$, oder

$D_{V(x)} S_\alpha^{(1)}(x) = -f(x)$ und $D_{V(x)} \alpha(x) = -1$, somit $D_{\alpha(x)} S_\alpha^{(1)}(x) = f(x)$ ist.

§ 3.

Definition 7. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *stetig* und *von beschränkter Variation* ist, soll die in (a, b) *endliche* Funktion $f(x)$ daselbst *ein unbestimmtes (spezielles Denjoy-Stieltjessches)* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ haben, falls $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat: 1. $S_\alpha^{(1^*)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ ist stetig in (a, b); 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ *auf jedem* P_k *totalstetig* in bezug auf* $\alpha(x)$[14]) *ist*; 4. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche] $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, gleich $f(x)$.

Satz 8. *Die Integraldefinitionen* 5 *und* 7 *sind einander äquivalent.*

Beweis. Die endliche Funktion $f(x)$ habe in (a, b) ein $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(1)}(x)$ in bezug auf eine in (a, b) stetige Funktion $\alpha(x)$ von beschränkter Variation. Jede $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ von $f(x)$ ist für die Funktion $g(x)$, welche gleich $f(x) \times D_{V(x)} \alpha(x)$ ist in denjenigen Punkten von (a, b), in welchen $\alpha(x)$ eine $V(x)$-Ableitung von bestimmtem Werte hat, und gleich Null ist in den übrigen Punkten von (a, b), eine $V(x)$-Majorante im Sinne von l. c.[1]), S. 141 (Definition A_1)[15]); ebenso ist jede α-Minorante $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ von $f(x)$ eine $V(x)$-Minorante im Sinne von l. c.[1]), S. 142 (Definition B_1)[15]) für die Funktion $g(x)$. Dadurch ist das $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(1)}(x)$ auch unbestimmtes $V(x)$-Integral von $g(x)$ im Sinne von l. c.[1]), S. 144 (Definition 9), wie aus l. c., S. 145 (Satz XV) hervorgeht. Aus der eben zitierten Definition 9 und der Definition 7 dieses Paragraphen folgt nun, daß $S_\alpha^{(1)}(x)$ auch unbestimmtes D.-S. $\alpha(x)$-Integral im Sinne dieses Paragraphen für die Funktion $f(x)$ ist.

---

[14]) Das soll heißen: $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ ist auf P_k sowohl unterhalb wie oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$. Aus Fußnote [8]) folgt, *daß Totalstetigkeit* auf* P_k *in bezug auf* $\alpha(x)$ *äquivalent ist mit Totalstetigkeit* auf* P_k *in bezug auf die Totalvariation* $V(x)$ *von* $\alpha(x)$ *über* (a, x), *auch bei unstetiger Funktion* $\alpha(x)$.

[15]) Nur muß man dazu loc. cit. [1]), S. 141 (Def. A_1) und S. 142 (Def. B_1) unter 2 fordern, daß in den angegebenen Intervallen $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ monoton zunimmt bzw. $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ abnimmt. Läßt man den Wortlaut der übrigen Definitionen ungeändert, so kann man, wie leicht ersichtlich, auch den Wortlaut der Sätze ungeändert lassen.

Jede nach Definition 5 integrierbare Funktion ist es auch nach Definition 7 und die unbestimmten $\alpha(x)$-Integrale fallen zusammen[16]).

Umgekehrt ist das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ von $f(x)$ auch unbestimmtes $V(x)$-Integral der Funktion $g(x)$ gemäß l. c. [1]), S. 144 (Definition 9). Bei willkürlich positivem ε läßt sich eine in (a, b) stetige, nicht-abnehmende Funktion $\chi_1(x)$ konstruieren, mit $\chi_1(a) = 0$, $\chi_1(b) < \varepsilon$, welche, zu $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ addiert, eine Majorante $\psi(x)$ von $g(x)$ in bezug auf $V(x)$ im Sinne von l. c. [1]), S. 136 (Definition A) mit folgender Eigenschaft liefert: ihre $V(x)$-Ableitung existiert und ist $+\infty$ in allen Punkten, vielleicht abzählbar viele ausgenommen, in welchen es keine Ableitung $D_{V(x)}\alpha(x)$ vom Werte $+1$ oder -1 oder von unbestimmtem Werte gibt[17]). $\psi(x)$ genügt für die Funktionen $f(x)$, $\alpha(x)$ den Bedingungen der Definition A_1. Ebenso läßt sich eine in (a, b) stetige, nicht-abnehmende Funktion $\chi_2(x)$ mit $\chi_2(a) = 0$, $\chi_2(b) < \varepsilon$ konstruieren, welche, von $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ subtrahiert, eine Funktion $\varphi(x)$ liefert, die für $f(x)$, $\alpha(x)$ den Bedingungen der Definition B_1 genügt. Da ε willkürlich positiv ist, folgt hieraus, daß $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ auch unbestimmtes $\alpha(x)$-Integral von $f(x)$ im Sinne der Definition 5 ist.

§ 4.

Definition A_2 [B_2]. $f(x)$ sei *endlich*, $\alpha(x)$ *stetig* und *von beschränkter Variation* im abgeschlossenen Intervall (a, b). Dann soll *eine zu* $f(x)$ *in* (a, b) *adjungierte* $\alpha(x)$-*Majorante* $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ [$\alpha(x)$-*Minorante* $\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$] die Eigenschaften haben: 1. $\psi_\alpha^{(1^{**})}(a) = 0$ [$\varphi_\alpha^{(1^{**})}(a) = 0$]; 2. $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ [$\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$] ist stetig in (a, b); 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ *auf jedem* P_k *unterhalb* [$\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ *auf jedem* P_k *oberhalb*] *totalstetig* in bezug auf* $\alpha(x)$ ist; 4. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche[18])] $\alpha(x)$-Ableitung von $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ [von $\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$] ist in den Punkten mit $|D_{V(x)}\alpha(x)| = 1$ ihrer Existenzmenge, die Punkte einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, $\geqq f(x)$ oder $\leqq f(x)$, je nachdem $D_V\alpha = +1$ oder $= -1$ ist [$\leqq f(x)$ oder $\geqq f(x)$, je nachdem $D_V\alpha = +1$ oder $= -1$ ist].

Definition 8. Unter den in den Definitionen A_2 und B_2 gemachten Annahmen wird für $a \leqq x \leqq b$ gesetzt:

$$\Psi_\alpha^{(1^{**})}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(1^{**})}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$$

[16]) Man kann die erste Hälfte von Satz 8 auch unmittelbar beweisen (vgl. den Beweis von Satz 20).

[17]) Das Beweisverfahren, das hier benutzt werden soll, findet man in unserer Arbeit Fund. Math. 22 (1934), S. 141—144. Vgl. hier den Beweis von Satz 20 (zweiter Teil).

[18]) Vgl. Fußnote [11]).

und

$$\Phi_\alpha^{(1^{**})}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(1^{**})})\, f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup}\ \varphi_\alpha^{(1^{**})}(x),$$

während ihr gemeinsamer Wert (falls dieser existiert) *das* $\alpha^{(1^{**})}$*-Integral von* $f(x)$ *über* (a, x), $S_\alpha^{(1^{**})}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(1^{**})})\, f(x)\, d\alpha(x)$, sein soll.

Satz 9. *Die Definitionen* 5 *und* 8 *sind einander äquivalent.*

Beweis. Da sich zu jeder Majorante $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ und jeder Minorante $\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ in (a, b) stetige, nicht-abnehmende Funktionen $\chi_1(x)$ bzw. $\chi_2(x)$ konstruieren lassen, mit $\chi_1(a) = \chi_2(a) = 0$, $\chi_1(b)$ und $\chi_2(b) < \varepsilon$ (ε willkürlich positiv), welche, zu $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ addiert bzw. von $\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ subtrahiert, eine α-Majorante bzw. eine α-Minorante im Sinne der Definitionen A_1 und B_1 geben[17]), wird jede nach Definition 8 über (a, b) α-integrierbare Funktion es auch sein nach Definition 5; die Integralwerte sind einander gleich.

Auch die Umkehrung gilt, wie aus den Sätzen 5 und 6 und den Definitionen leicht hervorgeht.

§ 5.

Definition 9. $\alpha(x)$ sei in (a, b) *stetig* und *von beschränkter Variation*; $V(x)$ sei ihre Totalvariation über (a, x) für jedes x von (a, b). Dann hat *eine Funktion* $f(x)$, *welche endlich ist in* (a, b), *ausgenommen in den Punkten einer Menge vom* $V(x)$*-Maße Null*, in (a, b) *ein unbestimmtes* $\alpha^{(1)}$*-Integral* $\int_a^x (PS^{(1)})\, f(x)\, d\alpha(x)$, wenn die Funktion

$$f^*(x) = f(x) \text{ in den Punkten von } (a, b), \text{ in welchen } f(x) \text{ endlich ist,}$$
$$= 0 \text{ in den übrigen Punkten von } (a, b),$$

in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(1)}$-Integral gemäß Definition 5 hat. Wir setzen dann:

$$\int_a^x (PS^{(1)})\, f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(1)})\, f^*(x)\, d\alpha(x).$$

Satz 10. $\alpha(x)$ *sei in* (a, b) *stetig und von beschränkter Variation*; $V(x)$ *sei ihre Totalvariation über* (a, x). *Dann sind zwei Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$, *welche nur auf einer Teilmenge von* (a, b) *mit* $V(x)$*-Maße Null unendlich sein können und die bis auf die Punkte einer Menge vom* $V(x)$*-Maße Null zusammenfallen, entweder beide* $\alpha^{(1)}$*-integrierbar über* (a, b) *oder nicht. Im Falle der* $\alpha^{(1)}$*-Integrierbarkeit ist für jedes* x *von* (a, b)

$$\int_a^x (PS^{(1)})\, f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(1)})\, g(x)\, d\alpha(x).$$

Der Beweis folgt aus Definition 9, Satz 8 und Definition 7.

§ 6.

Definition A_3. $\alpha(x)$ sei *von beschränkter Variation* in (a, b); $V(x)$ sei ihre Totalvariation über (a, x). Eine in (a, b) zu der *endlichen* Funktion $f(x)$ adjungierte α-Majorante $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ soll auf der Menge der Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ den gleichen Bedingungen 1 bis 5 genügen, die in Definition A_1 von $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ auf (a, b) gefordert wurden. Daneben soll $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ die folgenden Eigenschaften haben: 6. $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ ist endlich und hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeitspunkte erster Art, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$; 7. in jedem Punkte x von (a, b) sind die einseitigen Grenzwerte $\psi_\alpha^{(1)}(x-0)$, $\psi_\alpha^{(1)}(x+0)$ (soweit sie existieren) endlich, während in einem Unstetigkeitspunkte ξ von $\alpha(x)$

$$\frac{\psi_\alpha^{(1)}(\xi) - \psi_\alpha^{(1)}(\xi-0)}{|\alpha(\xi) - \alpha(\xi-0)|} \geqq f(x) \text{ und } \frac{\psi_\alpha^{(1)}(\xi+0) - \psi_\alpha^{(1)}(\xi)}{|\alpha(\xi+0) - \alpha(\xi)|} \geqq f(x)$$

ist, soweit die Brüche existieren und dabei nicht die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ haben.

Definition B_3 der zu $f(x)$ adjungierten $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(1)}(x)\}$ bei $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation* in (a, b) geht in analoger Weise aus Definition B_1 hervor, wie Definition A_3 aus Definition A_1.

Satz 11 [Satz 12]. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) von beschränkter Variation. Wenn dann $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ [$\varphi_\alpha^{(1)}(x)$] eine gemäß Definition A_3 [Definition B_3] in (a, b) zu einer endlichen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante [$\alpha(x)$-Minorante] ist, läßt (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) [(R_k)], auf deren jeder $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ unterhalb totalstetig** [$\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ *oberhalb totalstetig**] *in bezug auf $\alpha(x)$ ist*[19]).

Beweis. Wenn wir fordern, daß jede Teilmenge $Q_n^{(i)}$ von (a, b) nur Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ enthält, daß sie im übrigen in gleicher Weise konstruiert wird wie die Menge $Q_n^{(i)}$ im Beweise von Satz 5, so nimmt die Funktion $\chi(x) \equiv \psi_\alpha^{(1)}(x) + n$. $V(x)$ auf $Q_n^{(i)}$ monoton zu, während ihre Werte in den inneren Punkten eines Intervalles (x_1, x_2), dessen Endpunkte zu $Q_n^{(i)}$ gehören, im abgeschlossenen Intervall $[\chi(x_1), \chi(x_2)]$ liegen.

Wenn die abgeschlossene Hülle $H_n^{(i)}$ von $Q_n^{(i)}$ Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ enthält, so bildet die Summe der Oszillationen von $\chi(x)$ in jenen Unstetigkeitspunkten eine konvergente Reihe; dasselbe gilt somit für die Oszillationen von $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ in jenen Punkten.

Damit läßt sich ableiten, daß $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ nicht nur auf $Q_n^{(i)}$, sondern auch auf $H_n^{(i)}$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $V(x)$ ist, somit (nach Fußnote 8) auch in bezug auf $\alpha(x)$ selbst; dasselbe gilt auf dem perfekten Kerne von $H_n^{(i)}$.

---

[19]) Daraus folgt, daß (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ [$\varphi_\alpha^{(1)}(x)$] BV* ist. Vgl. die Fußnoten [9]) und [10]).

Aus den Sätzen 11 und 12 folgt[20]), *daß* $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ *und* $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ *endliche* $\alpha(x)$*-Ableitungen haben auf der Menge der Stetigkeitspunkte von* $\alpha(x)$*, eine Teilmenge vom* $V(x)$*-Maße Null ausgenommen.*

Satz 13. *Ist* $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation in* (a, b) *und sind* $\psi_\alpha^{(1)}(x)$, $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ α*-Majorante und* α*-Minorante einer endlichen Funktion* $f(x)$*, so nimmt* $\psi_\alpha^{(1)}(x) - \varphi_\alpha^{(1)}(x)$ *monoton zu.*

Beweis. Durch abzählbar viele Translationen auf der x-Achse läßt sich das Intervall (a, b) überführen in ein abgeschlossenes Intervall (p, q) derartig, daß jeder Stetigkeitspunkt von $\alpha(x)$ einem einzigen Punkte von (p, q) entspricht, jeder Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ dagegen einem Teilintervall[21]) von (p, q), dessen Länge gleich $|\alpha(\xi - 0) - \alpha(\xi)| + |\alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi)|$ ist, und daß die Ordnungsrelationen zwischen korrespondierenden Punktepaaren von (a, b) und (p, q) die gleichen sind. Legen wir der Funktion $f^*(x)$ in jedem Punkte von (p, q) den gleichen Wert bei, den $f(x)$ in dem korrespondierenden Punkt von (a, b) hat, legen wir $\alpha^*(x)$ in jedem mit einem Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ korrespondierenden Punkt von (p, q) den gleichen Wert bei, den $\alpha(x)$ im Stetigkeitspunkte hat, und lassen wir $\alpha^*(x)$ in einem mit einem Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ korrespondierenden Intervall sich linear ändern von $\alpha(\xi - 0)$ bis $\alpha(\xi)$ auf dem linken Teil des Intervalls mit der Länge $|\alpha(\xi - 0) - \alpha(\xi)|$ und von $\alpha(\xi)$ bis $\alpha(\xi + 0)$ auf dem weiteren Teil dieses Intervalls, lassen wir schließlich die auf (p, q) definierten Funktionen $\psi_{\alpha^*}^{(1)}(x)$ und $\varphi_{\alpha^*}^{(1)}(x)$ in gleicher Weise aus $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ bzw. $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ hervorgehen wie $\alpha^*(x)$ aus $\alpha(x)$ entstand, so erfüllen $\psi_{\alpha^*}^{(1)}(x)$ und $\varphi_{\alpha^*}^{(1)}(x)$ in (p, q) die Majorantenbedingungen der Definition A_2 bzw. die Minorantenbedingungen der Definition B_2 für die Funktion $f^*(x)$ in bezug auf $\alpha^*(x)$.

Daraus folgt, daß $\psi_{\alpha^*}^{(1)}(x) - \varphi_{\alpha^*}^{(1)}(x)$ in (p, q) monoton zunimmt.

Definition 10. $f(x)$ sei *endlich* und $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation* in (a, b). Dann definieren wir für $a \leqq x \leqq b$:

$$\Psi_\alpha^{(1)}(x) \equiv \overline{\int_a^x} (PS^{(1)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_\alpha^{(1)}(x)$$

und

$$\Phi_\alpha^{(1)}(x) \equiv \underline{\int_a^x} (PS^{(1)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup } \varphi_\alpha^{(1)}(x),$$

während ihr gemeinsamer Wert (falls dieser existiert) *das* $\alpha^{(1)}$*-Integral von* $f(x)$ *über* (a, x), $S_\alpha^{(1)}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(1)}) f(x)\, d\alpha(x)$, sein soll.

---

[20]) Vgl. Fußnote [11]).

[21]) Linker und rechter Endpunkt des Intervalls werden diesem zugerechnet, wenn ein solcher Punkt nicht schon einem Stetigkeitspunkt von $\alpha(x)$ in (a, b) entspricht.

Mit Hilfe der beim Beweise von Satz 13 benutzten Transformationen läßt sich aus den Sätzen 9 und 7 ableiten der

Satz 14. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) von beschränkter Variation, $V(x)$ ihre Totalvariation über (a, x). Existiert in (a, b) das unbestimmte $\alpha^{(1)}$-Integral $S_\alpha^{(1)}(x)$ der endlichen Funktion $f(x)$, so existiert in den Stetigkeitspunkten (x) von $\alpha(x)$, eventuell mit Ausnahme einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null, $D_{\alpha(x)} S_{\alpha(x)}^{(1)}(x)$ und hat den Wert $f(x)$.*

§ 7.

Definition 11. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *von beschränkter Variation* ist, hat die in (a, b) *endliche* Funktion $f(x)$ *ein unbestimmtes (spezielles Denjoy-Stieltjessches) $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(1^*)}(x)$, falls $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat: 1. $S_\alpha^{(1^*)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$; in jedem Punkte x von (a, b) sind $S_\alpha^{(1^*)}(x-0)$ und $S_\alpha^{(1^*)}(x+0)$ endlich, während in einem linksseitigen oder rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\frac{S_\alpha^{(1^*)}(\xi-0) - S_\alpha^{(1^*)}(\xi)}{\alpha(\xi-0) - \alpha(\xi)} = f(\xi), \text{ bzw. } \frac{S_\alpha^{(1^*)}(\xi+0) - S_\alpha^{(1^*)}(\xi)}{\alpha(\xi+0) - \alpha(\xi)} = f(\xi)$$

ist; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ *auf jedem P_k totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$*[14]) ist; 4. es ist $D_\alpha S_\alpha^{(1^*)}(x) = f(x)$ in den Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, in welchen die $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(1^*)}(x)$ existiert, eine Teilmenge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen.

Die Definition A_4 $[B_4]$ *der $\alpha(x)$-Majoranten $\psi_\alpha^{(1^{**})}(x)$ [der $\alpha(x)$-Minoranten $\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)$]* bei $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation* in (a, b) läßt sich in analoger Weise formulieren wie Definition A_2 $[B_2]$. Nur fordere man dabei unter 2 linksseitige und rechtsseitige Stetigkeit in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, während in den Unstetigkeitspunkten die Grenzwerte

$$\psi_\alpha^{(1^{**})}(x+0), \psi_\alpha^{(1^{**})}(x-0) \; [\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x+0), \varphi_\alpha^{(1^{**})}(x-0)]$$

immer endlich und die Brüche

$$\frac{\psi_\alpha^{(1^{**})}(x+0) - \psi_\alpha^{(1^{**})}(x)}{|\alpha(x+0) - \alpha(x)|}, \quad \frac{\psi_\alpha^{(1^{**})}(x) - \psi_\alpha^{(1^{**})}(x-0)}{|\alpha(x) - \alpha(x-0)|}$$

$$\geqq f(x) \left[\frac{\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x+0) - \varphi_\alpha^{(1^{**})}(x)}{|\alpha(x+0) - \alpha(x)|}, \quad \frac{\varphi_\alpha^{(1^{**})}(x) - \varphi_\alpha^{(1^{**})}(x-0)}{|\alpha(x) - \alpha(x-0)|} \leqq f(x) \right]$$

sei sollen, soweit sie nicht die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ haben. Außerdem soll die Bedingung 4 nicht auf (a, b), sondern auf der Menge der Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ erfüllt sein.

Definition 12 geht aus Definition 8 dadurch hervor, daß die Definitionen A_4, B_4 statt A_2, B_2 benutzt werden.

Aus den Sätzen 11, 12, 8 und 9 läßt sich, unter Zuhilfenahme der im Beweise von Satz 13 angewandten Translationen, ableiten der

Satz 15. *Die Integraldefinitionen* 10, 11 *und* 12 *sind einander äquivalent.*

§ 8.

Definition 13 habe den gleichen Wortlaut wie Definition 9; nur soll $\alpha(x)$ nicht stetig zu sein brauchen und statt Definition 5 die Definition 10 benutzt werden.

Satz 16. Der Satz 10 läßt sich, unter Benutzung der Definition 13, übertragen auf den Fall, in welchem $\alpha(x)$ nicht stetig zu sein braucht.

Der Beweis folgt aus Definition 13, Satz 15 und Definition 11.

Mit Definition 13 sind, im Falle der Einwertigkeit der auftretenden Funktionen, äquivalent die l. c.[1]), S. 147—149 behandelten Integraldefinitionen. Daraus folgt, daß Satz XXI auf S. 150 der zitierten Arbeit *den Zusammenhang zwischen primitiver Funktion in bezug auf* $\alpha(x)$ *und dem unbestimmten speziellen P.-S.* $\alpha(x)$*-Integral* liefert *für den Fall, daß* $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation ist.*

Wir bemerken noch, daß im Falle einer monotonen Funktion $\alpha(x)$ eine nicht-negative Funktion $f(x)$ entweder gleichzeitig α-Integrale (von gleichem Wert) im Sinne der Definition 13 und der Lebesgue-Stieltjesschen Definition hat, oder nicht[22]), während sich dann auch leicht für das $(PS^{(1)})$-Integral ein Satz über gliedweise Integration von Reihen ableiten läßt[23]).

III. Das spezielle P.-S. Integral in bezug auf eine Funktion, welche in (a, b) BVV* ist.

§ 9.

Definition 14. E sei eine Teilmenge des abgeschlossenen Intervalls (a, b). Eine in den Punkten von (a, b) definierte Funktion $F(x)$ heiße *von beschränkter Variation** (abgekürzt: BV*) *auf* E, wenn sich eine positive

[22]) Zum Beweise vergleiche man Ridder, Fund. Math. 21 (1933), S. 9.
[23]) Man vergleiche loc. cit. [22]), S. 9, 10.

Zahl N finden läßt derart, daß für jedes System von nicht übereinander greifenden Intervallen (a_k, b_k), deren Endpunkte zu E gehören,

$$\sum_{(k)} \Omega_k \leqq N$$

ist; hierbei deutet Ω_k die Oszillation von $F(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a_k, b_k) an.

Definition 15. Eine für $a \leqq x \leqq b$ definierte Funktion $F(x)$ ist *in* (a, b) *von beschränkter Variation* im verallgemeinerten Sinne* (abgekürzt: BVV*), wenn (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Teilmenge, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $F(x)$ von beschränkter Variation* ist.

Definition A_5. Wenn $\alpha(x)$ in (a, b) *stetig und BVV** ist, soll unter $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ eine gemäß Definition A zu einer *endlichen* Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante verstanden werden, welche außerdem den Bedingungen genügt: 4. mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge gehört zu jedem Punkte ξ von (a, b) ein positives $l(\xi)$ derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi - l(\xi), \xi]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\psi_\alpha^{(2)}(x) \leqq \psi_\alpha^{(2)}(\xi)$ ist; 5. in jedem Punkte x von (a, b), wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, gilt

$$\underline{D}_{\alpha(x); l_1} \psi_\alpha^{(2)}(x) \geqq f(x) \quad \text{und} \quad \overline{D}_{\alpha(x); l_2} \psi_\alpha^{(2)}(x) \leqq f(x),$$

so weit in dem Punkte x diese extremen Derivierten (in bezug auf (a, b)) existieren.

Definition B_5. Eine $\alpha(x)$-Minorante $\varphi_{\alpha(x)}^{(2)}(x)$ soll außer den in Definition B geforderten noch folgenden Bedingungen genügen: 4. zu jedem Punkte ξ von (a, b), abzählbar viele ausgenommen, gehört ein positives $m(\xi)$ derart, daß in jedem inneren Punkte x von $[\xi - m(\xi), \xi]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\varphi_\alpha^{(2)}(x) \geqq \varphi_\alpha^{(2)}(\xi)$ ist; 5. in jedem Punkte x von (a, b), wieder mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, gilt

$$\overline{D}_{\alpha(x); l_1} \varphi_\alpha^{(2)}(x) \leqq f(x) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x); l_2} \varphi_\alpha^{(2)}(x) \geqq f(x),$$

so weit in x diese extremen Derivierten existieren.

Definition 16 geht aus Definition 4 hervor, wenn man in dieser nur $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha^{(2)}(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(2)}(x)\}$ zuläßt; $\alpha(x)$ ist dabei somit in (a, b) *stetig und BVV**. Wir schreiben dann:

$$\Psi_\alpha^{(2)}(x) \equiv \overline{\int_a^x} (PS^{(2)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf} \quad \psi_\alpha^{(2)}(x)$$

und

$$\Phi_\alpha^{(2)}(x) \equiv \underline{\int_a^x} (PS^{(2)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup} \quad \varphi_\alpha^{(2)}(x),$$

während der gemeinsame Wert von $\Psi_\alpha^{(2)}(x)$ und $\Phi_\alpha^{(2)}(x)$ (falls dieser existiert) *das $\alpha^{(2)}$-Integral von $f(x)$ über (a, x)*, $S_\alpha^{(2)}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x)$, sein soll.

Definition 17. *$F(x)$ und $\alpha(x)$ seien endlich im abgeschlossenen Intervall (a, b); $\alpha(x)$ sei BV* auf der abgeschlossenen Teilmenge E von (a, b). Dann wird $F(x)$ auf E unterhalb totalstetig* [oberhalb totalstetig*] in bezug auf $\alpha(x)$* sein, wenn dieselben Ungleichheitsbedingungen wie in Definition 6 erfüllt sind[24]).

Satz 17. *Die stetige Funktion $\alpha(x)$ sei BVV* in (a, b). Wenn dann $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ eine gemäß Definition A_5 in (a, b) zu einer endlichwertigen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante ist, läßt (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge E, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k), auf deren jeder $\alpha(x)$ BV* und $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$[25]) ist.*

Das Beweisverfahren ist dasselbe wie beim Satz 5.

Satz 18. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und BVV*. Wenn dann $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ eine gemäß Definition B_5 in (a, b) zu der endlichwertigen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Minorante ist, läßt (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge G, überdecken durch abzählbar viele, perfekte Mengen (R_k), auf deren jeder $\alpha(x)$ BV* und $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$[26]) ist.*

Aus der Definition A_5 läßt sich ableiten, *daß eine $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ in den Punkten einer jeden perfekten Menge M, auf welcher $\alpha(x)$ BV* ist, eine Teilmenge vom V_{α_M}-Maß Null ausgenommen, eine endliche $\alpha(x)$-Ableitung (in bezug auf (a, b)) hat; hierbei ist $V_{\alpha_M}(x)$ die Totalvariation über (a, x) (bei $a \leqq x \leqq b$) der Funktion $\alpha_M(x)$, welche in a und b und in den Punkten von M*

---

[24]) Das kleinste, E enthaltende, abgeschlossene Intervall sei (c, d). Die in (c, d) definierte Funktion $\alpha_E(x)$ falle in den Punkten von E mit $\alpha(x)$ zusammen und ändere sich linear in den zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (c, d). Auch $T_E(x)$ sei definiert in (c, d), und zwar gleich

$$(a) \qquad V_{\alpha_E}(x) + \sum_{(j)}^{x} [\omega_\alpha(c_j, d_j) - \{V_{\alpha_E}(d_j) - V_{\alpha_E}(c_j)\}] + [\omega_\alpha(c_{j(x)}, x) - \{V_{\alpha_E}(x) - V_{\alpha_E}(c_{j(x)})\}];$$

hierbei bedeutet $V_{\alpha_E}(x)$ die Totalvariation von $\alpha_E(x)$ über (c, x) $(c \leqq x \leqq d)$ und $\omega_\alpha(c_j, d_j)$ die Oszillation von $\alpha(x)$ im abgeschlossenen, zu E komplementären Intervall (c_j, d_j); die Summation geschieht über diejenigen zu E komplementären Intervalle (c_j, d_j), für die $c \leqq c_j < d_j \leqq x$ ist, während das letzte Glied in (a) nur dann auftritt, wenn x innerer Punkt eines zu E komplementären Intervalles $(c_{j(x)}, d_{j(x)})$ ist. Mit Hilfe des in Fußnote [8]) enthaltenen Satzes läßt sich nun zeigen, daß *aus der Eigenschaft von $F(x)$ auf E unterhalb [oberhalb] totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ zu sein im Sinne der Definition 17, folgt, daß sie es auch ist in bezug auf $T_E(x)$, und umgekehrt.*

[25]) Hieraus folgt, daß $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ in (a, b) BVV* ist. Vgl. Fußnote [9]).

[26]) $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ ist dadurch BVV* in (a, b).

mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu M komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b)[27]). Jede $\alpha(x)$-Minorante $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ hat die gleiche Eigenschaft.

---

[27]) Der Beweis verläuft wie folgt. In allen Punkten von M, mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom V_{α_M}-Maß Null, existiert $D_{V_{\alpha_M}} \alpha_M(x)$ oder, in anderer Schreibweise, $\frac{d\,\alpha_M(x)}{d\,V_{\alpha_M}(x)}$, und ist entweder gleich $+1$ oder gleich -1 (siehe Lebesgue, loc. cit. [8]), S. 259, 260). Es läßt sich weiter zeigen, daß, wieder mit Ausnahme einer Menge vom V_{α_M} Maß Null, in den Punkten von M $\frac{d\,[\alpha(x) - \alpha_M(x)]}{d\,V_{\alpha_M}(x)} = 0$ ist (siehe unten). Dadurch folgt mit Definition A_5, daß auf M, ausgenommen in den Punkten einer Teilmenge vom V_{α_M}-Maß Null, $\frac{d\,\alpha(x)}{d\,V_{\alpha_M}(x)} = +1$ oder -1 ist und die extremen V_{α_M}-Derivierten von $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ von $-\infty$ verschieden sind. Daraus folgt dann, daß in den Punkten von M, mit Ausnahme einer Teilmenge vom V_{α_M}-Maß Null, eine endliche V_{α_M}-Ableitung und eine endliche $\alpha(x)$-Ableitung von $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ existiert [siehe Ridder, loc. cit. [1]), S. 134 (Satz III)]. — Wenn N eine abgeschlossene Teilmenge von (r, s) ist und in abzählbar vielen Punkten (t_n) von N, welche keine Endpunkte von komplementären Intervallen sind, eine positive Konstante A_n, in den zu N komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen (u_n) von (r, s) eine nicht-negative Konstante B_n definiert ist, so läßt sich in (r, s) eine Funktion $z(t)$ definieren:

$$z(t) = \sum_{(n)}^{t_a} A_n + \sum_{(n)}^{t_a} B_n;$$

die Summen sollen diejenigen A_n- bzw. B_n-Werte enthalten, die zu Punkten (t_n) bzw. zu abgeschlossenen Intervallen (u_n) gehören, welche ganz oder teilweise im abgeschlossenen Intervall (r, t) liegen. $z(t)$ ist in (r, s) monoton und fällt mit ihrer eigenen „fonctions des sauts" zusammen; sie hat somit in fast allen Punkten von (r, s), also auch in fast allen Punkten von N, eine Ableitung gleich Null. Gibt es nun in (r, s) eine Funktion $y(t)$, welche: 1. in den Punkten (t_n) mehrdeutig ist, während ihre Werte in t_n um weniger als A_n von Null abweichen; 2. in jedem abgeschlossenen Intervall u_n, ohne da notwendig eindeutig zu sein, den Wert Null annimmt und eine Oszillation B_n hat, und: 3. gleich Null ist in den übrigen Punkten von (r, s), so folgt aus dem Vorigen, daß in fast allen Punkten von N die rechte Ableitung von $y(t)$ existiert und gleich Null ist; $y(t)$ wird dadurch auch in fast allen Punkten von N eine (beiderseitige) Ableitung gleich Null haben [siehe Ridder, loc. cit [1]), S. 135 (Fußnote [15]))]. Daraus folgt jedoch leicht die oben gegebene Behauptung über $\frac{d\,[\alpha(x) - \alpha_M(x)]}{d\,V_{\alpha_M}(x)}$. Man hat dazu nur mittels $t = V_{\alpha_M}(x)$ das Intervall (a, b) der x-Achse auf ein Intervall $(r, s) \equiv [V_{\alpha_M}(a), V_{\alpha_M}(b)]$ der t-Achse abzubilden, wobei $\alpha(x) - \alpha_M(x)$ in eine Funktion $y(t)$ der eben angegebenen Art übergeht.

Damit läßt sich beweisen der

Satz 19. *Jedes unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(2)}(x)$ einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) stetig und BVV* ist, hat in den Punkten einer willkürlichen perfekten Menge M, auf welcher $\alpha(x)$ BV* ist, eine $\alpha(x)$-Ableitung gleich $f(x)$, die Punkte einer Teilmenge vom V_{α_M}-Maß Null ausgenommen; $V_{\alpha_M}(x)$ ist die Totalvariation über (a, x) (bei $a \leqq x \leqq b$) der Funktion $\alpha_M(x)$, welche in a und b und in den Punkten von M mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu M komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b).*

Der Beweis verläuft wie der des Satzes 7 [28]).

§ 10.

Definition 18. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *stetig und BVV** ist, hat die in (a, b) *endliche* Funktion $f(x)$ daselbst *ein unbestimmtes (spezielles Denjoy-Stieltjessches) $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(2^*)}(x)$, falls $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat: 1. $S_\alpha^{(2^*)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ ist stetig in (a, b); 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß *auf jedem P_k $\alpha(x)$ BV* und $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$* [29]) ist; 4. wenn zu jeder in 3. genannten Menge P_k $\alpha_{P_k}(x)$ eine in (a, b) definierte Funktion ist, welche in a und b und in den Punkten von P_k mit $\alpha(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b), und $V_{\alpha_{P_k}}(x)$ die Totalvariation von $\alpha_{P_k}(x)$ über (a, x) darstellt $(a \leqq x \leqq b)$, ist die $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ gleich $f(x)$ in allen zu P_k gehörenden Punkten ihrer Existenzmenge [30]), eine Teilmenge vom $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null ausgenommen.

---

[28]) Siehe auch Fußnote [27]).

[29]) Das soll heißen: $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ ist auf P_k sowohl oberhalb wie unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$. Vgl. Fußnote [24]).

[30]) Diejenigen Punkte von P_k, in welchen es keine endliche $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ gibt, bilden eine Menge vom $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null. Dies läßt sich in folgender Weise zeigen. $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ ist BV* auf jeder Menge P_k. Nun gilt in den Punkten einer derartigen Menge, die Punkte einer Teilmenge vom $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null ausgenommen, folgendes: 1. für die Funktion $F_{P_k}(x)$, welche in den Punkten von P_k und in a und b mit $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b), existiert eine endliche Ableitung $\frac{d F_{P_k}(x)}{d V_{\alpha_{P_k}}(x)}$ [siehe loc. cit. [1]),

Satz 20. *Die Integraldefinitionen* 16 *und* 18 *sind einander äquivalent.*

Beweis. Wenn das Integral $S_\alpha^{(2)}(x)$ für die endliche Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) stetig und BVV^* ist, existiert, gibt es eine Folge von $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_{\alpha;k}^{(2)}(x)\}$ und eine Folge von $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_{\alpha;k}^{(2)}(x)\}$, adjungiert zu $f(x)$ gemäß den Definitionen A_5 bzw. B_5, für die

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{\alpha;k}^{(2)}(b) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{\alpha;k}^{(2)}(b) = S_\alpha^{(2)}(b)$$

ist.

Nach den Sätzen 17 und 18 läßt (a, b) sich überdecken durch eine abzählbare Menge H und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_j), derartig, daß $\alpha(x)$ BV*-, $\psi_{\alpha;1}^{(2)}(x)$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$- und $\varphi_{\alpha;1}^{(2)}(x)$ oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ ist auf einer jeden der Mengen (P_j).

Für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ wächst die Differenz $\psi_{\alpha;k}^{(2)}(x) - \varphi_{\alpha;1}^{(2)}(x)$ in (a, b) monoton; somit auch $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x) - \varphi_{\alpha;1,j}^{(2)}(x)$, wobei $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x)$ und $\varphi_{\alpha;1,j}^{(2)}(x)$ in den Punkten der perfekten Menge P_j und in a und b mit $\psi_{\alpha;k}^{(2)}(x)$ bzw. mit $\varphi_{\alpha;1}^{(2)}(x)$ zusammenfallen und sich linear ändern in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b). Da $\varphi_{\alpha;1}^{(2)}(x)$ auf der Menge P_j oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ ist, ist $\varphi_{\alpha;1,j}^{(2)}(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation; somit auch $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x)$ als Summe von zwei Funktionen von beschränkter Variation.

Aus Satz 17 folgt, daß $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x)$ auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Teilmengen $\{Q_{k,j}^{(p)}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ von P_j, welche P_j bis auf eine abzählbare Menge überdecken, unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ ist. Sie ist es somit auf jeder Menge $Q_{k,j}^{(p)}$ auch in bezug auf die Funktion $T_{P_j}(x)$, die im kleinsten, abgeschlossenen, P_j enthaltenden Intervall (c_j, d_j) definiert ist und in gleicher Weise aus $\alpha(x)$ und P_j abgeleitet ist wie in Fußnote [24]) $T_E(x)$ aus $\alpha(x)$ und E. Da $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x)$, wie aus Definition A_5 hervorgeht, außerdem in jedem zu P_j komplementären Teilintervall, in welchem $T_{P_j}(x)$, und somit auch $\alpha(x)$, konstant ist, monoton zunimmt, folgt aus der Theorie der totaladditiven Mengenfunktionen[31]), unter Anwendung einer mittels der Funktion $t = T_{P_j}(x)$ hervorgebrachten Abbildung des Intervalls (c_j, d_j) auf ein Intervall der t-Achse, daß die auf P_j zu $\psi_{\alpha;k,j}^{(2)}(x)$ gehörende, total-

---

S. 135 (Fußnote [13]))], 2. es existiert $\dfrac{d\,[S_\alpha^{(2^*)}(x) - F_{P_k}(x)]}{d\,V_{\alpha P_k}(x)}$ und ist gleich Null [vgl. Fußnote [27])] ,3. $\dfrac{d\alpha(x)}{d\,V_{\alpha P_k}(x)} = +1$ oder -1 [siehe Fußnote [27])]. Daraus folgt die Behauptung.

[31]) Siehe de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc. (2e Éd. 1934), Chap. 6. insbesondere S. 91. Vgl. auch Ridder, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 195.

additive Mengenfunktion $\psi^{(2)}_{\alpha;\,k,j}(e)$ einen nicht-negativen (totaladditiven) singulären Bestandteil in bezug auf die zu $T_{P_j}(x)$ gehörende totaladditive Mengenfunktion $T_{P_j}(e)$ hat. Daher ist $\psi^{(2)}_{\alpha;\,k,j}(x)$ in (c_j, d_j) unterhalb totalstetig* in bezug auf $T_{P_j}(x)$; sie ist es somit auch auf der Menge P_j.

Aus der Monotonie von $\psi^{(2)}_{\alpha;\,k}(x) - \varphi^{(2)}_{\alpha;\,1}(x)$ in (c_j, d_j) und der Betrachtung der Oszillationen von $\psi^{(2)}_{\alpha;\,k}(x)$ und von der auf P_j in bezug auf $\alpha(x)$ und $T_{P_j}(x)$ oberhalb totalstetigen* Funktion $\varphi^{(2)}_{\alpha;\,1}(x)$ in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (c_j, d_j) folgt nun, daß auch $\psi^{(2)}_{\alpha;\,k}(x)$ auf P_j unterhalb totalstetig* in bezug auf $T_{P_j}(x)$ ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß jede Minorante $\varphi^{(2)}_{\alpha;\,k}(x)$ auf P_j oberhalb totalstetig* in bezug auf $T_{P_j}(x)$ ist.

$S^{(2)}_{\alpha}(x)$ muß auf jedem P_j totalstetig* in bezug auf die zugehörige Funktion $T_{P_j}(x)$ (und somit, nach Fußnote [24]), auch in bezug auf $\alpha(x)$) sein. Sonst existierte für eine dieser Mengen, $P_{j'}$, eine z. B. positive Zahl Δ und eine Folge von Mengen (M_n), welche jede für sich von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden, abgeschlossenen Intervallen $(a^{(n)}_p, a^{(n)}_{p+1})$ gebildet würden, deren Endpunkte zu $P_{j'}$ gehörten und so, daß es Punkte $(x^{(n)}_p)$ in den zugehörigen Intervallen $(a^{(n)}_p, a^{(n)}_{p+1})$ gäbe, für die gleichzeitig

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{(p)} [S^{(2)}_{\alpha}(x^{(n)}_p) - S^{(2)}_{\alpha}(a^{(n)}_p)] = \Delta \text{ und } \lim_{n\to\infty} \sum_{(p)} [T_{P_{j'}}(a^{(n)}_{p+1}) - T_{P_{j'}}(a^{(n)}_p)] = 0$$

wäre.

$\varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(x)$ sei eine Funktion der Folge $\{\varphi^{(2)}_{\alpha;\,k}(x)\}$ mit

$$S^{(2)}_{\alpha}(b) - \varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(b) < \tfrac{1}{2}\,\Delta.$$

Da $S^{(2)}_{\alpha}(x) - \varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(x)$ in (a, b) wächst, ist bei willkürlich, aber fest gewähltem n

$$(4)\quad \sum_{(p)} [S^{(2)}_{\alpha}(x^{(n)}_p) - S^{(2)}_{\alpha}(a^{(n)}_p)] - \sum_{(p)} [\varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(x^{(n)}_p) - \varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(a^{(n)}_p)] \leqq S^{(2)}_{\alpha}(b) - \varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(b) < \tfrac{1}{2}\,\Delta.$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{(p)} [\varphi_{\alpha;\,k'}(x^{(n)}_p) - \varphi_{\alpha;\,k'}(a^{(n)}_p)] > \tfrac{1}{2}\,\Delta.$$

Da $\varphi^{(2)}_{\alpha;\,k'}(x)$ auf $P_{j'}$ oberhalb totalstetig* in bezug auf $T_{P_{j'}}(x)$ ist, gelangen wir zu einem Widerspruch.

Auch ein negativer Wert von Δ ist unmöglich. $S^{(2)}_{\alpha}(x)$ ist somit auf jedem P_j totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$.

Mit Satz 20 folgt hieraus, daß $S^{(2)}_{\alpha}(x)$ für die Funktion $f(x)$ auch den Bedingungen der Definition 18 genügt.

Wenn umgekehrt bekannt ist, daß $f(x)$ über (a, b) $\alpha(x)$-integrierbar nach der Definition 18 ist, so kann man, nach dem Verfahren, welches

Denjoy bei dem konstruktiven Aufbau seines Integrals anwandte[32]), das Intervall (a, b) zerlegen in eine abzählbare Menge und eine wohlgeordnete Folge von perfekten Mengen, deren Anzahl abzählbar ist und welche u. a. folgende Eigenschaft haben. Wenn für eine dieser Mengen, E_γ, die in bezug auf das Intervall (a, b) komplementäre Menge $C(E_\gamma)$ gebildet wird von den offenen Intervallen $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$, so gibt es eine auf E_γ nirgends dichte, abgeschlossene Teilmenge $M_{\gamma+1}$ derart, das jeder Punkt ξ von $E_\gamma - M_{\gamma+1}$ innerer Punkt eines abgeschlossenen Intervalls (r, s) ist, dessen Endpunkte zu E_γ gehören und dessen Durchschnitt mit E_γ Teilmenge einer nach Definition 18 auftretenden Menge $P_\varkappa$ ist, woraus folgt, daß das Integral $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ von $f(x)$ auf (r, s) . E_γ totalstetig* in bezug auf die zur Menge $P_\varkappa$ gemäß Fußnote [24]) gehörende Funktion $T_{P_\varkappa}(x)$ ist. Die Oszillationen (Ω_j) von $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ in den Teilintervallen $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ von (c, d) bilden eine konvergente Reihe. $E_{\gamma+1}$ ist der perfekte Kern von $M_{\gamma+1}$.

Wir nehmen an, daß es möglich sei, für jedes im Innern eines derartigen $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ liegende, abgeschlossene Intervall (p, q) eine nicht-negative, monoton zunehmende Funktion $v^{(p,q)}(x)$ zu bestimmen, mit beliebig kleiner oberer Schranke, welche, zu $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(p)$ addiert, eine in (p, q) zu $f(x)$ gemäß Definition A_5 adjungierte $\alpha(x)$-Majorante liefert. Wir wählen Punkte $\{a_{j,k}^{(\gamma)}\}$, $\{b_{j,k}^{(\gamma)}\}$ derartig, daß

$$a_{j,0}^{(\gamma)} = b_{j,0}^{(\gamma)} = \tfrac{1}{2}(a_j^{(\gamma)} + b_j^{(\gamma)});$$

$$a_j^{(\gamma)} < a_{j,k+1}^{(\gamma)} < a_{j,k}^{(\gamma)} < b_{j,k}^{(\gamma)} < b_{j,k+1}^{(\gamma)} < b_j^{(\gamma)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

und

$$\lim_{k \to \infty} a_{j,k}^{(\gamma)} = a_j^{(\gamma)}, \quad \lim_{k \to \infty} b_{j,k}^{(\gamma)} = b_j^{(\gamma)}$$

ist.

In jedem Intervall $(a_{j,k+1}^{(\gamma)}, a_{j,k}^{(\gamma)})$ existiert eine Funktion $v^{(a_{j,k+1}^{(\gamma)}, a_{j,k}^{(\gamma)})}(x)$, welche nicht-negativ und monoton zunehmend, jedoch immer kleiner als $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ ist und welche, zu $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_{j,k+1}^{(\gamma)})$ addiert, eine zu $f(x)$ nach Definition A_5 adjungierte $\alpha(x)$-Majorante liefert; auch in einem Intervall $(b_{j,k}^{(\gamma)}, b_{j,k+1}^{(\gamma)})$ existiert eine nicht-negative und monoton zunehmende Funktion $v^{(b_{j,k}^{(\gamma)}, b_{j,k+1}^{(\gamma)})}(x)$, die kleiner als $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ ist und, zu $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(b_{j,k}^{(\gamma)})$ addiert, eine zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante liefert.

Man sieht sofort, daß

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} v^{(a_{j,k+1}^{(\gamma)}, a_{j,k}^{(\gamma)})}(a_{j,k}^{(\gamma)}) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v^{(b_{j,k}^{(\gamma)}, b_{j,k+1}^{(\gamma)})}(b_{j,k+1}^{(\gamma)})$$

konvergente Reihen sind.

---

[32]) Siehe z. B. Hobson, loc. cit. [2]), S. 694—697.

Wir definieren nun eine Funktion, gleich Null in $a_j^{(\gamma)}$, gleich der Summe von $S_\alpha^{(2^*)}(b_j^{(\gamma)}) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)})$ und der beiden Reihen (5) in $b_j^{(\gamma)}$, daneben für $a_{j,n+1}^{(\gamma)} \leqq x < a_{j,n}^{(\gamma)}$ $(n \geqq 0)$ gleich

$$S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^{\left(a_{j,k+1}^{(\gamma)}, a_{j,k}^{(\gamma)}\right)}(a_{j,k}^{(\gamma)}) + v^{\left(a_{j,n+1}^{(\gamma)}, a_{j,n}^{(\gamma)}\right)}(x),$$

und für $b_{j,n}^{(\gamma)} \leqq x < b_{j,n+1}^{(\gamma)}$ $(n \geqq 0)$ gleich

$$S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)}) + \sum_{k=0}^{\infty} v^{\left(a_{j,k+1}^{(\gamma)}, a_{j,k}^{(\gamma)}\right)}(a_{j,k}^{(\gamma)}) + \sum_{k=0}^{n-1} v^{\left(b_{j,k}^{(\gamma)}, b_{j,k+1}^{(\gamma)}\right)}(b_{j,k+1}^{(\gamma)}) + v^{\left(b_{j,n}^{(\gamma)}, b_{j,n+1}^{(\gamma)}\right)}(x).$$

Die auf diese Weise für $a_j^{(\gamma)} \leqq x \leqq b_j^{(\gamma)}$ definierte Funktion ist eine in $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ zu $f(x)$ gemäß Definition A_5 adjungierte $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2);(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})}(x)$, welche in jedem Punkte von $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ größer ist als, jedoch um weniger als 2ε abweicht von $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)})$.

Die für $r \leqq x \leqq s$ definierte Funktion

$$H_{(r,s)}^{(\gamma)}(x) \equiv S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(r) - \sum_{(j)}^{x}{}_r [S_\alpha^{(2^*)}(b_j^{(\gamma)}) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)})] - [S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_{j(x)}^{(\gamma)})],$$

wobei die Summation erstreckt wird über diejenigen zu E_γ komplementären, abgeschlossenen Teilintervalle von (r, s), welche ganz zum abgeschlossenen Intervall (r, x) gehören, und die letzte Differenz nur vorkommt, wenn x innerer Punkt eines komplementären Intervalles $(a_{j(x)}^{(\gamma)}, b_{j(x)}^{(\gamma)})$ ist, ist in (r, s) totalstetig* in bezug auf $T_{P_\varkappa}(x)$. Aus Definition 18 folgt[32]), daß in den Punkten von $(r, s) \cdot E_\gamma$, diejenigen einer Teilmenge vom $T_{P_\varkappa}$-Maß Null ausgenommen, entweder

$$\text{(6a)} \qquad \frac{d\alpha(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = +1, \quad \frac{dH_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = \frac{dS_\alpha^{(2^*)}(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = +f(x),$$

oder

$$\text{(6b)} \qquad \frac{d\alpha(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = -1, \quad \frac{dH_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = \frac{dS_\alpha^{(2^*)}(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)} = -f(x)$$

ist. $H_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)$ ist somit das Lebesgue-Stieltjessche Integral über (r, x) in bezug auf $T_{P_\varkappa}(x)$ einer Funktion $g_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)$, welche in den Punkten von $(r, s) \cdot E_\gamma$, für die (6a) oder (6b) gilt, gleich $\frac{dH_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)}{dT_{P_\varkappa}(x)}$ und in den übrigen Punkten von (r, s) gleich Null ist. Durch Addition einer in (r, s) nicht-negativen und monoton zunehmenden Funktion, deren obere Schranke kleiner als η ist (η willkürlich positiv), läßt sich in diesem Intervall eine zu $g_{(r,s)}^{(\gamma)}(x)$ gemäß Definition A_1 adjungierte $T_{P_\varkappa}$-Majorante, $\mathfrak{M}_{T_{P_\varkappa}(x)}^{(\gamma);(r,s)}(x)$, konstruieren, welche eine $T_{P_\varkappa}(x)$-Ableitung $= +\infty$ hat in denjenigen Punkten von $(c, d) \cdot E_\gamma$,

[32]) Vgl. Fußnote [27]).

in welchen (6a) und (6b) nicht gelten und in deren jeder Umgebung $T_{P_\varkappa}(x)$ außerdem auf keiner Seite konstant ist[34]).

In jedem Intervall $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ ist nach dem Vorigen die $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2);\,(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})}(x)$ (gemäß Definition A_5) so zu wählen, daß sie von $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a_j^{(\gamma)})$ um weniger als $\eta/2^j$ abweicht. Es läßt sich dann eine natürliche Zahl J angeben derart, daß

$$\sum_{j=J}^{\infty} \Omega(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)}) < \eta$$

ist; hierbei bedeutet $\Omega(a_j^{(\gamma)}, x)$ die Oszillation von $\psi_\alpha^{(2);\,(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})}(x)$ im Intervall $(a_j^{(\gamma)}, x)$.

In den abgeschlossenen Intervallen $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$ definieren wir nun Funktionen $\{N_j^{(\gamma)}(x)\}$; wir nehmen für jedes $j < J$

$$N_j^{(\gamma)}(x) = \psi_\alpha^{(2);\,(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})}(x),$$

für jedes j der übrigen Intervalle

$$N_j^{(\gamma)}(x) = \Omega(a_j^{(\gamma)}, x) + \psi_\alpha^{(2);\,(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})}(x).$$

Definieren wir schließlich im abgeschlossenen Intervall (r, s)

$$\psi_\alpha^{(2);\,(r,s)}(x) = \mathfrak{M}_{T_{P_\varkappa}(x)}^{(\gamma);\,(r,s)}(x) + \sum_{(j)}^{x_r} N_j^{(\gamma)}(b_j^{(\gamma)}) + N_{j_{(x)}}^{(\gamma)}(x),$$

wobei die Summation erstreckt wird über diejenigen abgeschlossenen Intervalle $(a_j^{(\gamma)}, b_j^{(\gamma)})$, welche zum abgeschlossenen Intervall (a, x) gehören, und das Glied $N_{j_{(x)}}^{(\gamma)}(x)$ nur vorkommt, wenn x innerer Punkt eines zugehörigen Intervalles $(a_{j_{(x)}}^{(\gamma)}, b_{j_{(x)}}^{(\gamma)})$ ist. Diese Funktion ist eine zu $f(x)$ gemäß Definition A_5 adjungierte $\alpha(x)$-Majorante, und es ist in (r, s)

$$0 \leqq \psi_\alpha^{(2);\,(r,s)}(x) - [S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(a)] < 3\eta.$$

Man sieht nun leicht, daß es in abgeschlossenen Intervallen (m, n), deren innere Punkte zu der in bezug auf (a, b) komplementären Menge $C(M_{\gamma+1})$ gehören, $\alpha(x)$-Majoranten $\psi_{\alpha_{(x)}}^{(2)}(x)$ gibt, welche beliebig wenig von $S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(m)$ abweichen. Dasselbe gilt also auch für abgeschlossene Intervalle, deren innere Punkte gehören zu der in bezug auf (a, b) komplementären Menge des perfekten Kernes $P_{\gamma+1}$ von $M_{\gamma+1}$.

Die Menge M_1 besitze die Eigenschaft, daß ihre Komplementärmenge $C(M_1)$ alle Punkte von (a, b) enthält, zu welchen es eine Umgebung (u, v) gibt, welche Teilmenge einer der in Definition 18 (Bedingung 3) auftretenden, perfekten Mengen (P_k) ist; in einer derartigen Umgebung ist $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ somit

---

[34]) Die Möglichkeit einer derartigen Konstruktion folgt aus de la Vallée Poussin, loc. cit. [31]), S. 78—81.

totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ und in bezug auf die (im Sinne von Fußnote [24]) zugehörige Funktion $T_{P_k}(x)$. Dann lassen sich, ausgehend von den Majoranten $\mathfrak{M}^{(0);(u,v)}_{T_{P_k}(x)}(x)$, in den abgeschlossenen, zu M_1 komplementären Intervallen (m, n) $\alpha(x)$-Majoranten $\psi^{(2);(m,n)}_{\alpha}(x)$ konstruieren, welche beliebig wenig größer sind als $S^{(2^*)}_{\alpha}(x) - S^{(2^*)}_{\alpha}(m)$. Derartige $\alpha(x)$-Majoranten existieren somit auch für die abgeschlossenen Intervalle, welche komplementär sind zu dem perfekten Kern P_1 von M_1. Da es eine Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse gibt, für die P_γ leer ist, führt das Vorhergehende, mittels transfiniter Induktion, zur Existenz von $\alpha(x)$-Majoranten $\psi^{(2)}_{\alpha}(x)$ in (a, b), welche beliebig wenig von $S^{(2^*)}_{\alpha}(x)$ abweichen.

Obige Konstruktion, angewandt auf die Funktion $-f(x)$, führt zu $\alpha(x)$-Majoranten, deren entgegengesetzte Werte in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Minoranten im Sinne der Definition B_5 liefern, welche beliebig wenig von $S^{(2^*)}_{\alpha}(x)$ abweichen. Daher ist $S^{(2^*)}_{\alpha}(x)$ auch $\alpha(x)$-Integral von $f(x)$ im Sinne der Definition 16.

§ 11.

Definition 19. $\alpha(x)$ sei in (a, b) *stetig und BVV**; zu einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), auf welcher $\alpha(x)$ *BV** ist und welche sämtlich (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken, konstruieren wir wie in Definition 18 (Bedingung 4) die Funktionen $\alpha_{P_k}(x)$ und $V_{\alpha_{P_k}}(x)$. Nun wird *eine Funktion $f(x)$, welche in (a, b) endlich ist, ausgenommen in den Punkten einer Menge E, für die das $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß von $E \cdot P_k$ immer Null ist* $(k = 1, 2, \ldots)$, in (a, b) *ein unbestimmtes $\alpha^{(2)}$-Integral*, $\int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x)$, haben, wenn die Funktion

$$f^*(x) = f(x) \text{ in den Punkten von } (a, b), \text{ in welchen } f(x) \text{ endlich ist,}$$
$$= 0 \text{ in den übrigen Punkten von } (a, b),$$

in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(2)}$-Integral gemäß Definition 16 hat. Wir setzen dann:

$$\int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(2)})\, f^*(x)\, d\alpha(x).$$

In analoger Weise wie Satz 10 läßt sich beweisen:

Satz 21. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) stetig und BVV*; P_k, $\alpha_{P_k}(x)$, $V_{\alpha_{P_k}}(x)$ mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Definition 19. Dann sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, welche nur unendlich werden oder voneinander verschieden sein können auf einer Menge E mit $m_{V_{\alpha_{P_k}}}(E \cdot P_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, entweder*

beide $\alpha^{(2)}$-integrierbar über (a, b) oder nicht. Im Falle der $\alpha^{(2)}$-Integrierbarkeit wird für jedes x von (a, b)

$$\int_a^x (PS^{(2)})\ f(x)\ d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(2)})\ g(x)\ d\alpha(x)$$

sein.

§ 12.

Definition A_6. $\alpha(x)$ sei in (a, b) *endlich und BVV** [35]). Eine in (a, b) zu der *endlichen* Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ soll endlich sein und daneben den folgenden Bedingungen genügen: 1. $\psi_\alpha^{(2)}(a) = 0$; 2. auf jeder Teilmenge E von (a, b), welche einen willkürlichen, nicht unter 4b oder 4b* fallenden Punkt ξ von (a, b) zum linksseitigen bzw. rechtsseitigen Häufungspunkt hat ohne selbst diesen Punkt zu enthalten, existiert ein endlicher Grenzwert $\lim_{x \to \xi;\ x \in E} \psi_\alpha^{(2)}(x)$, sobald $\lim_{x \to \xi;\ x \in E} \alpha(x)$ existiert; außerdem ist $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ auf $E + (\xi)$ stetig in ξ, wenn $\alpha(x)$ es ist; 3a. zu jedem Stetigkeitspunkte ξ von $\alpha(x)$, abzählbar viele ausgenommen, gehört ein positives $l(\xi)$ derart, daß in jedem zu (a, b) gehörenden, inneren Punkt x von $[\xi - l(\xi),\ \xi + l(\xi)]$ mit $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ immer $\psi_\alpha^{(2)}(x) \leqq \psi_\alpha^{(2)}(\xi)$ oder $\geqq \psi_\alpha^{(2)}(\xi)$ ist, je nachdem $x \leqq \xi$ oder $\geqq \xi$ ist; 3b. in den Stetigkeitspunkten (ξ) von $\alpha(x)$, eine abzählbare Teilmenge ausgenommen, ist

$$\underline{D}_{\alpha(x);\, l_1} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \geqq f(\xi);\ \overline{D}_{\alpha(x);\, l_2} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \leqq f(\xi),$$

und

$$\underline{D}_{\alpha(x);\, r_1} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \geqq f(\xi);\ \overline{D}_{\alpha(x);\, r_2} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \leqq f(\xi),$$

soweit diese extremen $\alpha(x)$-Derivierten in bezug auf (a, b) existieren; 4a. auf jeder Teilmenge P von (a, b), welche einen zu ihr gehörenden Punkt ξ entweder zum linksseitigen oder zum rechtsseitigen Häufungspunkt hat, während $\alpha(x)$ in ξ auf der Menge $P - (\xi)$ einen von $\alpha(\xi)$ verschiedenen, endlichen Grenzwert hat, gilt immer

(7a) $$\underline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, l_1} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \geqq f(\xi);\ \overline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, l_2} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \leqq f(\xi),$$

bzw.

(7b) $$\underline{D}^{(P}_{\alpha(x);\, r_1} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \geqq f(\xi);\ \overline{D}^{(P)}_{\alpha(x);\, r_2} \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \leqq f(\xi),$$

so weit in einem solchen Punkte die hier auftretenden extremen $\alpha(x)$-Derivierten existieren; 4b. [4b.*] zu jedem Punkte $\xi \neq a$ $[\xi \neq b]$, welcher linksseitiger [rechtsseitiger] Häufungspunkt einer Teilmenge von (a, b) ist,

---

[35]) Die Menge der Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ ist abzählbar.

auf der in ξ ein unendlicher Grenzwert von $\alpha(x)$ existiert, gehört ein Intervall mit dem rechten [linken] Endpunkt ξ, für dessen innere Punkte (x)

$$\psi_\alpha^{(2)}(\xi) - \psi_\alpha^{(2)}(x) \geqq f(\xi) \cdot \{\alpha(\xi) - \alpha(x)\}$$
$$[\text{bzw. } \psi_\alpha^{(2)}(x) - \psi_\alpha^{(2)}(\xi) \geqq f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}]$$

ist[36]).

Definition B_6 der zu $f(x)$ adjungierten $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(2)}(x)\}$ bei $\alpha(x)$ *endlich und BVV** in (a, b) geht in analoger Weise auf Definition B_5 hervor wie Definition A_6 aus Definition A_5.

Satz 22 [Satz 23]. *$\alpha(x)$ sei in (a, b) endlich und BVV*. Wenn dann $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ [$\varphi_\alpha^{(2)}(x)$] eine gemäß Definition A_6 [Definition B_6] in (a, b) zu einer endlichen Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante [$\alpha(x)$-Minorante] ist, läßt (a, b) sich, bis auf eine abzählbare Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) [(R_k)], auf deren jeder $\alpha(x)$ BV*, und $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ BV* und unterhalb totalstetig** [$\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ *BV* und oberhalb totalstetig**] *in bezug auf $\alpha(x)$ ist*[37]).

Beweis (von Satz 22). Nach Definition A_6 läßt (a, b) sich bis auf eine abzählbare Menge überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (M_k), auf deren jeder $\alpha(x)$ *BV** ist. Zu den Stetigkeitspunkten (x) von $\alpha(x)$, die zu einer willkürlich, aber fest gewählten Menge M_k gehören, lassen sich, vielleicht abzählbar viele Punkte ausgenommen, natürliche Zahlen $\{n(x)\}$ angeben derart, daß aus $0 < x' - x < \frac{1}{n(x)}$

$$\psi_\alpha^{(2)}(x') - \psi_\alpha^{(2)}(x) \geqq -n(x) \cdot |\alpha(x') - \alpha(x)| \tag{8}$$

folgt und aus $0 > x' - x > -\frac{1}{n(x)}$

$$\psi_\alpha^{(2)}(x) - \psi_\alpha^{(2)}(x') \geqq -n(x) \cdot |\alpha(x') - \alpha(x)|. \tag{9}$$

Bei festem n sei $Q_{k,n}$ die Menge der Punkte von M_k, in welchen (8) und (9) unter den angegebenen Bedingungen gelten. Zu jedem n gehören endlich viele, abgeschlossene Intervalle $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ (wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von $Q_{k,n}$ enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen $(Q_{k,n,i})$ von $Q_{k,n}$ mit derartigen Intervallen. Nun nimmt die Funktion $\chi(x) \equiv \psi_\alpha^{(2)}(x) + n \cdot T_{M_k}(x)$, wobei die Funktion $T_{M_k}(x)$ konstruiert wird gemäß Fußnote [24]), auf $Q_{k,n,i}$ monoton zu, während ihre Werte in den inneren Punkten eines Intervalles (x_1, x_2), dessen Endpunkte zu $Q_{k,n,i}$ gehören, im abgeschlossenen Intervall $[\chi(x_1), \chi(x_2)]$ liegen.

---

[36]) Gemeint wird hier, daß jede Majorante den *beiden* Bedingungen 4b, 4b* genügen soll. — Wenn $\alpha(x)$ in (a, b) BV ist, geht Definition A_7 in die Definition A_3 über.

[37]) $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ und $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ sind dadurch BVV* in (a, b).

$\psi_\alpha^{(2)}(x)$ ist auf der abgeschlossenen Hülle $H_{k,n,i}$ von $Q_{k,n,i}$ unterhalb totalstetig* in bezug auf $T_{M_k}(x)$ [38]; sie ist es daselbst [nach Fußnote [24])] auch in bezug auf $\alpha(x)$. Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes.

Aus der Definition A_6 läßt sich ableiten, *daß eine $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ in den Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, die zu einer perfekten Menge M gehören, auf welcher $\alpha(x)$ BV* ist, eine endliche $\alpha(x)$-Ableitung (in bezug auf (a, b)) hat, außer vielleicht in den Punkten einer Teilmenge vom V_{α_M}-Maß Null; hierbei hat $V_{\alpha_M}(x)$ die schon früher* (§ 9) *angegebene Bedeutung* [39]. *Jede $\alpha(x)$-Minorante $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ hat die gleiche Eigenschaft.*

Satz 24. *Ist $\alpha(x)$ endlich und BVV* in (a, b) und sind $\psi_\alpha^{(2)}(x)$, $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ α-Majorante und α-Minorante einer endlichen Funktion $f(x)$, so nimmt $\psi_\alpha^{(2)}(x) - \varphi_\alpha^{(2)}(x)$ monoton zu.*

Beweis. Für die Punkte von (a, b) sei $\omega(x) = \psi_\alpha^{(2)}(x) - \varphi_\alpha^{(2)}(x)$. Wenn die Menge E der Punkte von (a, b), in deren jeder Umgebung Punkte x' und x'' mit $x' < x''$ und $\omega(x') > \omega(x'')$ liegen, nicht leer ist, so ist sie abgeschlossen. E ist dann sogar perfekt. Denn jeder Punkt ξ von E ist zugleich Häufungspunkt von E; es genügt hierfür zu zeigen, daß eine willkürliche Umgebung $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_2)$ einen von ξ verschiedenen Punkt von E enthält. Nur folgende Fälle sind möglich: 1. es gibt zwei Punkte x_1, x_2 entweder mit $\xi < x_1 < x_2 < \xi + \delta_2$ oder mit $\xi - \delta_1 < x_1 < x_2 < \xi$, während daneben $\omega(x_1) > \omega(x_2)$ ist; dann liefert fortgesetzte Halbierung von (x_1, x_2) einen von ξ verschiedenen, zu E gehörenden Grenzpunkt; 2. es gibt einen Punkt x_3 mit $\xi < x_3 < \xi + \delta_2$ und $\omega(\xi) > \omega(x_3)$; sowohl im Falle daß $\alpha(x)$, und somit nach Definition A_6 (Bedingung 2) und Definition B_6 auch $\omega(x)$, rechtsseitig stetig ist in ξ, wie auch im Falle, daß $\alpha(x)$ in ξ rechtsseitig unstetig ist, und somit in ξ eine der Bedingungen 4a, 4b (b*) von Definition A_6 und eine damit parallel laufende Bedingung der Definition B_6 erfüllt ist, gibt es einen Punkt x_4 mit $\xi < x_4 < x_3$ und $\omega(x_4) > \omega(x_3)$; damit ist dieser Fall auf Fall 1 zurückgeführt; 3. es gibt einen Punkt x_5 mit $\xi - \delta_1 < x_5 < \xi$ und $\omega(x_5) > \omega(\xi)$; auch dies läßt sich wieder auf Fall 1 zurückführen.

In jedem zu E komplementären, abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) nimmt $\omega(x)$ monoton zu; also wird jedes Stück von E Punkte ξ', ξ'' enthalten, für die gleichzeitig $\xi' < \xi''$ und $\omega(\xi') > \omega(\xi'')$ ist.

Es gibt ein Stück σ von E, auf welchem eine der nach Satz 22 auftretenden Mengen (P_k) und eine der nach Satz 23 auftretenden Mengen (R_k) überall dicht liegen. Die Funktion $\omega_\sigma(x)$, welche in den zu σ komplementären, ab-

---

[38]) Vgl. den Beweis von Satz 11.

[39]) Zum Beweis vergleiche man Fußnote [27]); siehe dabei auch Ridder, loc. cit. [1]), S. 135 [Fußnote [13])].

geschlossenen Teilintervallen des kleinsten, abgeschlossenen, σ enthaltenden Intervalls $u \equiv (c, d)$ sich linear ändert und in den Punkten von σ mit $\omega(x)$ zusammenfällt, ist auf σ unterhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$, somit auch in bezug auf die in u aus $\alpha(x)$ gemäß Fußnote [25]) hervorgehende, nichtabnehmende Funktion $T_\sigma(x)$; $\omega_\sigma(x)$ *ist dadurch auch im Intervall u unterhalb totalstetig* in bezug auf* $T_\sigma(x)$.

In den zu σ gehörenden Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ [40]), eine Teilmenge vom V_{α_σ}-Maß Null und somit auch vom T_σ-Maß Null ausgenommen, haben $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ und $\varphi_\alpha^{(2)}(x)$ endliche $\alpha(x)$-Ableitungen (in bezug auf (a, b)). Daneben existieren in den zu σ gehörenden Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, eine Teilmenge vom T_σ-Maß Null ausgenommen, $\frac{d\alpha(x)}{dV_{\alpha_\sigma}(x)}$ und $\frac{d\alpha(x)}{dT_\sigma(x)}$ und sind beide entweder gleich $+1$ oder gleich -1 [41]). Mit Hilfe der Definitionen A_6 (Bedingung 3b) und B_6 folgt aus dem Vorigen, daß in jenen Stetigkeitspunkten, wieder mit Ausnahme einer Teilmenge vom T_σ-Maß Null, $\frac{d\omega(x)}{dT_\sigma(x)}$ und $\frac{d\omega_\sigma(x)}{dT_\sigma(x)}$ existieren und $\geqq 0$ sind.

Für jeden zu σ gehörenden, linksseitigen (rechtsseitigen) Unstetigkeitspunkt ξ von $T_\sigma(x)$, der gleichzeitig linksseitiger (rechtsseitiger) Häufungspunkt von σ ist, läßt sich aus Definition A_6 (Bedingungen 2, 4a) und Definition B_6 ableiten, daß es einen endlichen Grenzwert $\omega_\sigma(\xi - 0)$ gibt und daß $\frac{\omega_\sigma(\xi) - \omega_\sigma(\xi - 0)}{T_\sigma(\xi) - T_\sigma(\xi - 0)} \geqq 0$ ist $\Big($daß es einen endlichen Grenzwert $\omega_\sigma(\xi + 0)$ gibt und daß $\frac{\omega_\sigma(\xi + 0) - \omega_\sigma(\xi)}{T_\sigma(\xi + 0) - T_\sigma(\xi)} \geqq 0$ ist$\Big)$.

Achtet man außerdem darauf, daß $\omega_\sigma(x)$ in den zu σ komplementären Teilintervallen von u nicht abnimmt, so läßt sich folgern, daß $\omega_\sigma(x) - \omega_\sigma(c)$ eine in u zu der Funktion $h(x) \equiv 0$ adjungierte $T_\sigma(x)$-Majorante im Sinne der Definition A_4 ist. Da $h(x)$ in u außerdem eine $T_\sigma(x)$-Minorante im Sinne der Definition B_4 hat, welche identisch Null ist, nimmt $\omega_\sigma(x) - \omega_\sigma(c)$ als Differenz einer $T_\sigma(x)$-Majorante und einer $T_\sigma(x)$-Minorante in u nicht ab. $\omega(x)$ nimmt somit auf σ monoton zu; wir gelangen zu einem Widerspruch.

Definition 20. In (a, b) sei $f(x)$ *endlich* und $\alpha(x)$ *endlich und BVV**. Dann definieren wir für $a \leqq x \leqq b$:

$$\Psi_\alpha^{(2)}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(2)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_\alpha^{(2)}(x)$$

---

[40]) Die Mengen der zu σ gehörenden Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ und der zu σ gehörenden Stetigkeitspunkte von $T_\sigma(x)$ fallen bis auf abzählbar viele Punkte zusammen.

[41]) Vgl. Fußnote [27]).

und

$$\Phi_\alpha^{(2)}(x) \equiv \int_{\overline{a}}^{x} (P S^{(2)}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup } \varphi_\alpha^{(2)}(x),$$

während ihr gemeinsamer Wert (falls dieser existiert) *das $\alpha^{(2)}$-Integral von $f(x)$ über (a, x)*, $S_\alpha^{(2)}(x) \equiv \int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x)$, sein soll.

In gleicher Weise wie die Sätze 7 und 19 läßt sich beweisen der

Satz 25. *Jedes unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(2)}(x)$ einer in (a, b) endlichen Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, welche in (a, b) endlich und BVV* ist, hat in den Stetigkeitspunkten einer willkürlichen perfekten Menge, auf welcher $\alpha(x)$ BV* ist, eine $\alpha(x)$-Ableitung gleich $f(x)$, ausgenommen in den Punkten einer Teilmenge vom V_{α_M}-Maße Null; $V_{\alpha_M}(x)$ hat hierbei die gleiche Bedeutung wie in Satz 19.*

§ 13.

Definition 21. Wenn $\alpha(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *endlich und BVV** ist, wird die in (a, b) *endliche* Funktion $f(x)$ daselbst *ein unbestimmtes (spezielles Denjoy-Stieltjessches) $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(2^*)}(x)$* haben, falls $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ die folgenden Eigenschaften hat: 1. $S_\alpha^{(2^*)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, während in einem linksseitigen oder rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\lim_{x \to \xi;\, x < \xi} [S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(\xi) - f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0,$$

$$\text{bzw.} \lim_{x \to \xi;\, x > \xi} [S_\alpha^{(2^*)}(x) - S_\alpha^{(2^*)}(\xi) - f(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

ist; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen die Punkte einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß *auf jedem P_k $\alpha(x)$ BV* und $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$* ist[29]; 4. wenn zu jeder in 3. genannten Menge P_k die Funktionen $\alpha_{P_k}(x)$, $V_{\alpha_{P_k}}(x)$ in schon mehrfach angegebener Weise in (a, b) aus $\alpha(x)$ hergeleitet sind, wird die $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ gleich $f(x)$ sein in allen Punkten ihrer Existenzmenge, welche zu P_k gehören und Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind[42]), eine Teilmenge vom $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null ausgenommen.

---

[42]) Die Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$, welche zu P_k gehören und in denen es keine $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ gibt, bilden eine Menge vom $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null. Zum Beweis vergleiche man Fußnote [30]).

Satz 26. *Die Integraldefinitionen* 20 *und* 21 *sind einander äquivalent*[43]).

Definition A_7. $\alpha(x)$ sei in (a, b) *endlich und BVV**. Eine in (a, b) zu der *endlichen* Funktion $f(x)$ adjungierte $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2^{**})}(x)$ soll endlich sein und daneben den gleichen Bedingungen 1, 2, 4a und 4b genügen, welche in Definition A_6 von $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ gefordert wurden. Statt der Bedingungen 3a und 3b der Definition A_6 soll hier gelten: 3a. es läßt sich (a, b), abgesehen von den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) derart, daß *auf jedem* P_k $\alpha(x)$ *BV* und* $\psi_\alpha^{(2^{**})}(x)$ *unterhalb totalstetig* in bezug auf* $\alpha(x)$ ist; 3b. wenn zu jeder in 3a genannten Menge P_k die Funktionen $\alpha_{P_k}(x)$, $V_{\alpha_{P_k}}(x)$ in gleicher Weise konstruiert sind wie in Definition 18 (Bedingung 4), und Q_k die Teilmenge von P_k ist, in deren Punkten die $\alpha(x)$-Ableitung von $\psi_\alpha^{(2^{**})}(x)$ existiert, $\alpha(x)$ stetig und $|DV_{\alpha_{P_k}}\alpha(x)| = 1$ ist, ist in den Punkten von Q_k, eine Teilmenge von $V_{\alpha_{P_k}}$-Maß Null ausgenommen, $D_{\alpha(x)}\psi_\alpha^{(2^{**})}(x) \gtreqless f(x)$, je nachdem $DV_{\alpha_{P_k}}\alpha(x) = +1$ oder $= -1$ ist.

Definition B_7 der zu $f(x)$ adjungierten $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(2^{**})}(x)\}$ bei $\alpha(x)$ *endlich und BVV** in (a, b) geht in analoger Weise aus Definition B_6 hervor wie Definition A_7 aus Definition A_6.

Definition 22. Unter den in Definition A_7 über $f(x)$ und $\alpha(x)$ gemachten Annahmen sei in (a, b):

$$\Psi_\alpha^{(2^{**})}(x) \equiv \overline{\int_a^x} (P S^{(2^{**})}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf}\, \psi_\alpha^{(2^{**})}(x)$$

und

$$\Phi_\alpha^{(2^{**})}(x) \equiv \underline{\int_a^x} (P S^{(2^{**})}) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup}\, \varphi_\alpha^{(2^{**})}(x),$$

während ihr gemeinsamer Wert (falls dieser existiert) *das* $\alpha^{(2^{**})}$*-Integral von* $f(x)$ *über* (a, x), $S_\alpha^{(2^{**})}(x) \equiv \int_a^x (P S^{(2^{**})})\, f(x)\, d\alpha(x)$, sein soll.

Satz 27. *Die Integraldefinitionen* 20 *und* 22 *sind einander äquivalent.*

Der Beweis verläuft in analoger Weise wie der des Satzes 9.

---

[43]) Das Beweisverfahren ist dasselbe wie beim Satz 20. Nur beachte man, daß bei der Herleitung einer $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(2)}(x)$ aus $S_\alpha^{(2^*)}(x)$ zu dieser, damit die Majorante in den Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ den Bedingungen der Definition A_6 genügen könne, u. a. eine Funktion $\varepsilon \cdot \chi(x)$ addiert werden muß; hierbei ist ε willkürlich positiv und $\chi(x)$ eine in (a, b) monoton zunehmende, endliche Funktion, welche in a gleich Null ist, linksseitig bzw. rechtsseitig unstetig in den unter 4b, 4b* der Definition A_6 fallenden, linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ und linksseitig bzw. rechtsseitig stetig in den übrigen Punkten von (a, b). Vgl. auch loc. cit. [1]), S. 145—149.

§ 14.

Definition 23. $\alpha(x)$ sei in (a, b) *endlich und BVV**; zu einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), auf welchen $\alpha(x)$ *BV** ist und welche sämtlich (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken, konstruieren wir wie in Definition 18 (Bedingung 4) die Funktionen $\alpha_{P_k}(x)$ und $V_{\alpha_{P_k}}(x)$. Nun hat *eine Funktion* $f(x)$, *welche in* (a, b) *endlich ist, ausgenommen in den Punkten einer Menge E von Stetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$ *(in bezug auf* (a, b)*), für die das* $V_{\alpha_{P_k}}$*-Maß von* $E \cdot P_k$ *immer Null ist* $(k = 1, 2, \ldots)$, in (a, b) *ein unbestimmtes* $\alpha^{(2)}$*-Integral,* $\int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x)$, wenn die Funktion

$$f^*(x) = f(x) \text{ in den Punkten von } (a, b), \text{ in welchen } f(x) \text{ endlich ist,}$$
$$= 0 \text{ in den übrigen Punkten von } (a, b),$$

in (a, b) ein unbestimmtes $\alpha^{(2)}$-Integral gemäß Definition 20 (21) hat. Wir setzen dann:

$$\int_a^x (PS^{(2)})\, f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^x (PS^{(2)})\, f^*(x)\, d\alpha(x).$$

Satz 28. Der Satz 21 läßt sich, unter Benutzung der Definition 23, übertragen auf den Fall, in welchem $\alpha(x)$ nicht stetig zu sein braucht; *die Menge E soll dabei nur Stetigkeitspunkte von* $\alpha(x)$ *enthalten.*

Der Beweis folgt aus Definition 23, Satz 26 und Definition 21.

Satz 29. $\alpha(x)$ *sei in* (a, b) *endlich und BVV*. Die in* (a, b) *endliche Funktion* $F(x)$ *besitze die folgenden Eigenschaften*: 1. *sie hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$, *wobei zu jedem linksseitigen oder (und) rechtsseitigen Unstetigkeitspunkt* ξ *von* $F(x)$ *eine endliche Zahl* $A(\xi)$ *gehört, für die*

$$\lim_{x \to \xi;\ x < \xi} [F(x) - F(\xi) - A(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

bzw. (und)

$$\lim_{x \to \xi;\ x > \xi} [F(x) - F(\xi) - A(\xi) \cdot \{\alpha(x) - \alpha(\xi)\}] = 0$$

ist; 2. *die Stetigkeitspunkte* (ξ) *von* $\alpha(x)$, *abzählbar viele ausgenommen, haben die beiden Eigenschaften: a) mindestens auf einer Seite*[44]) *eines derartigen Punktes* ξ *gibt es ein Intervall mit* ξ *als Endpunkt, für dessen innere Punkte* (x), *in welchen* $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ *ist, auch immer* $F(x) = F(\xi)$ *ist; b) auf derselben Seite von* ξ *sind alle extremen* $\alpha(x)$*-Derivierten von* $F(x)$ *endlich, soweit sie existieren.*

---

[44]) Diese Seite darf von Punkt zu Punkt wechseln.

Dann ist $F(x) - F(a)$ gemäß Definition 23 das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral einer jeden Funktion, welche in den Unstetigkeitspunkten (ξ) von $\alpha(x)$ gleich $A(\xi)$ ist, in den übrigen Punkten von (a, b) mit der $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ zusammenfällt, soweit diese existiert.

Beweis. Aus den Eigenschaften 2a und 2b läßt sich ableiten, daß (a, b) sich bis auf eine abzählbare Menge überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder $F(x)$ totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$ ist[45]). Damit folgt der Satz leicht aus den Definitionen 23 und 21 und den weiteren Eigenschaften von $F(x)$.

Aus den Eigenschaften des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals und unter Anwendung des Denjoyschen konstruktiven Integrationsverfahrens, welches zu einer mit Definition 21 äquivalenten Integraldefinition[46]) führt, läßt sich ableiten der

Satz 30. *$\alpha(x)$ und $\beta(x)$ seien in (a, b) endlich und BVV*. Hat dann die in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ daselbst unbestimmte $\alpha(x)$- und $\beta(x)$-Integrale gemäß Definition 23, so existiert in (a, b) auch ihr unbestimmtes $\{\alpha(x) + \beta(x)\}$-Integral nach derselben Definition, und es ist dann in (a, b):*

$$\int_a^x (P S^{(2)}) f(x)\, d\{\alpha(x) + \beta(x)\} = \int_a^x (P S^{(2)}) f(x)\, d\alpha(x) + \int_a^x (P S^{(2)}) f(x)\, d\beta(x).$$

Partielle Integration.

§ 15.

Hilfssatz[47]). *Die in (a, b) definierten Funktionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ seien daselbst von beschränkter Variation; sie sollen keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte haben. Wenn dann die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ Lebesgue-Stieltjessche Integrale*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b g(x)\, d\beta(x)$$

---

[45]) Man vergleiche den Beweis von Satz 22 und loc. cit. [17]), S. 144, 145 (Beweis des Lemmas).

[46]) Vgl. die zweite Hälfte des Beweises von Satz 20 und loc. cit. [1]), S. 148, Def. 11.

[47]) Dieser Hilfssatz gilt auch für Riemann-Stieljessche Integrale im Sinne unserer Arbeit: Prace mat. fiz. 41 (1933), S. 65—95. Schon bei diesem spezielleren Integralbegriff zeigt ein Beispiel, daß, wenn die Bedingung über die Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ nicht erfüllt ist, alle in (10) auftretenden Integrale existieren können, ohne daß darum beide Glieder von (10) den gleichen Wert haben (vgl. z. B. H. Luikens, Riemann-Stieltjes Integratie, Dissertation Groningen 1937, S. 96—102). Die Hinzufügung jener Bedingung ist somit wesentlich.

besitzen, ist

$$(10)\quad \int_a^b f\,d\alpha(x)\cdot\int_a^b g\,d\beta(x)$$
$$= \int_a^b f(x)\cdot\{\int_a^x g(x)\,d\beta(x)\}\cdot d\alpha(x) + \int_a^b g(x)\cdot\{\int_a^x f(x)\,d\alpha(x)\}\cdot d\beta(x);$$

dabei sind alle im zweiten Gliede von (10) *vorkommenden Integrale ebenfalls Lebesgue-Stieltjessche.*

Beweis. Aus der Existenz von $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ folgt, daß bei willkürlich positivem ε die Ungleichheit

$$|f(\xi_n^{(1)})|\cdot\{V_\alpha(\xi_n^{(1)}+0) - V_\alpha(\xi_n^{(1)}-0)\} > \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

nur in endlich vielen Unstetigkeitspunkten $(\xi_n^{(1)})$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$ von $\alpha(x)$ gilt; hierbei ist $V_\alpha(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) $(a \leqq x \leqq b)$. Ebenso gibt es nur endlich viele Unstetigkeitspunkte $(\xi_n^{(2)})$ $(n = 1, 2, \ldots, N_2)$ von $\beta(x)$, in denen

$$|g(\xi_n^{(2)})|\cdot\{V_\beta(\xi_n^{(2)}+0) - V_\beta(\xi_n^{(2)}-0)\} > \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist, wobei $V_\beta(x)$ die Totalvariation von $\beta(x)$ über (a, x) $(a \leqq x \leqq b)$ darstellt.

Es läßt sich eine Zerlegung von (a, b) in endlich viele Intervalle angeben, bei der alle Punkte $(\xi_n^{(1)})$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1)$ und alle Punkte $(\xi_n^{(2)})$ $(n = 1, 2, \ldots, N_2)$ zu den Teilungspunkten $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = b$ gehören, deren weitere Teilungspunkte Stetigkeitspunkte sowohl von $\alpha(x)$ wie von $\beta(x)$ sind, und mit der Eigenschaft, daß in jedem offenen Teilintervall (x_{j-1}, x_j) $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ die Oszillationen von $F(x) \equiv \int_a^x f(x)\,d\alpha(x)$ und von $G(x) \equiv \int_a^x g(x)\,d\beta(x)$ kleiner als ε sind. Dabei ist

$$(11)\quad F(b)\cdot G(b) = F(b)\cdot G(b) - F(a)\cdot G(a)$$
$$= \sum_{p=1}^{\nu}\{F(x_p-0)\cdot G(x_p-0) - F(x_{p-1}+0)\cdot G(x_{p-1}+0)\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N_1} f(\xi_n^{(1)})\cdot\{\alpha(\xi_n^{(1)}+0) - \alpha(\xi_n^{(1)}-0)\}\cdot G(\xi_n^{(1)})$$
$$+ \sum_{n=1}^{N_2} g(\xi_n^{(2)})\cdot\{\beta(\xi_n^{(2)}+0) - \beta(\xi_n^{(2)}-0)\}\cdot F(\xi_n^{(2)})$$
$$= \sum_{p=1}^{\nu} F(x_p-0)\cdot\{G(x_p-0) - G(x_{p-1}+0)\}$$
$$+ \sum_{p=1}^{\nu} G(x_{p-1}+0)\cdot\{F(x_p-0) - F(x_{p-1}+0)\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{N_1}\ldots + \sum_{n=1}^{N_2}\ldots.$$

Da $F(x)\cdot g(x)$ (LS)-integrierbar in bezug auf $\beta(x)$ und $G(x)\cdot f(x)$ (LS)-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ ist, ist[48])

$$(12)\quad \Big|\int_a^b F\cdot g\,d\beta(x) - \sum_{p=1}^{r} F(x_p-0)\cdot\{G(x_p-0)-G(x_{p-1}+0)\} - \sum_{n=1}^{N_2} g(\xi_n^{(2)})\cdot\{\beta(\xi_n^{(2)}+0)-\beta(\xi_n^{(2)}-0)\}\cdot F(\xi_n^{(2)})\Big| = \Big|\sum_{p=1}^{r}\Big\{\int_{x_{p-1}+0}^{x_p-0} F\cdot g\,d\beta(x) - \int_{x_{p-1}+0}^{x_p-0} F(x_p-0)\cdot g\,d\beta(x)\Big\}\Big| \leqq \varepsilon\cdot\int_a^b |g|\,dV_\beta(x)$$

und ebenso

$$(13)\quad \Big|\int_a^b G\cdot f\,d\alpha(x) - \sum_{p=1}^{r} G(x_{p-1}+0)\cdot\{F(x_p-0)-F(x_{p-1}+0)\} - \sum_{n=1}^{N_1} f(\xi_n^{(1)})\cdot\{\alpha(\xi_n^{(1)}+0)-\alpha(\xi_n^{(1)}-0)\}\cdot G(\xi_n^{(1)})\Big| \leqq \varepsilon\cdot\int_a^b |f|\,dV_\alpha(x).$$

ε ist willkürlich positiv; (10) folgt dadurch aus (11), (12) und (13).

Satz 31. *$\alpha(x)$ sei BV, $\beta(x)$ beschränkt und BVV^* in (a,b); außerdem sollen diese Funktionen keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte haben. $f(x)$ besitze über (a,b) ein Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf $\alpha(x)$, $g(x)$ ein $(PS^{(2)})$-Integral (im Sinne der Definition 22) in bezug auf $\beta(x)$, während $f(x)\cdot\int_a^x g(x)\,d\beta(x)$ über (a,b) $(PS^{(2)})$-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ sei*[49]).

Dann ist $g(x)\cdot\int_a^x f(x)\,d\alpha(x)$ über (a,b) $(PS^{(2)})$-integrierbar in bezug auf $\beta(x)$, und man hat:

$$\int_a^b (LS) f(x)\,d\alpha(x)\cdot\int_a^b (PS^{(2)})\,g(x)\,d\beta(x) = \int_a^b (PS^{(2)})\,f(x)\cdot\Big\{\int_a^x g(x)\,d\beta(x)\Big\}\cdot d\alpha(x) + \int_a^b (PS^{(2)})\,g(x)\cdot\Big\{\int_a^x f(x)\,d\alpha(x)\Big\}\cdot d\beta(x)\,[50]).$$

---

[48]) Hierbei hat z. B. $\int_{x_{p-1}+0}^{x_p-0} F\cdot g\,d\beta(x)$ die Bedeutung: $\lim_{h\to 0;\,h>0}\int_{x_{p-1}+h}^{x_p-h} F\cdot g\,d\beta(x)$.

[49]) Diese letzte Bedingung ist eine Folge der vorigen im Falle, daß $\int_a^x g(x)\,d\beta(x)$ beschränkt ist [was z. B. der Fall sein wird bei einer in (a,b) stetigen Funktion $\beta(x)$]; dann ist $f(x)\cdot\int_a^x g(x)\,d\beta(x)$ über (a,b) sogar (LS)-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$.

[50]) Ein bekannter Satz über partielle Integration beim speziellen Denjoyschen Integral [siehe z. B. Hobson, loc. cit. [2]), S. 711] folgt als Spezialfall aus Satz 31, wenn man in (a,b) $\beta(x)\equiv x$ und $f(x)\equiv 1$ nimmt.

Beweis. Es wird genügen, den Satz zu beweisen für den Fall, daß $f(x)$ und $g(x)$ endlich sind (siehe die Definitionen 23 und 21). Wir benutzen dabei transfinite Induktion.

Aus Definition 21 folgt, daß es eine in (a, b) nirgends dichte, abgeschlossene Teilmenge E_1 gibt mit der Eigenschaft, daß für die zu E_1 komplementären Teilintervalle von (a, b) folgendes gilt: in jedem abgeschlossenen Intervall (p, q) mit $a_n < p < q < b_n$ sind $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ BV und haben $f(x)$ und $g(x)$ (LS)-Integrale in bezug auf $\alpha(x)$ bzw. auf $\beta(x)$. Daher ist nach dem Hilfssatz dieses Paragraphen:

$$(14)\quad \int_p^q f\,d\alpha(x)\cdot\int_p^q g\,d\beta(x) = \int_p^q f(x)\cdot\Big\{\int_p^x g(x)\,d\beta(x)\Big\}\cdot d\alpha(x) + \int_p^q g(x)\cdot\Big\{\int_p^x f(x)\,d\alpha(x)\Big\}\cdot d\beta(x);$$

alle in (14) vorkommenden Integrale sind Lebesgue-Stieltjessche.

Aus (14) folgt weiter:

$$(15)\quad \int_a^q (LS) f\,d\alpha(x)\cdot\int_a^q (PS^{(2)}) g\,d\beta(x) - \int_a^p (LS) f\,d\alpha(x)\cdot\int_a^p (PS^{(2)}) g\,d\beta(x) = \int_p^p (PS^{(2)}) f(x)\cdot\Big\{\int_a^x g\,d\beta(x)\Big\}\cdot d\alpha(x) + \int_p^q (PS^{(2)}) g(x)\cdot\Big\{\int_a^x f\,d\alpha(x)\Big\}\cdot d\beta x.$$

Es läßt sich zeigen, daß in (15) q durch b_n, p durch a_n ersetzt werden darf. Wir können uns auf den Beweis des ersten Teiles dieser Behauptung beschränken; der Beweis des zweiten Teiles verläuft in analoger Weise. Für den Endpunkt b_n gibt es nur folgende drei Fälle: 1. $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ sind beide linksseitig stetig in b_n; dann sind die drei ersten, in (15) vorkommenden Integrale, deren obere Grenze q ist, linksseitig stetig in b_n, woraus folgt, daß auch das letzte, in (15) auftretende Integral einen endlichen Grenzwert besitzt, falls $q\,(< b_n)$ nach b_n konvergiert; nach Definition 21 existiert nun auch $\int_p^{b_n} (PS^{(2)})\ g(x)\cdot\Big\{\int_a^x f\,d\alpha(x)\Big\}\cdot d\beta(x)$ und ist gleich dem eben genannten Grenzwert; in (15) darf q durch b_n ersetzt werden; 2. $\alpha(x)$ ist linksseitig unstetig, $\beta(x)$ linksseitig stetig in b_n; und: 3. $\alpha(x)$ ist linksseitig stetig und $\beta(x)$ linksseitig unstetig in b_n. Wir wollen nur den zweiten Fall näher behandeln. Da nach Annahme $f(x)\cdot\Big\{\int_a^x g\,d\beta(x)\Big\}$ über (a, b), und somit auch

über (p, q), $(PS^{(2)})$-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ ist, folgt aus Definition 21 (Bedingung 2):

$$(16)\quad \lim_{q \to b_n;\ q<b_n} \Big[\int_p^{b_n} (PS^{(2)})\, f(x) \cdot \Big\{ \int_a^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) - \int_p^q (PS^{(2)})\, f(x) \cdot \Big\{ \int_a^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) - f(b_n) \cdot \int_a^{b_n} g\, d\beta(x) \cdot \Big\{ \alpha(b_n) - \alpha(q) \Big\} \Big] = 0$$

ebenso folgt aus der Definition des (LS)-Integrals:

$$(17)\quad \lim_{q \to b_n;\ q<b_n} \Big[\int_a^{b_n} (LS)\, f\, d\alpha(x) - \int_a^q (LS) f d\alpha(x) - f(b_n) \cdot \Big\{ \alpha(b_n) - \alpha(q) \Big\} \Big] = 0$$

Aus (16) und aus (17), multipliziert mit $\int_a^{b_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x)$, folgt durch Subtraktion und unter Benutzung von (15):

$$(18)\quad \lim_{q \to b_n;\ q<b_n} \Big[\int_p^{b_n} (PS^{(2)})\, f(x) \cdot \Big\{ \int_a^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) + \int_a^q (LS)\, f\, d\alpha(x) \cdot \int_q^{b_n} (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x) + \int_a^p (LS)\, f(x)\, d\alpha(x) \cdot \int_a^p (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x) + \int_p^q (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \Big\{ \int_a^x f d\alpha(x) \Big\} \cdot d\beta(x) - \int_a^{b_n} (LS) f(x) d\alpha(x) \cdot \int_a^{b_n} (PS^{(2)}) g(x) d\beta(x) \Big] = 0$$

Da wegen der linksseitigen Stetigkeit von $\beta(x)$ in b_n

$$\lim_{q \to b_n;\ q<b_n} \int_q^{b_n} (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x) = 0$$

ist, darf man in (18) das zweite Glied der Summe fortlassen, wonach Definition 21 zeigt, daß

$$\int_p^{b_n} (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \Big\{ \int_a^x f\, d\alpha(x) \Big\} \cdot d\beta(x)$$

existiert und

$$= -\int_p^{b_n} (PS^{(2)})\, f(x) \cdot \Big\{ \int_a^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) - \int_a^p (LS)\, f(x)\, d\alpha(x) \cdot \int_a^p (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x) + \int_a^{b_n} (LS) f(x)\, d\alpha(x) \cdot \int_a^{b_n} (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x)$$

ist; auch in diesem Fall darf q in (15) durch b_n ersetzt werden.

E_1 besteht aus dem perfekten Kern K_1 und einem abzählbaren (in jeden Lückenintervall von K_1 reduziblen) Rest R_1. Für ein zu K_1 komplementäre

Intervall $(a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$, das Punkte von R_1 enthält, gilt (15) in einem jeden abgeschlossenen Teilintervall (p, q), das keine inneren Punkte von R_1 enthält, dann auch in jedem Lückenintervall (p, q) der ersten Ableitung von R_1 und, sukzessive so weitergehend, in jedem Lückenintervall irgendeiner höheren Ableitung von R_1, also schließlich nach abzählbar vielen Operationen im abgeschlossenen Intervall $(a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$ mit $p = a_k^{(1)}, q = b_k^{(1)}$. (15) gilt in jedem zu K_1 komplementären, abgeschlossenen Intervall (p, q) von (a, b).

Aus der Definition des (LS)-Integrals und der Definition 21 folgt, daß K_1 eine auf K_1 nirgends dichte, abgeschlossene Menge E_2 enthält mit der Eigenschaft, daß die in einem willkürlichen offenen, zu E_2 komplementären Teilintervall von (a, b) liegende Teilmenge von K_1 sich in abzählbar viele Stücke zerlegen läßt derart, daß für jedes solche Stück S (dessen Endpunkte c und d sein mögen) folgendes gilt: 1. $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ sind BV^* auf S; die Oszillationen von $\int_a^x (LS)\, f\, d\alpha(x)$, von $\int_a^x (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x)$ und ebenso von $\int_a^x (PS^{(2)})\, f(x) \cdot \left\{\int_a^x g\, d\beta(x)\right\} \cdot d\alpha(x)$ in den zu S komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen (c_n, d_n) von (c, d) bilden konvergente Reihen; 2. die drei genannten unbestimmten Integrale sind in (c, d) beschränkt; 3. $g(x)$ ist über das Stück S (LS)-integrierbar in bezug auf eine Funktion $\beta_S(x)$, welche auf S mit $\beta(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu S komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (c, d). Aus 1. und 2. und aus (15) folgt, daß auch die Summe der Oszillationen der Funktionen $\int_{c_n}^x (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \left\{\int_a^x f\, d\alpha(x)\right\} \cdot d\beta(x)$ in den zugehörigen, abgeschlossenen Intervallen (c_n, d_n) eine konvergente Reihe bilden. Da $\int_a^x f\, d\alpha(x)$ in (a, b) beschränkt ist und ihre Unstetigkeitspunkte zu den Stetigkeitspunkten von $\beta(x)$ gehören, folgt mit 3., daß auch $g(x) \cdot \int_a^x f\, d\alpha(x)$ über das Stück S (LS)-integrierbar in bezug auf $\beta_S(x)$ ist. Mit Definition 21 läßt sich aus den beiden vorigen Sätzen folgern, daß $g(x) \cdot \int_a^x f\, d\alpha(x)$ über (c, d) $(PS^{(2)})$-integrierbar in bezug auf $\beta(x)$ ist, und zwar hat man:

$$\int_c^d (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \left\{\int_a^x f\, d\alpha(x)\right\} \cdot d\beta(x) = \int_S (LS)\, g(x) \cdot \left\{\int_a^x f\, d\alpha(x)\right\} \cdot d\beta_S(x) + \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \left\{\int_a^x f\, d\alpha(x)\right\} \cdot d\beta(x).$$

Es läßt sich beweisen, daß (15) auch gilt mit $p = c$ und $q = d$. Dazu wird es genügen zu zeigen, daß

$$\int_a^d (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \Big[\int_S (LS)\, g\, d\beta_S(x) + \int_a^c (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) + \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x) \Big]$$

$$- \int_a^c (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \int_a^c (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) - \int_c^d (LS) f(x) \cdot \Big\{ \int_{S \cdot (c,\, x)} g\, d\beta_S(x) \Big\} \cdot d\alpha(x)$$

$$- \int_c^d (PS^{(2)}) f(x) \cdot \Big\{ \int_a^c g\, d\beta(x) + \sum_{(n)}^{x} \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x) + \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x)$$

$$= \int_S (LS)\, g(x) \cdot \Big\{ \int_a^x f\, d\alpha(x) \Big\} \cdot d\beta_S(x) + \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \Big\{ \int_a^x f\, d\alpha(x) \Big\} \cdot d\beta(x$$

ist; hierbei bezieht sich die Summation über (c, x) jedesmal auf diejenigen abgeschlossenen Intervalle (c_n, d_n), welche ganz im abgeschlossenen Intervall (c, x) liegen und das Integral über $(c_{n(x)}, x)$ tritt nur für solche x-Werte auf, welche innerer Punkt eines zugehörigen Intervalles $(c_{n(x)}, d_{n(x)})$ sind. Wegen des Hilfssatzes wird es genügen zu zeigen, daß

$$\int_a^d (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x) - \int_c^d (PS^{(2)}) f(x) \cdot \Big\{ \sum_{(n)}^{x} \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x)$$

$$+ \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) = \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g(x) \cdot \Big\{ \int_a^x f\, d\alpha(x) \Big\} \cdot d\beta(x),$$

oder, da (15) schon für jedes Intervall (c_n, d_n) gilt (auch mit der unteren Grenze c statt a), daß

$$\int_c^d (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x) - \int_c^d (PS^{(2)}) f(x)$$

$$\cdot \Big\{ \sum_{(n)}^{x} \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x) + \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) = \sum_{(n)} \Big[\int_c^{d_n} (LS) f\, d\alpha(x)$$

$$\cdot \int_c^{d_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x) - \int_c^{c_n} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \int_c^{c_n} (PS^{(2)})\, g\, d\beta(x)$$

$$- \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)}) f(x) \cdot \Big\{ \int_c^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) \Big]$$

ist.

Wenn die Intervalle (e_k, f_k) $(k = 1, \ldots, N+1)$ die zu der Menge der N ersten Intervalle (c_n, d_n) komplementären Teilintervalle von (c, d) sind, müssen wir beweisen, daß der Ausdruck

$$\int_c^d (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(n)} \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) - \int_c^d (PS^{(2)}) f(x) \cdot \Big\{ \sum_{(n)}^{x}{}_c \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x) + \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\}$$

$$\cdot d\alpha(x) - \sum_{n=1}^{N} \Big[\int_c^{d_n} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \Big\{ \sum_{(\overline{n})}^{d_n}{}_c \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) + \int_{S \cdot (c,\, d_n)} (LS) g\, d\beta_S(x) \Big\}$$

$$- \int_c^{c_n} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \Big\{ \sum_{(\overline{n})}^{c_n}{}_c \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) + \int_{S \cdot (c,\, c_n)} (LS) g\, d\beta_S(x) \Big\}$$

$$- \int_{c_n}^{d_n} (PS^{(2)})^{51}) f(x) \cdot \Big\{ \int_c^x g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) \Big],$$

oder, in anderer Form,

$$\sum_{k=1}^{N+1} \Big\{ \int_c^{f_k} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(\overline{n})}{}_c^{f_k} \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) - \int_c^{e_k} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(\overline{n})}{}_c^{e_k} \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) \Big\}$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \int_{c_n}^{d_n} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \int_{S \cdot (c,\, d_n)} (LS) g\, d\beta_S(x) - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{e_k}^{f_k} (LS) f(x) \cdot \Big\{ \sum_{(n)}^{x}{}_c \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x)$$

$$+ \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x) + \sum_{n=1}^{N} \int_{c_n}^{d_n} (LS) f(x) \cdot \Big\{ \int_{S \cdot (c,\, x)} g\, d\beta_S(x) \Big\} \cdot d\alpha(x),$$

oder, nach Vereinfachung

$$\sum_{k=1}^{N+1} \Big\{ \int_c^{f_k} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(\overline{n})}{}_c^{f_k} \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) - \int_c^{e_k} (LS) f\, d\alpha(x) \cdot \sum_{(\overline{n})}{}_c^{e_k} \int_{c_{\overline{n}}}^{d_{\overline{n}}} (PS^{(2)}) g\, d\beta(x) \Big\}$$

$$- \sum_{k=1}^{N+1} \int_{e_k}^{f_k} (LS) f(x) \cdot \Big\{ \sum_{(n)}^{x}{}_c \int_{c_n}^{d_n} g\, d\beta(x) + \int_{c_{n(x)}}^{x} g\, d\beta(x) \Big\} \cdot d\alpha(x)$$

mit zunehmendem N gegen Null konvergiert.

---

[51]) Da $f(x)$ über (c_n, d_n) (LS)-integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ und $\int_c^x g\, d\beta(x)$ in (c_n, d_n) beschränkt und $\alpha(x)$-meßbar ist, darf an dieser Stelle auch (LS) gelesen werden. Eine derartige Bemerkung gilt auch für das zweite Glied des ganzen Ausdruckes.

Weitere Umformung führt den Ausdruck über in

$$\sum_{k=1}^{N+1}\Big[\int_c^{f_k}(LS)f\,d\alpha(x).\{\sum_{(\bar n)}^{f_k}{}_c\int_{c_{\bar n}}^{d_{\bar n}}(PS^{(2)})g\,d\beta(x)-\sum_{(\bar n)}^{e_k}{}_c\int_{c_{\bar n}}^{d_{\bar n}}(PS^{(2)})g\,d\beta(x)\}\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{N+1}\Big\{\int_{e_k}^{f_k}(LS)f\,d\alpha(x)\cdot\sum_{(\bar n)}^{e_k}{}_c\int_{c_{\bar n}}^{d_{\bar n}}(PS^{(2)})g\,d\beta(x)\Big\}$$

$$-\sum_{k=1}^{N+1}\int_{e_k}^{f_k}(LS)f(x)\cdot\Big\{\sum_{(n)}^{x}{}_c\int_{c_n}^{d_n}g\,d\beta(x)+\int_{c_{n(x)}}^{x}g\,d\beta(x)\Big\}\cdot d\alpha(x),$$

darauf in

$$\sum_{k=1}^{N+1}\Big\{\int_c^{f_k}(LS)f\,d\alpha(x).\sum_{(\bar n)}^{f_k}{}_{e_k}\int_{c_{\bar n}}^{d_{\bar n}}(PS^{(2)})g\,d\beta(x)$$

$$-\sum_{k=1}^{N+1}\int_{e_k}^{f_k}(LS)f(x)\cdot\Big\{\sum_{(n)}^{x}{}_{e_k}\int_{c_n}^{d_n}g\,d\beta(x)+\int_{c_{n(x)}}^{x}g\,d\beta(x)\Big\}\cdot d\alpha(x).$$

Das erste Glied dieser letzten Form hat für $N\to\infty$ den Grenzwert Null, wie aus den im vorigen abgeleiteten Eigenschaften 1. und 2. von $f(x)$ und $g(x)$ folgt. Das zweite Glied läßt sich auffassen als ein über (c,d) erstrecktes (LS)-Integral in bezug auf $\alpha(x)$ einer Funktion, welche in den Punkten der $N+1$ abgeschlossenen Intervalle (e_k,f_k) gleich

$$f(x)\cdot\Big\{\sum_{(n)}^{x}{}_{e_k}\int_{c_n}^{d_n}g\,d\beta(x)+\int_{c_{n(x)}}^{x}g\,d\beta(x)\Big\},$$

und in den übrigen Punkten von (c,d) gleich

$$f(x)\cdot 0$$

ist. Da hierbei die in (c,d) in bezug auf $\alpha(x)$ (LS)-integrierbare Funktion $f(x)$ in den Punkten von (c,d) multipliziert wird mit einer $\alpha(x)$-meßbaren, gleichmäßig beschränkten Funktion, welche in diesen Punkten mit zunehmendem N gegen Null konvergiert (siehe die Eigenschaft 1.), hat auch dieses letzte Glied den Grenzwert Null.

(15) gilt somit zwischen den Endpunkten des betrachteten Stückes S von K_1. Man leitet nun leicht ab, daß (15) auch gilt zwischen den Endpunkten eines jeden komplementären Intervalles von E_2, schließlich auch zwischen den Endpunkten eines jeden komplementären Intervalles des perfekten Kernes K_2 von E_2. So fortfahrend erhält man eine wohlgeordnete Folge von perfekten Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_\omega, \ldots$, welche auf jeder vorhergehenden Menge der Folge nirgends dicht liegen. Da es somit eine Zahl γ der ersten oder zweiten Zahlenklasse geben muß, für die K_γ leer ist, ist auch (15) wahr mit $p=a$, $q=b$.

Folgerung (der zweite Mittelwertsatz für das $(PS^{(2)})$-Integral). *$\alpha(x)$ sei endlich und monoton, $\beta(x)$ beschränkt und BVV^* in (a, b); außerdem sollen diese Funktionen keine gemeinsamen Unstetigkeitspunkte haben. Wenn dann für die Funktion $g(x)$ in (a, b) ein unbestimmtes $(PS^{(2)})$-Integral in bezug auf $\beta(x)$, $\int_a^x (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x)$, existiert, welches daselbst beschränkt ist, gibt es eine zwischen oberer und unterer Schranke dieses Integrals liegende Zahl M (die Schranken dabei mit einbegriffen), für die*

$$(19)\quad \int_a^b (PS^{(2)}) g(x) \cdot \alpha(x) \cdot d\beta(x) = \alpha(a) \cdot M + \alpha(b) \cdot \Big[\int_a^b (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x) - M\Big]$$

ist[52]).

Das Beweisverfahren ist das gleiche wie beim Denjoyschen Integral[53]).

---

[52]) Wenn $\int_a^x (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x)$ in (a, b) stetig von x abhängt, gibt es einen Punkt ξ des abgeschlossenen Intervalls (a, b) derart, daß sich in (19) $\int_a^\xi (PS^{(2)})\, g(x)\, d\beta(x)$ statt M schreiben läßt.

[53]) Siehe z. B. Hobson, loc. cit. [2]), S. 715 oder Saks, loc. cit. [2]), S. 203. 204.

(Eingegangen am 6. August 1937.)

Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen.

Von

Carl Ludwig Siegel in Frankfurt (Main).

Die klassische Theorie der binären quadratischen Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit ganzen Koeffizienten ist in dem Zeitraum der letzten hundert Jahre nach zwei Richtungen hin verallgemeinert worden: Verlangt man von der Verallgemeinerung als wesentliche Eigenschaft die Möglichkeit einer Komposition der Formen, so kommt man zu den algebraischen Zahlringen und darüber hinaus zu den nicht-kommutativen Zahlsystemen mit endlicher Basis; behält man dagegen nur den Grad bei, so wird man zu den quadratischen Formen $Q(x_1, \ldots, x_n)$ mit einer beliebigen Anzahl n von Variabeln und ganzen Koeffizienten geführt. Jeder dieser beiden wichtigen Verallgemeinerungen der binären quadratischen Formen entspricht auch eine Verallgemeinerung der von Dirichlet eingeführten Zetafunktion

$$\sum_{x,\,y}{}' (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s}:$$

Im ersten Falle hat man die Dedekindsche Zetafunktion und ihre Übertragung auf nicht-kommutative Bereiche; im zweiten Falle ist die Zetafunktion einer beliebigen quadratischen Form zu bilden.

Die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion ist bekanntlich von Hecke bewiesen worden, und K. Hey[1]) hat diesen Beweis auf nicht-kommutative Körper übertragen. Hierbei spielt die Komposition der zugehörigen Formen eine wesentliche Rolle. Andererseits hat schon früher Epstein in einer wichtigen Untersuchung die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung der Zetafunktion einer definiten quadratischen Form mit beliebig vielen Variabeln bewiesen. Dieser Beweis läßt sich aber nicht auf den indefiniten Fall übertragen.

Die analytische Theorie der quadratischen Formen liefert nun einen Zusammenhang zwischen Thetareihen und Eisensteinschen Reihen, und zwar auch für indefinite Formen. Ist insbesondere $Q(x_1, \ldots, x_n)$ reell in $-(y_1^2 + \ldots + y_p^2) + (y_{p+1}^2 + \ldots + y_n^2)$ mit geradem p transformierbar und die Determinante D von Q ungerade, so folgt aus jener Theorie im Falle $n > 4$ für die zugeordnete Thetafunktion, daß sie eine Modulform der Di-

---

[1]) K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. Hamburg 1929, Dissertation.

mension $n/2$ und der Stufe $2D$ ist; und in üblicher Weise erhält man daraus für die zugehörige Zetafunktion die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung. Es erscheint aber methodisch unbefriedigend, für die Herleitung dieser Resultate die Darstellungstheorie der quadratischen Formen heranzuziehen, und man wird einen einfacheren Weg suchen.

Die Erkenntnis, daß überhaupt indefinite quadratische Formen zur Bildung von Modulformen benutzt werden können, verdankt man Hecke[2]), und zwar für den Fall einer indefiniten binären Form, in welchem die Transformationstheorie der zugeordneten Thetafunktionen aus der Funktionalgleichung der Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers folgt. Ferner hat neuerdings B. Schoeneberg[3]) den Fall behandelt, daß Q die Normenform eines indefiniten Quaternionenbereiches ist; dann gestattet nämlich Q eine Komposition, und es läßt sich zur Ableitung der Funktionalgleichung der Ansatz von Hecke und Hey benutzen. Dieser Weg ist im allgemeinen Fall nicht gangbar, da dann keine Komposition möglich ist. Man kommt aber auf andere Weise zum Ziel, wenn man gewisse Identitäten aus der Theorie der vielfachen Integrale und die Poissonsche Summenformel benutzt. Im folgenden wird dies durchgeführt unter der einschränkenden Annahme, daß Q reell in $-(y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2)+y_n^2$ transformierbar ist, dabei ist die Determinante von Q beliebig und $n>2$.

Die genaue Definition der Zetafunktion von Q findet man in § 4, wo auch die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung in drei Sätzen formuliert werden. Es ist bemerkenswert, daß die Gestalt der Resultate wesentlich davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Eine eingehende Untersuchung erfordert dabei der Fall, daß Q eine ternäre Nullform ist; dann ist auch das Ergebnis von besonderer Art. Die Anwendung auf die Theorie der Modulfunktionen wird in § 10 gegeben. Dabei zeigen wieder die ternären Nullformen ein abweichendes Verhalten. Für die spezielle ternäre Form $x_1x_2-x_3^2$ gewinnt man eine Identität, die bereits Mordell[4]) mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen hat.

Über die weiterhin verwendeten Bezeichnungen sei noch bemerkt, daß deutsche Buchstaben Matrizen bedeuten, und zwar kleine deutsche Buchstaben stets Spalten. Es ist z. B. $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ die quadratische Form mit der symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}$ und der Variablenspalte $\mathfrak{x}$, und speziell hat die Einheitsform $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ die Matrix $\mathfrak{E}$. Ferner soll unter $\mathfrak{n}$ eine Nullspalte verstanden werden.

---

[2]) E. Hecke, Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen. Göttinger Nachrichten 1925.

[3]) B. Schoeneberg, Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen. Math. Annalen **113**, S. 380–391.

[4]) L. J. Mordell, On some series whose n^{th} term involves the number of classes of binary quadratics of determinant $-n$. Messenger of Math. **49**, S. 65–72.

§ 1.

Die Einheitengruppe.

Es sei $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine nicht-ausgeartete reelle quadratische Form von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und D der absolute Betrag ihrer Determinante. Setzt man $x_k : x_n = z_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ oder kurz $\mathfrak{x} = x_n \mathfrak{z}$, so ist der Ausdruck

$$D^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{z}' \mathfrak{S} \mathfrak{z})^{-\frac{n}{2}} dz_1 \ldots dz_{n-1} \tag{1}$$

das zu dem absoluten Gebilde $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = 0$ gehörige nicht-euklidische Volumenelement des projektiven $\mathfrak{x}$-Raumes P.

Weiterhin seien die Elemente von $\mathfrak{S}$ rationale Zahlen. Eine ganzzahlige Matrix $\mathfrak{C}$ möge eine Einheit von $\mathfrak{S}$ heißen, wenn $\mathfrak{C}' \mathfrak{S} \mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ ist. Vermöge der Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ liefern die Einheiten eine Gruppe nicht-euklidischer Bewegungen der Punkte des Raumes P mit dem absoluten Gebilde $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = 0$; dabei ist aber zu beachten, daß die beiden Einheiten $\mathfrak{C}$ und $-\mathfrak{C}$ jedesmal dieselbe Bewegung definieren. Die Bewegungsgruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ ist also die Faktorgruppe der vollen Einheitengruppe in bezug auf die von den beiden Elementen $\mathfrak{E}$ und $-\mathfrak{E}$ gebildete invariante Untergruppe.

Für indefinites $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ ist die Einheitengruppe von unendlicher Ordnung, wenn nicht der triviale Fall einer binären Form mit quadratischer Diskriminante vorliegt. Es sei insbesondere $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_n^2)$ transformierbar. Dann folgt aus der Reduktionstheorie der quadratischen Formen, daß die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ in dem Teile $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$ von P diskontinuierlich ist und dort ein von endlich vielen Ebenen begrenztes Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ besitzt. Das unter Zugrundelegung des Volumenelements (1) berechnete nicht-euklidische Volumen $v(\mathfrak{S})$ von $F(\mathfrak{S})$ ist endlich, wenn der soeben erwähnte triviale Fall ausgeschlossen wird.

Deutet man die n Elemente von $\mathfrak{x}$ nicht als homogene Koordinaten eines Punktes im projektiven Raume P, sondern als rechtwinklige cartesische Koordinaten im euklidischen Raume R, so wird durch $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ eine affine Abbildung von R auf sich selbst definiert, welche den Kegel $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = 0$ festhält. Das Innere dieses Kegels, also das Gebiet $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$, besteht aus zwei spiegelbildlich zum Nullpunkt gelegenen Teilen. Einer von diesen beiden werde ausgewählt und mit K bezeichnet. Diejenigen Einheiten von $\mathfrak{S}$, welche sogar K festlassen, sollen eigentliche Einheiten heißen. Da bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to -\mathfrak{x}$ der Halbkegel K in sein Spiegelbild übergeht, so stimmt $\Gamma(\mathfrak{S})$ überein mit der Gruppe der eigentlichen Einheiten. Dem $(n-1)$-dimensionalen Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ im projektiven $\mathfrak{x}$-Raum entspricht im n-dimensionalen euklidischen $\mathfrak{x}$-Raum eine von endlich vielen Ebenen begrenzte Ecke E, deren Spitze im Nullpunkt liegt. Die Eckpunkte von $F(\mathfrak{S})$ ergeben die Kanten von E. Läßt man bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ die

Matrix $\mathfrak{C}$ sämtliche eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ durchlaufen, so erhält man durch die Bilder von E eine lückenlose und einfache Überdeckung des Kegelinneren $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$.

Für definites $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ ist die Einheitengruppe stets von endlicher Ordnung $h(\mathfrak{S})$. Der elliptische Raum P zerfällt in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ in $\frac{1}{2}h(\mathfrak{S})$ kongruente Exemplare eines Fundamentalpolyeders $F(\mathfrak{S})$. Bedeutet wieder $v(\mathfrak{S})$ das Volumen von $F(\mathfrak{S})$, so ist $\frac{1}{2}h(\mathfrak{S})v(\mathfrak{S})$ das Volumen des gesamten elliptischen Raumes, also die halbe Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel, und folglich

$$\frac{2}{h(\mathfrak{S})} = \pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)v(\mathfrak{S}). \tag{2}$$

Im vorliegenden Falle eines definiten $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ soll jede Einheit von $\mathfrak{S}$ eigentlich genannt werden.

§ 2.

Elliptische und hyperbolische Punkte.

Fortan bedeutet $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ dauernd eine indefinite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten, welche reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_n^2)$ transformierbar ist. Ferner sei $n \geqq 3$. Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \neq 0$, so heißt $\mathfrak{x}$ ein elliptischer oder ein hyperbolischer Punkt, je nachdem $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ oder $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 0$ ist.

Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ rational und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$. Die eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$, für welche also $\mathfrak{C}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist, bilden eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ aller eigentlichen Einheiten. Für rationales $r \neq 0$ ist offenbar $\Gamma(\mathfrak{S}, r\mathfrak{a}) = \Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Setzt man speziell $\mathfrak{a} = r\,\mathfrak{a}_0$, wobei die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ teilerfremd sind, so kann man sich also auf die Untersuchung von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}_0)$ beschränken. In diesem Paragraphen sei

$$\mathfrak{a}_0' \mathfrak{S}\, \mathfrak{a}_0 = t \neq 0,$$

also $\mathfrak{a}$ elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem t positiv oder negativ ist.

Ergänzt man die Spalte $\mathfrak{a}_0$ zu einer unimodularen Matrix

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0\, \mathfrak{B})$$

und setzt

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{S}\, \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{B}' \mathfrak{S}\, \mathfrak{B} - t^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{H}, \qquad \begin{pmatrix} t & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}, \tag{3}$$

so wird

$$\mathfrak{A}' \mathfrak{S}\, \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{H} + t^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t^{-1} & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \mathfrak{G}. \tag{4}$$

Ist nun $\mathfrak{C}$ ein Element der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, so folgt aus $\mathfrak{C}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ zunächst die Gleichung

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\,\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit ganzen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{B}$. Aus $\mathfrak{C}' \mathfrak{S} \mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ ergeben sich sodann nach (3) und (4) die Bedingungen

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{H} \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \quad t\mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{B}')\mathfrak{b} \tag{6}$$

für $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{B}$. Auf Grund von (5) und (6) ist $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph zu der Gruppe derjenigen eigentlichen Einheiten $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{H}$, für welche

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \pmod{t}$$

ist. Diese Gruppe ist offenbar von endlichem Index $j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der Gruppe aller Einheiten von $\mathfrak{H}$. Zufolge (4) ist die quadratische Form mit der Matrix $\mathfrak{H}$ entweder negativ-definit oder aber reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2)$ transformierbar, je nachdem $\mathfrak{a}$ elliptisch oder hyperbolisch ist. Nach § 1 existiert stets die Zahl $v(\mathfrak{H})$, außer wenn $n - 1 = 2$ und zugleich $-|\mathfrak{H}|$ eine Quadratzahl ist; dieser Ausnahmefall bedeutet nach (4), daß $n = 3$ und $-D\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ ein Quadrat ist.

Man definiere

$$m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, v(\mathfrak{H}). \tag{7}$$

Für elliptisches $\mathfrak{a}$ gilt dann nach (2) die Gleichung

$$\frac{1}{m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})} = \frac{h(\mathfrak{H})}{j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})};$$

und hierin steht rechts die Ordnung von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, also die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$. Für hyperbolisches $\mathfrak{a}$ ist $\frac{1}{2} j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Index von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{H})$ und folglich

$$\tfrac{1}{2} j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, v(\mathfrak{H}) = v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$$

das nicht-euklidische Volumen eines Fundamentalbereiches $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ im $(n-2)$-dimensionalen projektiven Raum. Dann wird also

$$m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = \pi^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}). \tag{8}$$

§ 3.

Parabolische Punkte.

Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$, so heißt $\mathfrak{x}$ ein parabolischer Punkt. Die quadratische Form heißt eine Nullform, wenn es mindestens einen rationalen parabolischen Punkt gibt. Jede indefinite quadratische Form von mindestens fünf Variablen ist eine Nullform. Wie das Beispiel $7x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ zeigt, gibt es indefinite ternäre und quaternäre Formen, die keine Nullformen sind. Das zur Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ gehörige Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ hat dann

und nur dann Ecken auf $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = 0$, wenn $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist, und zwar liegen alle solche Ecken in rationalen Punkten.

Für das rationale parabolische $\mathfrak{a}$ sei wieder $\mathfrak{a} = r\,\mathfrak{a}_0$, wobei die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ teilerfremd sind. Man kann $\mathfrak{a}_0$ zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0 \mathfrak{B})$ derart ergänzen, daß die Matrix $\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit positivem p bekommt; und zwar ist dann p eindeutig bestimmt als der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0$. Es sei nun $\mathfrak{C}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkte $\mathfrak{a}$. Für die Matrix $\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{C} \mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1$ erhält man wegen der Gleichungen

$$\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{a} = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{C}_1' \mathfrak{S}_1 \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{S}_1$$

die Form

$$\mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c & \mathfrak{c}' \\ 0 & 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{q} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei c, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{W}$ den Bedingungen

$$\mathfrak{W}' \mathfrak{H} \mathfrak{W} = \mathfrak{H}, \quad p\,c = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\,\mathfrak{b} - \mathfrak{W}' \mathfrak{H} \mathfrak{q}, \quad 2\,p\,c = -\,\mathfrak{q}'\,(\mathfrak{H}\mathfrak{q} + 2\mathfrak{b}) \tag{11}$$

genügen. Setzt man jetzt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}, \quad y_k : y_2 = z_k \;(k = 3, \ldots, n), \quad (z_3 \ldots z_n)' = \mathfrak{z},$$

so entspricht der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ nach (10) und (11) umkehrbar eindeutig die Abbildung $\mathfrak{z} \to \mathfrak{W}\mathfrak{z} + \mathfrak{q}$, und dabei ist $\mathfrak{W}$ eine Einheit von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{q}$ eine ganze Spalte mit den Eigenschaften

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{W}' \mathfrak{H} \mathfrak{q} \pmod{p}, \quad \mathfrak{q}'\,(\mathfrak{H}\mathfrak{q} + 2\,\mathfrak{b}) \equiv 0 \pmod{2\,p}. \tag{12}$$

Der Gruppe dieser Abbildungen des $\mathfrak{z}$-Raumes ist also $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph.

Man definiere nun $v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ als den mit dem Volumenelement

$$|-\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}\, d\,z_3 \ldots d\,z_n$$

gemessenen euklidischen Inhalt des Fundamentalbereiches für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ im $\mathfrak{z}$-Raum. Es bedeute l eine natürliche Zahl, für welche $l\mathfrak{S}$ ganz ist. In der soeben betrachteten Gruppe von Abbildungen des $\mathfrak{z}$-Raumes bilden nach (12) die speziellen Translationen $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z} + \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \equiv \mathfrak{n} \pmod{2\,pl}$ eine Untergruppe, und zwar eine Untergruppe mit endlichem Index $k(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, weil $\mathfrak{z}' \mathfrak{H} \mathfrak{z}$ zufolge (9) negativ-definit ist. Es ist $|-\mathfrak{H}| = D p^{-2}$ und folglich

$$v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = D^{\frac{1}{2}} (2\,l)^{n-2}\, \frac{p^{n-3}}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})}. \tag{13}$$

Aus (4) und (9) ist ersichtlich, daß eine ternäre quadratische Form $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ dann und nur dann Nullform ist, wenn für ein geeignetes rationales $\mathfrak{a}$ die Zahl $-D\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a}$ eine positive Quadratzahl ist. Ist $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform, so existiert nach § 2 die in (7) erklärte Größe $m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ für alle elliptischen und hyperbolischen $\mathfrak{a}$; im Falle einer ternären Nullform sind dagegen diejenigen hyperbolischen $\mathfrak{a}$ auszuschließen, für welche $-D\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a}$ ein Quadrat wird.

§ 4.

Die Zetafunktionen.

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{C}$ eine eigentliche Einheit von $\mathfrak{S}$, so heißen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ assoziiert in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$, oder kurz assoziiert. Ein Repräsentant aller mit $\mathfrak{x}$ Assoziierten werde durch $\{\mathfrak{x}\}$ bezeichnet.

Es sei s eine komplexe Variable, deren reeller Teil $\sigma > \frac{n}{2}$ ist. Man definiere

$$\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\{\mathfrak{a}\} > 0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{-s} \tag{14}$$

und, wenn $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist,

$$\zeta_0(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\{\mathfrak{a}\} < 0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) (-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{-s}. \tag{15}$$

Dabei soll in (14) die Spalte $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziierter elliptischer Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes R durchlaufen, in (15) ein volles System von nicht-assoziierten hyperbolischen Gitterpunkten. Diese Summationsbedingungen werden durch die Zeichen $\{\mathfrak{a}\} > 0$ und $\{\mathfrak{a}\} < 0$ angedeutet. Der Koeffizient $m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ ist in (7) erklärt worden.

Aus der Reduktionstheorie der quadratischen Formen entnimmt man die absolute Konvergenz der beiden Reihen für $\sigma > \frac{n}{2}$, so daß also die beiden Zetafunktionen in dieser Halbebene regulär sind. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist vor allem der Beweis folgender drei Sätze:

Satz 1. *Es sei n ungerade und im Falle $n = 3$ außerdem $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine Nullform. Dann ist $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{n}{2}$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$, und die Funktion*

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi(\mathfrak{S}^{-1}, \tfrac{n}{2} - s). \tag{16}$$

Satz 2. *Es sei n gerade. Dann sind $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ beide in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{n}{2}$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$ und eventuell einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$. In letzterem Punkte liegt nur dann ein Pol, wenn $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Das Residuum von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ ist dort*

$$\varrho = \zeta(3-n) D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchläuft und $\zeta(3-n)$ den Wert der Riemannschen Zetafunktion im Punkte $3-n$ bedeutet; ferner hat $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ das Residuum $(-1)^{\frac{n}{2}-1} \varrho$. Setzt man

$$\frac{n}{2} - 2\left[\frac{n}{4}\right] = \varepsilon,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s+1-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \frac{n}{4}\right) (\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + \zeta_0(\mathfrak{S}, s)) = \varphi_1(\mathfrak{S}, s),$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1 - \frac{n}{4}\right) (\zeta_1(\mathfrak{S}, s) - \zeta_0(\mathfrak{S}, s)) = \varphi_0(\mathfrak{S}, s),$$

so gelten die Funktionalgleichungen

$$\varphi_1(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{n}{4}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi_s\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2} - s\right), \tag{17}$$

$$\varphi_0(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{4}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi_{1-s}\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2} - s\right). \tag{18}$$

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine ternäre Nullform. Dann ist $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{3}{2}$ vom Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$ und einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ vom Residuum*

$$\varrho = \zeta(0) D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchläuft. Die Funktion

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) = -D^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{3}{2} - s\right) + \frac{\pi^{-s} \Gamma(s)}{\cos \pi s} \zeta(2s-1) D^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) a^{2s-2}; \tag{19}$$

dabei bedeutet a den Quotienten aus dem größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ und dem der Elemente von $\mathfrak{a}$.

Der in diesen Sätzen auftretende Fundamentalbereich $F(\mathfrak{S})$ und sein nicht-euklidisches Volumen $v(\mathfrak{S})$ sind in § 1 erklärt worden, die Volumina $v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in § 3.

Es ist zu beachten, daß in Satz 1 keine Aussage über $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ enthalten ist. Über den analytischen Charakter dieser Funktion für ungerades n liefert die im folgenden benutzte Methode keinen Aufschluß.

§ 5.

Berechnung einiger Integrale.

Das Gebiet $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$ der elliptischen Punkte im Raume R besteht aus zwei getrennten Teilen, die durch die Abbildung $\mathfrak{x} \to -\mathfrak{x}$ ineinander übergehen. Wie in § 1 werde einer dieser beiden Halbkegel mit K bezeichnet. In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt von K und

$$(\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y})^{\frac{1}{2}} = y > 0.$$

Unter $d\mathfrak{x}$ soll das n-dimensionale Volumenelement $dx_1 \dots dx_n$ verstanden werden.

Hilfssatz 1. *Für* $R(\lambda) > -1$ *gilt*

$$(20) \quad \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} d\mathfrak{x} = 2^{2\lambda+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Beweis: Es gibt bei festem $\mathfrak{y}$ aus K eine reelle Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = z_1^2 - (z_2^2 + \dots + z_n^2)$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}(y\ 0 \dots 0)'$. Dabei ist $|\mathfrak{A}|^2 = D^{-1}$ und folglich

$$\int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} d\mathfrak{x} = D^{-\frac{1}{2}} \int_{\substack{z_1^2 > z_2^2 + \dots + z_n^2 \\ z_1 > 0}} (z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2)^\lambda e^{-y z_1} d\mathfrak{z}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z_1^{2\lambda+n-1} e^{-y z_1} dz_1 \int_{t_2^2 + \dots + t_n^2 < 1} \dots \int (1 - t_2^2 - \dots - t_n^2)^\lambda dt_2 \dots dt_n$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \Gamma(2\lambda+n) y^{-2\lambda-n} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-v)^\lambda v^{\frac{n-3}{2}} dv$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \Gamma(2\lambda+n) y^{-2\lambda-n} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= 2^{2\lambda+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Hilfssatz 2. *Für* $R(\lambda) > -1$ *und beliebiges* μ *gilt*

$$\int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{ \frac{1}{4} \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1) \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right) \right\} d\mathfrak{x}$$

$$= (\lambda - \mu)\left(\lambda - \mu + \frac{n}{2} - 1\right) 2^{2\lambda+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\cdot \Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Beweis. In (20) ersetze man $\mathfrak{y}$ durch $t\mathfrak{y}$ mit $t > 0$, differentiiere nach t und setze dann $t = 1$. Dies ergibt

$$\int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} \, d\mathfrak{x}$$

$$= 2\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) 2^{2\lambda+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Verwendet man diese Formel und noch zweimal (20), so wird

$$\int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{ \frac{1}{4} \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1) \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right) \right\} d\mathfrak{x}$$

$$= \left\{ (\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) - 2(\mu+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right) \right\}$$

$$\cdot 2^{2\lambda+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n},$$

und hieraus folgt wegen

$$(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) - 2(\mu+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)$$

$$= (\lambda-\mu)\left(\lambda-\mu+\frac{n}{2}-1\right)$$

die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es sei* $R(\lambda) > -1$, $R(\mu) > n-1$ *und* t *komplex, aber nicht reell und zugleich* $\leqq 0$. *Dann ist*

$$(21) \quad \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda} d\mathfrak{x}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\mu+\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} (ty)^{n-2\mu},$$

wo die Potenzen ihre Hauptwerte haben.

Beweis. Da beide Seiten von (21) als Funktionen von t analytisch sind in der längs der Halbgeraden $t \leqq 0$ aufgeschnittenen Ebene, so braucht die

Behauptung nur für positive t bewiesen zu werden. Da dann mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}+t\mathfrak{y}$ in K liegt, so ergibt dreimalige Anwendung von Hilfssatz 1

$$\int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda} d\mathfrak{x}$$

$$= \frac{2^{1-2\mu-2\lambda}\pi^{1-\frac{n}{2}} D^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \left\{\int_K (\mathfrak{z}' \mathfrak{S} \mathfrak{z})^{\mu+\lambda-\frac{n}{2}} e^{-\mathfrak{z}' \mathfrak{S} (\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})} d\mathfrak{z}\right\} d\mathfrak{x}$$

$$= 2^{n-2\mu} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} \int_K (\mathfrak{z}' \mathfrak{S} \mathfrak{z})^{\mu-n} e^{-t\mathfrak{z}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} d\mathfrak{z}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\mu+\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} (ty)^{n-2\mu}.$$

Hilfssatz 4. *Für* $R(\lambda) > -1$, $R(\mu) > n-1$ *ist*

$$\int_{\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda} d\mathfrak{x}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} \cos\pi\left(\frac{n}{2}-\mu\right) (\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y})^{\frac{n}{2}-\mu}.$$

Beweis. Man benutze die Formel (21) mit $t = i$ und $t = -i$. Die Behauptung folgt durch Addition.

Hilfssatz 5. *Für* $R(\lambda) > 0$, $R(\mu) > 0$, $R(\mu) > R(\nu) > -R(\lambda)$ *ist*

$$\int_0^\infty x^{2\lambda-1} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+1-2iw)^{-\lambda-\mu-\nu} (x^2+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dw\right\} dx$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{2\Gamma(\lambda+\mu)\Gamma(\lambda+\mu+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}.$$

Beweis: Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung kann man sich auf den Fall $R(\lambda+\mu+\nu) > 0$, $R(\nu) < \frac{1}{2}$ beschränken. Dann ist

$$\Gamma(\lambda+\mu+\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu) \int_0^\infty x^{2\lambda-1} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+1-2iw)^{-\lambda-\mu-\nu} (x^2+w^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dw\right\} dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\lambda-1} \left\{\int_0^\infty z^{\lambda+\mu+\nu-1} e^{-z(x^2+1-2iw)} dz \int_0^\infty t^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-t(x^2+w^2)} dt\right\} dx\, dw$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda) \int_0^\infty \int_0^\infty z^{\lambda+\mu+\nu-1} t^{-\nu-1} (z+t)^{-\lambda} e^{-z-z^2 t^{-1}} dz\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda) \int_0^\infty t^{-\nu-1} (1+t)^{-\lambda} \left(\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-z(1+t^{-1})} dz\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda)\Gamma(\mu) \int_0^\infty t^{\mu-\nu-1} (1+t)^{-\lambda-\mu} dt = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda)\Gamma(\mu) \frac{\Gamma(\lambda+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

§ 6.

Anwendung der Poissonschen Summenformel.

In diesem Paragraphen sollen Verallgemeinerungen der Hilfssätze 1 und 2 abgeleitet werden, bei denen Summen an die Stelle der Integrale treten. Es sei wieder $\mathfrak{y}$ ein Punkt von K.

Hilfssatz 6. *Für* $R(\mu) > \frac{n}{2}$ *ist*

$$(22)\quad \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} = 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}},$$

wo $\mathfrak{a}$ *alle Gitterpunkte von* K *und* $\mathfrak{b}$ *alle Gitterpunkte des ganzen Raumes* R *durchlaufen.*

Beweis. Für reelles $\mathfrak{z}$ ist nach Hilfssatz 1

$$(23)\quad \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\mu} e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\pi i \mathfrak{x}' \mathfrak{z}} d\mathfrak{x} = 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} \cdot \{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{z})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{z})\}^{-\mu-\frac{n}{2}}.$$

Kann man noch beweisen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (22) absolut konvergiert, so folgt die Behauptung aus (23) durch Anwendung der Poissonschen Summenformel. Wie beim Beweise von Hilfssatz 1 sei $(\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y})^{\frac{1}{2}} = y > 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,(y\,0 \ldots 0)'$ und $\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1, -1, \ldots, -1$. Setzt man noch $2\pi \mathfrak{A}' \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = (c_1 \ldots c_n)'$, so wird

$$(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) = y^2 - c_1^2 + (c_2^2 + \ldots + c_n^2) + 2ic_1 y$$

und folglich der absolute Betrag

$$|(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})| \geqq y\,(y^2 + 2c_1^2 + \ldots + 2c_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach hat die Reihe auf der rechten Seite von (22) eine Majorante der Gestalt

$$\gamma \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} (1 + \mathfrak{b}' \mathfrak{b})^{-\frac{\mu_0}{2}-\frac{n}{4}},$$

wo $\mu_0 = R(\mu)$ gesetzt ist und γ nur von y abhängt. Die Majorante konvergiert nun für $\frac{\mu_0}{2} + \frac{n}{4} > \frac{n}{2}$, und dies ist gerade die Voraussetzung $R(\mu) > \frac{n}{2}$.

Durch eine feinere Abschätzung kann man übrigens feststellen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (22) sogar noch für $R(\mu) > \frac{n}{2} - 1$ absolut konvergiert, aber nicht mehr für $\mu = \frac{n}{2} - 1$. Die Untersuchung des Streifens

bedingter Konvergenz scheint schwieriger zu sein. Für das Folgende genügt aber die Aussage von Hilfssatz 6.

Hilfssatz 7. *Für* $R(\mu) > \frac{n}{2}$ *ist*

$$(24)\quad \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{ \frac{1}{4} \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1)\, \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right) \right\}$$

$$= -\, 2^{2\mu+n+1}\, \pi^{\frac{n}{2}+1}\, \Gamma(\mu+2)\, \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \left\{ (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) \right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1}.$$

Beweis. In (22) ersetze man $\mathfrak{y}$ durch $t\mathfrak{y}$ mit $t > 0$, differentiiere nach t und setze dann $t = 1$. Dies ergibt

$$\sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu}\, \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}\, e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} = 2\left(\mu + \frac{n}{2}\right) 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) \left\{ (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) \right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1}.$$

Verwendet man diese Formel und noch zweimal (22), so wird

$$\sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{ \frac{1}{4} \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1)\, \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right) \right\}$$

$$= 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+2) \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \left\{ \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) + (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) \right\}$$

$$\cdot \left\{ (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) \right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1},$$

und dies liefert wegen

$$\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}) + (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})$$

$$= (2\pi i)^2 \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$$

die Behauptung.

§ 7.

Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung.

In diesem Paragraphen soll bewiesen werden, daß die Funktion

$$\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\, \zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$

und bei geradem n auch die Funktion

$$\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\, \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$$

in der ganzen endlichen s-Ebene regulär ist und daß ferner die in den Sätzen 1 und 2 ausgesprochenen Funktionalgleichungen bestehen.

Zunächst sei $R(s) = \sigma > \frac{n}{2}$, ferner sei μ eine der Bedingung $\mu > \frac{n}{2} + 1$ genügende Konstante und

$$\lambda = s + \mu - \frac{n}{2}.$$

Für die Funktion

$$(25)\quad \left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\,2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)D^{-\frac{1}{2}}\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = f(s)$$

ergibt Hilfssatz 2 unter Benutzung der Definition (14) von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ die Darstellung

$$(26)\quad f(s) = 2 \sum_{\{\mathfrak{a}\}} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda}\, e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}} \cdot \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} - (\mu+1)\,\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\} d\mathfrak{x}.$$

Das in § 1 erklärte Gebiet E hat die Eigenschaft, daß seine Bilder bei den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ eine lückenlose und einfache Überdeckung des Gebietes $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$ ergeben, wenn $\mathfrak{C}$ alle eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ durchläuft. Andererseits läßt sich jeder mit $\mathfrak{a}$ assoziierte Punkt gleich oft in die Form $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{a}$ setzen, nämlich so oft, wie es Einheiten mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$ gibt. Wie in § 2 gezeigt wurde, ist aber diese Anzahl genau $1 : m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Daher geht (26) über in

$$(27)\quad f(s) = \int_E (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} - (\mu+1)\,|\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}| + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu}\, e^{-|\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x},$$

wo nunmehr $\mathfrak{a}$ alle Gitterpunkte von K durchläuft.

Man zerlege jetzt E in zwei Teile E_1 und E_2; auf E_1 sei $0 < \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} < 1$, auf E_2 sei $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} \geqq 1$. Verwendet man Hilfssatz 7 für die $\mathfrak{x}$ aus E_1, so folgt aus (27) die Darstellung

$$(28)\quad f(s) = \int_{E_2} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} - (\mu+1)\,|\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}| + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu}\, e^{-|\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x}$$

$$- 2^{2\mu+n+1}\,\pi^{\frac{n}{2}+1}\,\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)D^{-\frac{1}{2}} \int_{E_1} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} \cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \left\{(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})\right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} d\mathfrak{x}.$$

Hieraus ergibt sich, wie nun gezeigt werden soll, daß $\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ eine ganze Funktion von s ist.

Das erste Integral auf der rechten Seite von (28) ist zunächst eine ganze Funktion von s. Um den analytischen Charakter des zweiten Integrals zu untersuchen, hat man die Reduktionstheorie der quadratischen Formen zu benutzen. Am einfachsten ist diese Untersuchung für den Fall, daß $F(\mathfrak{S})$ lauter elliptische Ecken hat oder, was dasselbe ist, daß $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine Nullform ist; allerdings kann dies nur für $n \leqq 4$ eintreten. In diesem Falle ist der Quotient $\mathfrak{x}' \mathfrak{x} : \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ auf $F(\mathfrak{S})$ beschränkt. Indem man wie beim Beweise von Hilfssatz 6 verfährt, erkennt man, daß dann die Reihe unter dem zweiten Integral in (28) gleichmäßig für alle $\mathfrak{x}$ aus E die Majorante

$$\gamma \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{b} \{\mathfrak{x}' \mathfrak{x} (\mathfrak{x}' \mathfrak{x} + \mathfrak{b}' \mathfrak{b})\}^{-\frac{\mu}{2} - \frac{n}{4} - \frac{1}{2}}$$

besitzt, wo γ von $\mathfrak{x}$ unabhängig ist. Multipliziert man diese Majorante noch mit dem Faktor $(\mathfrak{x}' \mathfrak{x})^{\frac{\mu}{2} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2}}$, so erhält man wegen $\mu > \frac{n}{2} + 1$ eine im Gebiet E_1 gleichmäßig konvergente Reihe. Folglich ist das zweite Integral in (28) eine in der Halbebene $\sigma > \frac{n}{4} + \frac{1-\mu}{2}$ reguläre Funktion von s. Diese Aussage gilt auch noch für den Fall, daß $F(\mathfrak{S})$ parabolische Ecken besitzt. Das ergibt sich durch eine Untersuchung des Verhaltens des Integranden in der Nähe der parabolischen Ecken; da diese Untersuchung keine prinzipielle Schwierigkeit bietet, so sei die etwas langwierige Rechnung hier übergangen.

Es ist also die Funktion $f(s)$ regulär für $\sigma > \frac{n}{4} + \frac{1-\mu}{2}$ und die Formel (28) für diese σ gültig. Da nun aber μ beliebig groß gewählt werden kann, so zeigt (25), daß $\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ tatsächlich ganz ist.

Nun sei entweder $n > 3$ oder $n = 3$ und zugleich $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine Nullform. Ferner sei weiterhin

$$\frac{n}{4} + \frac{1-\mu}{2} < \sigma < 0.$$

Verwendet man Hilfssatz 7 auch für die $\mathfrak{x}$ aus E_2, so geht (28) über in

$$(29) \quad f(s) = -\,2^{2\mu+n+1} \pi^{\frac{n}{2}+1} \Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_E (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \{(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} d\mathfrak{x}.$$

Wegen des Faktors $\mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} = (\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})$ braucht man auf der rechten Seite nur über die ganzen $\mathfrak{b}$ zu summieren, für welche $\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$ elliptisch oder hyperbolisch ist, also $\mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} > 0$ oder $\mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} < 0$. Man erhält alle Assoziierten von $\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$ genau einmal in der Form $\mathfrak{C} \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{C}$ ein volles System von Repräsentanten der Nebengruppen der Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})$ in der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ durchläuft. Andererseits erfüllen die

Bilder von E bei den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ lückenlos und einfach einen Teil $E_{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$, der genau einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ bildet. Also ist

$$(30) \quad \int_E (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \{(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} d\mathfrak{x}$$

$$= \sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\}} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \int_{E_{\mathfrak{b}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} d\mathfrak{x},$$

wo $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ ein volles System nicht-assoziierter elliptischer und hyperbolischer Punkte mit ganzem $\mathfrak{b}$ durchläuft.

Für jede Einheit $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{C}'$ eine Einheit von $\mathfrak{S}^{-1}$ und $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{b}$. Die Elemente von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ sind also die Transponierten der Elemente von $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$. Für die elliptischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ kann man auf der rechten Seite von (30) den Integrationsbereich $E_{\mathfrak{b}}$ durch den vollen Bereich $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} > 0$ ersetzen, wenn man noch als Faktor den reziproken Wert der Ordnung von $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ hinzufügt, der nach § 2 gleich $m(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ ist. Dann läßt sich aber Hilfssatz 4 anwenden, und man erkennt, daß die elliptischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ zur rechten Seite von (30) genau den Beitrag

$$(31) \quad - D^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)} \cdot (2\pi)^{2s-n-2} \cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right) \zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right)$$

ergeben.

Für hyperbolisches $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ sei $(-\mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b})^{\frac{1}{2}} = b > 0$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_n^2)$, $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{A}(0 \ldots 0\, b)'$, also

$$(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) = y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_n^2) - 4\pi i b y_n + 4\pi^2 b^2.$$

Setzt man noch

$$z_1 = \{y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_n^2)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad z_k = y_k : y_1 \qquad (k = 2, \ldots, n-1)$$

und beachtet, daß die Abbildung $x_1, \ldots, x_n \to z_1, \ldots, z_{n-1}, y_n$ zwei-eindeutig ist, so erhält man

$$\int_{E_{\mathfrak{b}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{x} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} d\mathfrak{x}$$

$$= 2 D^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z_1^{2\lambda+1} \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (z_1^2 + 4\pi^2 b^2 - 4\pi i b y_n)^{-\mu - \frac{n}{2} - 1} (z_1^2 + y_n^2)^{\frac{n-3}{2}} d y_n \Big\} d z_1 \cdot \int \ldots \int_{F_{\mathfrak{b}}} \frac{d z_2 \ldots d z_{n-1}}{(1 - z_2^2 - \ldots - z_{n-1}^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

wobei $F_{\mathfrak{b}}$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ im $z_2 \dots z_{n-1}$-Raume bedeutet. Zufolge Hilfssatz 5 und Formel (8) wird also

$$(32)\quad \mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} \int\limits_{F_{\mathfrak{b}}} (x'\,\mathfrak{S}\,x)^{\lambda} \{(x + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(x + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1} dx$$

$$= -D^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{2s-n-2} \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}$$

$$\cdot \pi^{\frac{1}{2}}\, v(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})\,(-\mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})^{s-\frac{n}{2}} = -\sin\pi\frac{n-1}{2}\, D^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)} (2\pi)^{2s-n-2} m(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})(-\mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})^{s-\frac{n}{2}}.$$

Aus (25), (29), (30), (31), (32) folgt jetzt

$$(33)\quad \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)$$

$$\cdot \left\{\cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right)\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right) + \sin\pi\frac{n-1}{2}\,\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Ist nun n ungerade, also

$$\sin\pi\frac{n-1}{2} = 0, \qquad \Gamma(1-s)\cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\pi}{\Gamma(s)},$$

so ergibt (33) die Funktionalgleichung (16). Wegen der oben bewiesenen Regularität von $\left(s-\frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ für alle endlichen s gilt das gleiche für die Funktion $s\left(s+1-\frac{n}{2}\right)\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right)$. Die rechte Seite von (16) ist also regulär bei $s = 1$ und folglich hat $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in Wahrheit gar keinen Pol bei $s = 1$. Die in Satz 1 enthaltenen Aussagen sind damit bewiesen, bis auf die Bestimmung des Residuums bei $s = \frac{n}{2}$.

Ist n gerade, also

$$\sin\pi\frac{n-1}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}, \qquad \cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\pi s,$$

so geht (33) über in

$$\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n}{2}} D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)$$

$$\cdot \left\{\cos\pi s\,\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right) - \zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Hieraus folgt für $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ die Darstellung

$$\zeta_0(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\pi s\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$

$$+ D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\sin^2\pi s\,\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right),$$

und demnach ist auch $\left(s-\frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_0(\mathfrak{S},s)$ eine ganze Funktion von s. Die beiden letzten Gleichungen ergeben

$$\zeta_1(\mathfrak{S},s)+\zeta_0(\mathfrak{S},s)=2D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\cos^2\frac{\pi}{2}\left(s+\frac{n}{2}\right)$$
$$\cdot\left\{\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\},$$

$$(34)\quad \zeta_1(\mathfrak{S},s)-\zeta_0(\mathfrak{S},s)=-2D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(s+\frac{n}{2}\right)$$
$$\cdot\left\{\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)+(-1)^{\frac{n}{2}}\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Hieraus folgen die Funktionalgleichungen (17) und (18) durch eine leichte Rechnung. Damit sind auch die Aussagen von Satz 2 bewiesen, bis auf die Residuenbestimmung bei $s=\frac{n}{2}$ und $s=1$.

§ 8.

Berechnung der Residuen.

Obwohl in der Definition von $\zeta_1(\mathfrak{S},s)$ nur die elliptischen Punkte auftreten, so waren beim Beweis der Fortsetzbarkeit im vorigen Paragraphen durch die Benutzung von Hilfssatz 7 auch die hyperbolischen Punkte in den Formeln zum Vorschein gekommen. Dabei war aber der Ansatz so gewählt, daß die parabolischen Punkte wegen des Faktors $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{b}$ im allgemeinen Gliede der rechten Seite von (24) aus der Rechnung herausfielen, wodurch sich eine Vereinfachung ergab. Allerdings erhielt man auf diese Weise nicht die Werte der Residuen der Zetafunktion. Um diese zu finden, hat man gerade einen Ansatz durchzuführen, bei welchem die parabolischen Punkte nicht herausfallen. In diesem Paragraphen werde vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist.

Der Ansatz selbst ist noch näherliegender wie der von § 7: man benutzt direkt die Hilfssätze 1 und 6 statt der Hilfssätze 2 und 7. An Stelle von (28) erhält man dann die Darstellung

$$(35)\quad \zeta_1(\mathfrak{S},s)=\frac{D^{\frac{1}{2}}\pi^{1-\frac{n}{2}}2^{1-n-2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int_{E_2}(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x})^{\lambda}\sum_{\mathfrak{a}\text{ in }K}(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{a})^{\mu}e^{-|\mathfrak{a}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x}|}\,d\mathfrak{x}$$
$$+2^{n-2s}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int_{E_1}(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x})^{\lambda}$$
$$\cdot\sum_{\mathfrak{b}\text{ in }R}\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}}\,d\mathfrak{x},$$

und zwar zunächst für $\sigma > \frac{n}{2}$, mit $\mu > \frac{n}{2}$ und $\lambda = s + \mu - \frac{n}{2}$. Der wesentliche Unterschied gegenüber (28) besteht jetzt darin, daß in (35) auch die Gitterpunkte $\mathfrak{b}$ auftreten, für welche $\mathfrak{b}' \, \mathfrak{S}^{-1} \, \mathfrak{b} = 0$ ist. Läßt man alle diese $\mathfrak{b}$ fort, so erhält man statt der rechten Seite von (35) eine Funktion von s, von welcher man nach dem Vorbilde von § 7 beweisen kann, daß sie in der Halbebene $\sigma > \frac{n}{4} - \frac{\mu}{2}$ regulär ist. Die Residuen von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ und $s = 1$ stimmen daher überein mit denen der Funktion

$$(36)\quad g(s) = 2^{n-2s} \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)} \int_{E_1} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} = 0} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i \mathfrak{b}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}.$$

In der Summe auf der rechten Seite von (36) greife man zuerst das Glied $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ heraus. Bei den übrigen Gliedern vereinige man wie in § 7 alle assoziierten $\mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$ und außerdem alle $\mathfrak{b}$, die auseinander durch Multiplikation mit einer rationalen Zahl hervorgehen. Man lasse nun $\mathfrak{p}$ die verschiedenen parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S}^{-1})$ durchlaufen, wobei die Elemente von $\mathfrak{p}$ teilerfremd seien. Bedeutet dann $E_{1\mathfrak{p}}$ einen Fundamentalbereich für die Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ auf dem Gebiete $0 < \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} < 1$, so wird

$$(37)\quad 2^{2s-n} \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)} g(s)$$

$$= \int_{E_1} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{s-n} d\mathfrak{x} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} \int_{E_{1\mathfrak{p}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i l \mathfrak{p}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}.$$

Im ersten Integral führe man durch die Substitution

$$t = (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}, \qquad x_k : x_n = z_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

neue Integrationsvariable $t, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ein. Nach (1) wird dann

$$(38)\quad \int_{E_1} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{s-n} d\mathfrak{x} = 2 \int_0^1 t^{2s-n-1} dt \int \ldots \int_{F(\mathfrak{S})} (\mathfrak{z}' \mathfrak{S} \mathfrak{z})^{-\frac{n}{2}} dz_1 \ldots dz_{n-1} = \frac{D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})}{s - \frac{n}{2}}.$$

Im zweiten Integral auf der rechten Seite von (37) führe man durch die Substitutionen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}, \qquad t = (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}, \qquad y_k : y_2 = z_k \qquad (k = 3, \ldots, n)$$

die Variablen $t, y_2, z_3, \ldots, z_n$ ein; dabei soll $\mathfrak{A}$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 3. Dann ist also $\mathfrak{A}$ unimodular, $\mathfrak{p}' \mathfrak{x} = y_2$ und

$$t^2 = \mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = \mathfrak{y}' \mathfrak{S}_1 \mathfrak{y} = 2 p y_1 y_2 + \ldots.$$

Es wird

$$\int_{E_{1\mathfrak{p}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i l \mathfrak{p}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}$$

$$= \int_0^1 t^{2\lambda+1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 4\pi i l y_2)^{-\mu - \frac{n}{2}} |y_2|^{n-3} d y_2 \right\} p^{-1} \int_{F(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})} \dots \int d z_3 \dots d z_n ;$$

wo $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ den Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ im $z_3 \dots z_n$-Raum bedeutet. Folglich gilt für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (37) die Gleichung

$$(39)\quad 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} \int_{E_{1\mathfrak{p}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i l \mathfrak{p}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}$$

$$= 2 D^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} (4\pi l)^{2-n} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}) \int_0^1 t^{2s-3} dt \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iy)^{-\mu - \frac{n}{2}} |y|^{n-3} dy$$

$$= 2 D^{-\frac{1}{2}} (4\pi)^{2-n} \cos \pi \left(\frac{n}{2} - 1\right) \zeta(n-2) \frac{\Gamma(n-2)\Gamma\left(\mu - \frac{n}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{s-1} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}).$$

Nach (37) und (38) hat die Funktion $g(s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$. Nach (37) und (39) ist $g(s)$ für ungerades n bei $s = 1$ regulär; für gerades n ist dagegen der Punkt $s = 1$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho = 2 D^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{2-n} \cos \pi \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma(n-2)\, \zeta(n-2) \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \zeta(3-n) \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

Hierdurch sind die Residuen von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ ermittelt. Aus (34) folgt jetzt, daß für gerades n die Differenz $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) - \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ regulär ist; also haben $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ dort das gleiche Residuum. Ferner folgt aus (34), daß die Funktion $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + (-1)^{\frac{n}{2}} \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ regulär ist; also hat $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ dort das Residuum $(-1)^{\frac{n}{2}-1} \varrho$.

Damit sind sämtliche in den Sätzen 1 und 2 aufgestellten Behauptungen bewiesen.

§ 9.

Ternäre Nullformen.

Ist $n = 3$ und $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform, so versagt die Methode von § 7 zur Herleitung der Funktionalgleichung, da die Fundamentalbereiche für die Gruppen $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ keinen endlichen Inhalt haben, wenn $n = 3$ und

$-D\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ eine positive Quadratzahl ist. In diesem Fall führt der folgende modifizierte Ansatz zum Ziel.

Wie im vorigen Paragraphen lasse man $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ die verschiedenen parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchlaufen, wobei die Elemente von $\mathfrak{p}$ teilerfremd seien. Es sei $\gamma > 0$. Entfernt man aus den früher erklärten Gebieten E, E_1, E_2 die sämtlichen Punkte $\mathfrak{x}$, für welche mit irgend einem jener $\mathfrak{p}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > \gamma\,(\mathfrak{p}'\mathfrak{x})^2 \tag{40}$$

erfüllt ist, so mögen die Gebiete E_γ, $E_{1\gamma}$, $E_{2\gamma}$ entstehen. Diese sind dann Fundamentalbereiche für $\Gamma(\mathfrak{S})$ auf den drei Gebieten, die aus $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$, $0 < \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 1$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \geqq 1$ entstehen, wenn man sämtliche Punkte $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > \gamma\,(\mathfrak{t}'\mathfrak{x})^2 \tag{41}$$

mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzen $\mathfrak{t}$ erfüllt ist.

Sind $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2$ zwei verschiedene parabolische Ecken von $F(\mathfrak{S})$, so ist

$$2\,\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1'\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{p}_2'\mathfrak{x} - (\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2)^2\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = D^{-1}\,|\,\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{S}\mathfrak{x}\,|^2, \tag{42}$$

wobei das Symbol $|\,\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{S}\mathfrak{x}\,|$ die Determinante bedeutet. Hätten nun die durch (40) für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$ erklärten Gebiete einen Punkt $\mathfrak{x}$ gemeinsam, so wäre für diesen

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^2 > \gamma^2\,(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{x})^2\,(\mathfrak{p}_2'\mathfrak{x})^2,$$

und (42) lieferte die Ungleichung

$$\gamma^2\,(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2)^2 < 4. \tag{43}$$

Es sei nun h der Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}$ und weiterhin $\gamma \geqq 2h$. Dann kann (43) nicht erfüllt sein, und die durch (40) für verschiedene $\mathfrak{p}$ definierten Gebiete haben also keinen Punkt gemeinsam.

Zunächst sei $\sigma > \frac{3}{2}$. Mit $\mu > \frac{3}{2}$ setze man $\lambda = s + \mu - \frac{3}{2}$ und

$$f_\gamma(s) = \int_{E_\gamma} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{a}\ \mathrm{in}\ K} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^\mu\, e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x}.$$

Offenbar ist dann

$$\lim_{\gamma\to\infty} f_\gamma(s) = 2\pi D^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda + 2)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s),$$

und andererseits erhält man für $f_\gamma(s)$ die Darstellung

$$f_\gamma(s) = \int_{E_{2\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{a}\ \mathrm{in}\ K} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^\mu\, e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x}$$

$$+ 2\pi D^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\mu + 2)\int_{E_{1\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{b}\ \mathrm{in}\ R} \{(\mathfrak{x} + 2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x} + 2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}\, d\mathfrak{x}.$$

Analog wie in § 8 wird nun

$$\int_{E_1\gamma}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}=0}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}+4\pi i\mathfrak{b}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}$$

$$=\int_{E_1\gamma}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{s-3}d\mathfrak{x}+2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{p}}\int_{E_{1\mathfrak{p}\gamma}}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}+4\pi i l\mathfrak{p}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x};$$

dabei bedeutet $E_{1\mathfrak{p}\gamma}$ einen Fundamentalbereich für die Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ auf dem Gebiete, das aus $0<\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}<1$ entsteht, wenn man alle $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung (41) mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzen $\mathfrak{t}$ erfüllt ist. Durch dieselbe Umformung wie in § 8 erhält man weiter

$$\lim_{\gamma\to\infty}\int_{E_1\gamma}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}=0}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}+4\pi i\mathfrak{b}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}=\frac{D^{-\frac{1}{2}}v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}}$$

$$+2D^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\lim_{\gamma\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^1 t^{2\lambda+1}\Big\{\int_{y_2^2>t^2\gamma^{-1}}(t^2+4\pi i l y_2)^{-\mu-\frac{3}{2}}dy_2\Big\}dt$$

$$=\frac{D^{-\frac{1}{2}}v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}}+\frac{D^{-\frac{1}{2}}}{s-1}\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\int_0^\infty\frac{(1+ix)^{-\mu-\frac{1}{2}}-(1-ix)^{-\mu-\frac{1}{2}}}{2\pi i(2\mu+1)x}dx$$

$$=\frac{D^{-\frac{1}{2}}v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}}-\frac{1}{s-1}\frac{\frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}}{2\mu+1}\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}),$$

und folglich

$$\lim_{\gamma\to\infty}f_\gamma(s)=\int_{E_2}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\sum_{\mathfrak{a}\text{ in }K}(\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^\mu e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}d\mathfrak{x}$$

$$+2\pi D^{-\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+2)\Big(\frac{D^{-\frac{1}{2}}v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}}-\frac{1}{s-1}\frac{\frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}}{2\mu+1}\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

$$+\int_{E_1}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\neq 0}\{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}\Big).$$

Von den beiden Integralen auf der rechten Seite dieser Formel zeigt man ähnlich wie früher, daß sie in der Halbebene $\sigma>\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}$ reguläre Funktionen von s sind. Folglich ist $s=\frac{3}{2}$ ein Pol erster Ordnung von $\zeta_1(\mathfrak{S},s)$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}}v(\mathfrak{S})$ und $s=1$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho=-\tfrac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})=D^{-\frac{1}{2}}\zeta(0)\sum_{\mathfrak{p}}v(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}).$$

Von den in Satz 3 ausgesprochenen Behauptungen bleibt noch die Funktionalgleichung (19) zu beweisen. Es sei jetzt $\frac{3}{4} - \frac{\mu}{2} < \sigma < 0$. Nach dem Vorbild von § 7 erhält man die Darstellung

$$\frac{\Gamma(2\lambda+2)}{\Gamma(2\mu+2)}\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$

$$= \sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\}} \lim_{\gamma\to\infty} \int_{E_{\mathfrak{b}\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x};$$

dabei wird summiert über ein volles System nicht-äquivalenter elliptischer und hyperbolischer $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ mit ganzem $\mathfrak{b}$, ferner bedeutet $E_{\mathfrak{b}\gamma}$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ auf dem Gebiete G_γ, das aus $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ entsteht, wenn man alle $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung (41) mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzem $\mathfrak{t}$ erfüllt ist. Bei denjenigen $\mathfrak{b}$, für welche der Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ auf $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ im $(n-2)$-dimensionalen projektiven Raum ein endliches nicht-euklidisches Volumen $v(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ hat, kann man die Rechnung in derselben Weise weiterführen wie in § 7. Besonders zu beachten sind jetzt aber die $\mathfrak{b}$, bei denen die Zahl $-D\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ ein positives Quadrat wird. Durchläuft $\mathfrak{q}$ alle diese $\mathfrak{b}$, so ergibt sich an Stelle der Funktionalgleichung (16) die Formel

$$(44)\quad \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = -D^{-\frac{1}{2}}\pi^{-(\frac{3}{2}-s)}\Gamma(\tfrac{3}{2}-s)\zeta_1(\mathfrak{S}^{-1}, \tfrac{3}{2}-s)$$
$$+ \pi^{-s}\Gamma(s)\frac{\Gamma(2\mu+2)}{\Gamma(2\lambda+2)} \sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\}} \lim_{\gamma\to\infty} \int_{E_{\mathfrak{q}\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}$$
$$\cdot \{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x}.$$

Man hat noch den Grenzwert auf der rechten Seite von (44) zu bestimmen.

Die beiden Tangenten von dem Punkt $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ der projektiven $\mathfrak{x}$-Ebene an den Kegelschnitt $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ berühren ihn in zwei rationalen Punkten $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$. Dies folgt aus der Formel (4) von § 2, wenn dort $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ gewählt und beachtet wird, daß im vorliegenden Falle die binäre quadratische Form mit der Matrix $\mathfrak{H}$ in das Produkt von zwei linearen Formen mit rationalen Koeffizienten zerfällt. Aus (42) folgt umgekehrt, daß die Tangenten in zwei parabolischen rationalen Punkten $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ sich in einem rationalen Punkte $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ treffen, für welchen die Zahl $-D\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ ein Quadrat ist. Ist $\mathfrak{C}$ eine Einheit der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$, so gehen bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ die beiden Tangenten von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ an den Kegelschnitt entweder in sich über oder sie vertauschen sich. Im ersten Falle ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$. Im zweiten Falle ist $|\mathfrak{C}| = -1$, und die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$ besteht aus den beiden Elementen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$; dieser Fall kann nur eintreten, wenn es überhaupt eigentliche Einheiten mit negativer Determinante gibt.

Es mögen zunächst alle Einheiten von $\Gamma(\mathfrak{S})$ positive Determinante haben. Dann besteht $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$ nur aus der Identität, und $E_{\mathfrak{q}\gamma}$ fällt mit

dem oben definierten Gebiete G_γ zusammen. Offenbar erhält man alle in (44) auftretenden $\mathfrak{q}$ genau zweimal, indem man $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchlaufen läßt und jedesmal alle $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$ bestimmt, die in bezug auf die Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind. Entsprechend wie in § 3 sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ mit unimodularem $\mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\,(d\,0\,0)', \qquad \mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\mathfrak{x} = -\,h y_3^2 + (2\,a y_1 + b y_2 + 2\,c y_3)\,y_2,$$

wo d den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ bedeutet und $ad = 1$ der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist also $D = a^2 h$. Man erhält alle Elemente $\mathfrak{C}$ von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ in der Form

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{A}^{-1}, \qquad \mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix},$$

indem man für u, v, w alle den beiden Bedingungen

$$av = hw, \qquad 2\,au = hw^2 - 2\,cw$$

genügenden ganzen Zahlen setzt. Sämtliche $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit ganzem $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$, die in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind, erhält man aus $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{q} = (0\,\alpha\,\beta)'$, indem man für α, β alle Paare ganzer Zahlen mit $\beta \neq 0$ setzt, die in bezug auf die Gruppe $\alpha \to \alpha + w\beta$, $\beta \to \beta$ nicht-assoziiert sind. Wie in § 3 bedeute l eine natürliche Zahl, für welche $l\mathfrak{S}$ ganz ist. Man betrachte die durch die weitere Bedingung $w \equiv 0 \pmod{2\,al}$ definierte Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$, deren Index wieder mit $k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ bezeichnet werde. Bei festem β gibt es genau $2\,al\,|\beta|$ Paare α, β, die in bezug auf diese Untergruppe nicht-assoziiert sind. Zu festen $\mathfrak{p}$ und β gibt es also $\frac{2\,al\,|\beta|}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})}$ Systeme $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit ganzem $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$, die in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind. Es gilt dabei die Gleichung

$$\mathfrak{q}'\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = -\,h^{-1}\beta^2.$$

Es sei nun $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ der Berührungspunkt der anderen von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ an $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ gezogenen Tangente. Man setze

$$\mathfrak{S}^{-1}\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}) = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{z},$$

$$(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}} = \xi > 0, \qquad z_1 : z_3 = \eta, \qquad \xi : z_3 = \zeta,$$

$$(-\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}} = h^{-\frac{1}{2}}\,|\beta| = \varrho > 0, \qquad \mathfrak{p}'\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{r} = \tau > 0.$$

Dann wird

$$\frac{d\,(x_1, x_2, x_3)}{d\,(\xi, \eta, \zeta)} = D^{-\frac{1}{2}}\,\varrho\,\xi^2\,\zeta^{-2}, \tag{45}$$

$$(\mathfrak{x} + 2\,\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x} + 2\,\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}) = \xi^2 + 4\,\pi^2\,\varrho^2 - 4\,\pi i \varrho^2\,\xi\eta\,\zeta^{-1}. \tag{46}$$

Dem Gebiet G_γ des x-Raumes entspricht im $\xi\eta\zeta$-Raume das Bild B_γ, das durch die unendlich vielen Ungleichungen

$$\gamma^{-\frac{1}{2}}|\zeta| \leqq \left|\left(\eta, \frac{\zeta^2+\varrho^2\eta^2}{2\tau}, 1\right)\mathfrak{B}'\mathfrak{t}\right|, \qquad \xi > 0 \tag{47}$$

definiert wird, wobei $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ alle parabolischen Punkte mit teilerfremden Elementen von $\mathfrak{t}$ durchläuft. Dabei kann man noch voraussetzen, daß $\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p} \geqq 0$ ist. Für $\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$ liefert (47) die Ungleichung

$$|\zeta| \leqq \tau\gamma^{\frac{1}{2}},$$

und für $\mathfrak{t} \neq \pm\mathfrak{p}$ erhält man

$$\left(\varrho\eta + \frac{\tau\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}}{\varrho\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}}\right)^2 \geqq \frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}}|\zeta| - \zeta^2. \tag{48}$$

Nach (45) und (46) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int\limits_{G_\gamma} &(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\,\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}\,d\mathfrak{x} \\ &= D^{-\frac{1}{2}}\varrho\iiint\limits_{B_\gamma}\xi^{2\lambda+2}\,\zeta^{-2}(\xi^2+4\pi^2\varrho^2-4\pi i\varrho^2\xi\eta\zeta^{-1})^{-\mu-\frac{3}{2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned} \tag{49}$$

Genügt nun ζ für alle $\mathfrak{t} \neq \pm\mathfrak{p}$ der Bedingung

$$|\zeta| \geqq \frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}},$$

so ist (48) für beliebiges reelles η erfüllt, und die η-Integration auf der rechten Seite von (49) liefert dann den Wert 0. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}} = \zeta_\mathfrak{t}, \qquad -\frac{\tau\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}}{\varrho^2\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}} = \eta_\mathfrak{t}, \qquad \varrho^{-1}(\zeta_\mathfrak{t}|\zeta| - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_\mathfrak{t}(\zeta) \geqq 0,$$

so wird

$$\begin{aligned}\int\limits_{G_\gamma} &(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\,\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}\,d\mathfrak{x} \\ &= -\frac{D^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i\varrho\,(2\mu+1)}\sum_{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}>0}\int_0^\infty \xi^{2\lambda+1} \\ &\cdot\left\{\int_{-\zeta_\mathfrak{t}}^{\zeta_\mathfrak{t}}[(\xi^2+4\pi^2\varrho^2-4\pi i\varrho^2\xi\eta\zeta^{-1})^{-\mu-\frac{1}{2}}]_{\eta=\eta_\mathfrak{t}-\varepsilon_\mathfrak{t}(\zeta)}^{\eta=\eta_\mathfrak{t}+\varepsilon_\mathfrak{t}(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}d\xi \\ &= \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{\pi i\varrho\,(2\mu+1)}\sum_{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}>0}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|^{2\lambda}\,\xi \\ &\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\xi^2+4\pi^2\varrho^2+4\pi i\xi\left(\varrho t-\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\,\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{1+t^2}{2}\right)\right\}^{-\mu-\frac{1}{2}}\frac{t\,dt}{1+t^2}\right)d\xi.\end{aligned} \tag{50}$$

In der letzten Summe hat nun das Glied mit $t = r$ den von γ freien Wert

$$(51)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{2\lambda}\xi \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + 4\pi^2\varrho^2 + 4\pi i\xi\varrho t)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{t\,dt}{1+t^2} \right\} d\xi$$

$$= -2\pi i \int_0^\infty \xi^{2\lambda+1}(\xi + 2\pi\varrho)^{-2\mu-1}\,d\xi = -2\pi i (2\pi\varrho)^{2s-2} \frac{\Gamma(2\lambda+2)\,\Gamma(2-2s)}{\Gamma(2\mu+1)},$$

während die Summe aller übrigen Glieder für $\gamma \to \infty$ den Grenzwert 0 besitzt. Aus (44), (50) und (51) erhält man unter Benutzung der früher gefundenen Anzahl der $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ bei festen $\mathfrak{p}, \beta$ die Formel

$$(52)\qquad \pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + D^{-\frac{1}{2}}\pi^{-(\frac{3}{2}-s)}\,\Gamma(\tfrac{3}{2}-s)\,\zeta_1(\mathfrak{S}^{-1}, \tfrac{3}{2}-s)$$

$$= -2^{2s-2}\pi^{s-1}\,\Gamma(s)\,\Gamma(2-2s)\,D^{1-s} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{2l\,a^{2s-2}}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})} \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta^{2s-2}$$

$$= \frac{\pi^{-s}\,\Gamma(s)}{\cos \pi s}\,\zeta(2s-1)\,D^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\,a^{2s-2},$$

wobei a^{-1} der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ ist. Dies ist aber gerade die Funktionalgleichung (19).

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß es in $\Gamma(\mathfrak{S})$ auch Einheiten mit der Determinante -1 gibt. In diesem Fall lege man den Überlegungen dieses Paragraphen an Stelle von $\Gamma(\mathfrak{S})$ die Untergruppe der eigentlichen Einheiten mit der Determinante $+1$ zugrunde. An die Stelle von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\ a^{2s-2}$ treten dann die Ausdrücke $2\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $2\sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\ a^{2s-2}$, und die obige Rechnung führt genau zu der mit 2 multiplizierten Formel (52).

§ 10.

Zusammenhang mit der Theorie der Modulfunktionen.

Es sei x eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil. Die Funktionalgleichung von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ läßt sich in üblicher Weise vermöge der Mellinschen Transformation in eine Eigenschaft der Funktion

$$(53)\qquad f(\mathfrak{S}, x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\pi^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) v(\mathfrak{S}) + \sum_{\{\mathfrak{a}\}>0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\,e^{\pi i x\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}}$$

übersetzen, wenn n ungerade ist. Ist $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform, so liefert Satz 1 die Formel

$$f(\mathfrak{S}, x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{x}\right)^{\frac{n}{2}} f\left(\mathfrak{S}^{-1}, -\frac{1}{x}\right),$$

und hierdurch wird das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der Modulsubstitution $x \to -\frac{1}{x}$ zum Ausdruck gebracht.

Will man die Transformationstheorie von $f(\mathfrak{S}, x)$ für beliebige Modulsubstitutionen entwickeln, so hat man außer $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ auch analog gebildete Zetafunktionen mit Restklassen-Charakteren zu untersuchen. Die zum Beweise der Sätze 1, 2, 3 führenden Überlegungen lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen. Vermöge der Mellinschen Transformation erhält man dann das wichtige Resultat, daß die durch (53) definierte Funktion $f(\mathfrak{S}, x)$ eine Modulform der Dimension $\frac{n}{2}$ und der Stufe $2D$ ist; dabei wird vorausgesetzt, daß n ungerade und $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist.

Für ternäre Nullformen $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ ist dagegen $f(\mathfrak{S}, x)$ keine Modulform. Das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der speziellen Modulsubstitution $x \to -\frac{1}{x}$ läßt sich dann mit Hilfe von Satz 3 untersuchen. Man erhält die Formel

$$f(\mathfrak{S}, x) = -D^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{x}\right)^{\frac{3}{2}} f\left(\mathfrak{S}^{-1}, -\frac{1}{x}\right) - D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, e^{\pi i x y^2}}{e^{2\pi D^{-\frac{1}{2}} a y} - 1} d y,$$

wobei $\mathfrak{a}$ und a wie in Satz 3 zu erklären sind. Für den Fall der ternären Nullform $x_1 x_2 - x_3^2$ findet sich dieses Resultat in etwas anderer Gestalt bereits in der oben zitierten Abhandlung von Mordell.

(Eingegangen am 9. September 1937.)

Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in zwei Variablen.

Von

H. Maaß in Hamburg.

Die automorphen Formen von mehreren Variablen verdienen weitgehendes Interesse, da man einerseits durch Quotientenbildung alle automorphen Funktionen aus ihnen erhält und da sie andererseits das geeignete Hilfsmittel darstellen, mit dem man eine ganze Reihe von zahlentheoretischen Problemen erfolgreich anzugreifen vermag. So führt z. B. die Frage nach der Darstellbarkeit ganzer Zahlen eines total reellen Zahlkörpers Z vom Absolutgrad n durch eine total positiv definite quadratische Form Q von k Variablen und ganzzahligen Koeffizienten aus Z auf die Betrachtung von Formen der Dimension $-k/2$; man bilde nämlich die zu Q gehörige ϑ-Reihe, die bekanntlich eine solche Form in n-Variablen darstellt. Man kann also auf Formen gebrochener Dimension nicht verzichten. Darüber hinaus erwächst aus dieser Erkenntnis das Bedürfnis nach einer systematischen Begründung einer Theorie der Formen in mehreren Variablen von beliebiger Dimension. Die vorliegende Untersuchung stellt einen ersten Versuch in dieser Richtung dar. Bei diesem Vorhaben kommt mir der Umstand zustatten, daß ich mich — soweit es sich um die Entwicklung des analytischen Apparats handelt — auf die Peterssonschen Arbeiten[1]) stützen kann, in denen eine Theorie der automorphen Formen in einer Variablen im wesentlichen vollständig entwickelt ist. Da die allgemeinen Schwierigkeiten, die sich bei der Untersuchung von analytischen Funktionen von mehreren Variablen einstellen, bereits bei der Variablenzahl 2 in vollem Umfang zur Geltung kommen, so scheint mir eine Beschränkung auf diesen Spezialfall gerechtfertigt. Es handelt sich also um die Konstruktion von Formen zu einer beliebigen Untergruppe der (engeren) Hilbertschen Modulgruppe eines reell quadratischen Zahlkörpers $Z = R(\sqrt{D})$ oder allgemeiner: zu einer beliebigen im Bereich $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$, $\mathfrak{Im}\,\tau' < 0$ diskontinuierlichen Gruppe reeller unimodularer simultaner Substitutionen

$$(1) \qquad \tau \to \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \qquad \tau' \to \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'},$$

[1]) H. Petersson, Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen, Math. Annalen **103** (1930), S. 369, im folgenden zitiert mit A; Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie, Hamburger Abhandlungen, Bd. 8 (1930). S. 215, im folgenden zitiert mit E.

unter denen auch Paare von parabolischen Substitutionen vorkommen mögen. Von dem eigentlichen Ziel, ein vollständiges System von Formen explizit anzugeben, aus denen man jede vorgegebene Form linear zusammensetzen kann, sind wir natürlich noch weit entfernt. Wir sind jedoch imstande, das Peterssonsche Konstruktionsprinzip, welches im Falle einer Variablen ein im genannten Sinne vollständiges Formensystem liefert (vgl. A), auf zwei Variable zu übertragen. Man erhält eine Reihe neuartiger noch nicht untersuchter Formen. Aus der Fülle der Konstruktionsaufgaben, die sich jetzt darbieten, greifen wir nur eine spezielle heraus. Wir konstruieren nämlich zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(\nu)$ der Hilbertschen Modulgruppe zur Idealstufe $\nu \equiv 0$ (4) ein System von ganzen Formen G_{-r} halbzahliger Dimension $-r = -k/2$ $(k \geqq 3)$ mit ϑ-Multiplikatoren derart, daß eine beliebige Form vom gleichen Typus mit Hilfe der G_{-r} bis auf eine ganze Form reduziert werden kann, welche in allen parabolischen Fixpunkten von $\Gamma(\nu)$ verschwindet. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die Idealklassenzahl von Z gleich 1, die Diskriminante D von Z kongruent 5 mod 8 und im Falle $k = 3$ die Norm der Grundeinheit von Z gleich -1 ist. Die Anzahl der linear unabhängigen unter den Formen G_{-r} (fester Dimension) ist gleich der Zahl der nach $\Gamma(\nu)$ inäquivalenten parabolischen Fixpunkte der $\Gamma(\nu)$. Diese Aussage ist für die entsprechenden Formen der Dimension $-3/2$ in einer Variablen, die ich in einer früheren Arbeit[2]) untersucht habe, falsch, was darauf zurückzuführen ist, daß die Residuen einer ganzen Form (in einer Variablen) der Dimension $-3/2$ mit ϑ-Multiplikatoren in den parabolischen Fixpunkten nicht unabhängig vorgeschrieben werden können. Multipliziert man nämlich eine solche Form mit einer beliebigen ganzen Form der Dimension $-1/2$ mit ϑ-Multiplikatoren, so erhält man eine ganze Form der Dimension -2 mit den Multiplikatoren 1, und die Summe der Residuen dieser Form in einem System von nichtäquivalenten parabolischen Fixpunkten muß verschwinden.

Die sich anschließenden Betrachtungen beanspruchen ein wesentlich zahlentheoretisches Interesse. Es handelt sich um die Partialbruchentwicklung der von Herrn Siegel eingeführten analytischen Geschlechtsinvariante einer total positiv definiten ternären quadratischen Form Q[3]), wobei es, wie auch bei den oben genannten Formen $G_{-\frac{3}{2}}$ bedeutsame Konvergenzschwierigkeiten zu überwinden gilt. Bei der Aufstellung der Partialbruchreihen machen

---

[2]) H. Maaß, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variablen, Hamburger Abhandlungen Bd. 12, S. 133, im folgenden zitiert mit K I.; vgl. auch die Einleitung zu dieser Arbeit, die einen Bericht über die Resultate der vorliegenden Untersuchung enthält.

[3]) C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of Mathematics, Vol. 36, 37, 38.

wir uns den folgenden allgemeinen Sachverhalt zunutze: Es sei $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \tau')$ eine ganze Form der Dimension $-r$ mit den Multiplikatoren v zu einer Untergruppe Γ_0 der Hilbertschen Modulgruppe eines reell quadratischen Zahlkörpers $Z = R(\sqrt{D})$. Die Koeffizienten c_∞, c_α ($\alpha \subset Z$) der Eisensteinreihe

$$\psi(\tau) = c_\infty + \sum_{\alpha \subset Z} \frac{c_\alpha}{N(\tau - \alpha)^r}\ ^4), \tag{2}$$

wobei $\log(\tau - \alpha)$ und $\log(\tau' - \alpha')$ Hauptwerte bedeuten, seien so bestimmt, daß bei senkrechter Annäherung von τ, τ' an α, α'

$$\lim_{\tau \to \alpha} \left\{ \varphi(\tau) - \frac{c_\alpha}{N(\tau - \alpha)^r} \right\} = 0,$$

und bei senkrechter Annäherung von τ, τ' an $i\infty$, $i\infty$

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = c_\infty$$

gilt. Dann ist die Partialbruchreihe $\psi(\tau)$ — sofern sie konvergiert — eo ipo eine ganze Form zu Γ_0 vom gleichen Typus wie $\varphi(\tau)$. Bedeutet

$$Q(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{k} q_{\nu\mu} x_\nu x_\mu, \qquad \mathfrak{Q} = (q_{\nu\mu}) = (q_{\mu\nu})$$

eine total positiv definite ganzzahlige primitive quadratische Form, so finden wir zu der ϑ-Reihe

$$f(\mathfrak{Q}; \tau, \tau') = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_k \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{Q(\mu_1, \ldots, \mu_k)\tau}{\sqrt{D}}}$$

($\mathfrak{o}$ = Maximalordnung von Z)

eine Partialbruchreihe $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ vom Typus (2). Entwickelt man $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ in eine „Potenzreihe" der Gestalt

$$a_0 + \sum_{\substack{\mu \subseteq \mathfrak{o} \\ \mu \gg 0}} a_\mu e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{D}}},$$

so erkennt man aus der Struktur der Koeffizienten a_μ, daß $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ mit der von Herrn Siegel definierten Geschlechtsinvariante zur Form $\mathfrak{Q}$ identisch ist. In dem Fall, der hier besonders interessiert, daß es sich um eine ternäre Form handelt, konvergiert die Partialbruchreihe $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ nicht mehr. Man führt dann in geläufiger Weise eine Hilfsvariable s ein und definiert den Wert der Partialbruchreihe als den Wert der in s analytischen Funktion $F(\mathfrak{Q}; \tau, s)$

---

[4]) Beim Gebrauch der Spur- und Normzeichen: S, N halte ich mich an die traditionellen Festsetzungen; so ist z. B. $N(\tau - \alpha)^r = (\tau - \alpha)^r (\tau' - \alpha')^r$, wobei α' die konjugierte Zahl zu α bedeutet.

im Punkte $s = 0$. Der Nachweis der analytischen Fortsetzbarkeit von $F(\mathfrak{Q}; \tau, s)$ bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ erfordert eine etwas langwierige Rechnung. Die Schwierigkeiten bei der Konstruktion der oben genannten Formen $G_{-\frac{s}{2}}$ sind von der gleichen Art.

Herrn Petersson danke ich für freundliche Ratschläge und für das Interesse, welches er dieser Untersuchung entgegenbrachte.

§ 1.

Faktorsysteme in zwei Variablen. Das ϑ-Multiplikatorsystem.

Wir verschaffen uns die Hilfsmittel, die es ermöglichen, Formen nichtganzer Dimension in zwei Variablen zu konstruieren. Als Vorbild dient uns die Peterssonsche Theorie der automorphen Formen reeller Dimension (A). Zugrunde gelegt sei ein reell quadratischer Zahlkörper $Z = R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D. $\mathfrak{o}$ bezeichne den Bereich der ganzen Zahlen aus Z. Wenn $\mathfrak{N}$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$, dann bildet die Menge der simultanen Substitutionen

$$\tau \to \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \tau' \to \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\ [5]), \tag{3}$$

mit

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (\mathfrak{N})$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(\mathfrak{N})$ zur Idealstufe $\mathfrak{N}$. Insbesondere ist $\Gamma(1)$ die engere Hilbertsche Modulgruppe. Die Substitution (3) werde repräsentiert durch das Schema

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Eine im Bereich $\mathfrak{Im}\ \tau > 0$, $\mathfrak{Im}\ \tau' < 0$ eindeutige und analytische Funktion $\varphi(\tau) = \varphi(\tau, \tau')$ heißt eine Modulform der Dimension $-r$ mit dem Multiplikatorsystem v zur Gruppe Γ_0 ($\subset \Gamma(1)$), wenn für alle Substitutionen $S \subset \Gamma_0$

$$\varphi(S\tau) = v(S)\, N(\gamma\tau + \delta)^r\, \varphi(\tau), \quad \underline{S} = (\gamma, \delta)$$

gilt. Die Funktionszweige

$$N(\gamma\tau + \delta)^r = (\gamma\tau + \delta)^r\, (\gamma'\tau' + \delta')^r$$

ein für allemal zu fixieren, ist unsere erste Aufgabe. Seien c, d irgend zwei reelle Zahlen, die nicht zugleich verschwinden.

---

[5]) Zu $\omega \subset Z$, sei ω' die konjugierte Zahl.

1. $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$. Dann definieren wir $(c\tau + d)^r$ folgendermaßen:

$$(c\tau + d)^r = e^{r \log (c\tau + d)},$$

$$\log (c\tau + d) = \log |c\tau + d| + i \arg (c\tau + d),$$

$$\arg (c\tau + d) = \begin{cases} \arg\left(\tau + \frac{d}{c}\right) - \arg c & \text{für } c \neq 0, \\ \arg d & \text{für } c = 0. \end{cases}$$

$$\arg d = \frac{1 - \operatorname{sgn} d}{2}\pi,$$

$$0 < \arg\left(\tau + \frac{d}{c}\right) < \pi.$$

Es gilt daher

$$(c\tau + d)^r = |c|^r \left(\tau + \frac{d}{c}\right)^r e^{\pi i r \frac{\operatorname{sgn} c - 1}{2}} \quad \text{für } c \neq 0,$$

$$d^r = |d|^r e^{-\pi i r \frac{\operatorname{sgn} d - 1}{2}} \quad \text{für } c = 0,$$

(in Übereinstimmung mit den Festsetzungen in A).

2. $\mathfrak{Im}\,\tau' < 0$. Dann sei

$$(c\tau' + d)^r = e^{r \log (c\tau' + d)},$$

$$\log (c\tau' + d) = \log |c\tau' + d| + i \arg' (c\tau' + d),$$

$$\arg' (c\tau' + d) = \begin{cases} \arg\left(\tau' + \frac{d}{c}\right) - \arg' c & \text{für } c \neq 0, \\ \arg' d & \text{für } c = 0, \end{cases}$$

$$\arg' d = -\frac{1 - \operatorname{sgn} d}{2}\pi,$$

$$-\pi < \arg\left(\tau' + \frac{d}{c}\right) < 0,$$

also gilt

$$(c\tau' + d)^r = |c|^r \left(\tau' + \frac{d}{c}\right)^r e^{-\pi i r \frac{\operatorname{sgn} c - 1}{2}} \quad \text{für } c \neq 0,$$

$$d^r = |d|^r e^{\pi i r \frac{\operatorname{sgn} d - 1}{2}} \quad \text{für } c = 0.$$

Die Definition von d^r hängt also noch davon ab, ob ich in der oberen oder unteren Halbebene bin. Darauf ist zu achten.

Sind γ, δ zwei nicht zugleich verschwindende Zahlen aus Z, so resultiert also:

$$N(\gamma\tau + \delta)^r = |N\gamma|^r N \left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^r e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}} \quad \text{für } \gamma \neq 0, \tag{4}$$

$$N\delta^r = |N\delta|^r e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \delta \sqrt{D}} \quad \text{für } \gamma = 0.$$

Für zwei beliebige reelle, unimodulare Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\underline{M} \cdot S = (m_1^*, m_2^*),$$

definieren wir die Symbole $\sigma^{(r)}(M, S)$ und $\sigma_1^{(r)}(M, S)$ durch

$$(m_1 S\tau + m_2)^r = \sigma^{(r)}(M, S)\frac{(m_1^* \tau + m_2^*)^r}{(c\tau + d)^r} \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\tau > 0),$$

$$(m_1 S\tau' + m_2)^r = \sigma_1^{(r)}(M, S)\frac{(m_1^* \tau' + m_2^*)^r}{(c\tau' + d)^r} \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\tau' < 0).$$

Ihre Berechnung erfolgt auf Grund der Formeln:

$$\sigma^{(r)}(M, S) = e^{2\pi i r w(M,S)}, \qquad \sigma_1^{(r)}(M, S) = e^{2\pi i r w_1(M,S)}\,^{6}),$$

$$\arg(m_1 S\tau + m_2) + \arg(c\tau + d) - \arg(m_1^* \tau + m_2^*) = 2\pi w\ (M, S),$$
$$\arg'(m_1 S\tau' + m_2) + \arg'(c\tau' + d) - \arg'(m_1^* \tau' + m_2^*) = 2\pi w_1(M, S).$$

Für w und w_1 kommen offenbar nur die Werte $0, \pm 1$ in Frage. Aus

$$\arg(c\tau + d) + \arg'(c\bar{\tau} + d) = 0$$

erhellt, daß

$$w(M, S) + w_1(M, S) = 0.$$

w_1 ist also zu entbehren. Sind M, S Matrizen über Z, so erhält man schließlich für das Faktorensystem $\sigma_Z^{(r)}(M, S)$, definiert durch

$$N(m_1 S\tau + m_2)^r = \sigma_Z^{(r)}(M, S)\frac{N(m_1^* \tau + m_2^*)^r}{N(c\tau + d)^r}, \tag{5}$$

die Darstellung

$$\sigma_Z^{(r)}(M, S) = e^{2\pi i r S\{w(M,S)\,\mathrm{sgn}\,\sqrt{D}\}} \tag{6}$$

($S\{w\ (M, S)\ \mathrm{sgn}\ \sqrt{D}\} = w\ (M, S) - w\ (M', S')$, S' ist elementweise konjugiert zu S).

Speziell für $r \equiv \frac{1}{2}$ (1) folgt aus (6)

$$\sigma_Z(M, S) = \sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(M, S) = e^{\pi i S w(M,S)} = N\sigma^{(\frac{1}{2})}(M, S).$$

Die Werte für $\sigma^{(\frac{1}{2})}(M, S)$ entnimmt man der Tabelle in A, S. 378.

Für das Multiplikatorsystem v einer Form φ zu Γ_0 sind jetzt

$$v(L_1 L_2) = \sigma_Z^{(r)}(L_1 L_2)\, v(L_1)\, v(L_2), \quad L_i \subset \Gamma_0 \tag{7}$$

beweisbare Relationen. Es erhebt sich jetzt die Frage, ob es umgekehrt zu einem System v mit den Eigenschaften (7) Formen gibt, und wie man sie konstruiert. Mit einem speziellen Problem dieser Art werden wir uns beschäftigen. Wenn $\varphi(\tau)$ eine Form der Dimension $-r$ zur Gruppe Γ_0 mit dem Multiplikatorsystem v, so überzeugt man sich leicht, daß die mit $S \subset \Gamma(1)$ transformierte Form

$$\frac{\varphi(S\tau)}{N(\gamma\tau + \delta)^r} = \psi(\tau), \qquad S = (\gamma, \delta),$$

---

[6]) Betreffs der Werteverteilung von $w(M, S)$ verweise ich auf: H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, § 2, Satz 4, Math. Annalen 115 (1937), S. 23.

eine Form der Dimension $-r$ zur Gruppe $S^{-1}\Gamma_0 S$ mit dem transformierten Multiplikatoren

$$v^S(L) = v(SLS^{-1}) \cdot \frac{\sigma_Z^{(r)}(SLS^{-1}, S)}{\sigma_Z^{(r)}(S, L)} \qquad \text{für } L \subset S^{-1}\Gamma_0 S \tag{8}$$

darstellt. Wir berechnen jetzt das Multiplikatorsystem der ϑ-Reihe

$$\vartheta(\tau) = \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \tau}{\sqrt{D}}}$$

Der Vollständigkeit halber untersuchen wir das Verhalten von $\vartheta(\tau)$ und der transformierten Formen bei allen Substitutionen der Gruppe $\Gamma(1)$, genauer: bei einem unendlichen Erzeugendensystem von $\Gamma(1)$. Dabei wird (bis zum Schluß des Paragraphen)

$$D \equiv 5 \quad (8) \tag{8}$$

vorausgesetzt. Für zwei beliebige ganze Zahlen a, b betrachten wir die Funktionen

$$\psi_{a,b}(\tau) = \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}}{}' (-1)^{S\frac{b\mu}{\sqrt{D}}} e^{\pi i S \frac{\left(\mu + \frac{a}{2}\right)^2 \tau}{\sqrt{D}}}. \tag{9}$$

In jeder Restklasse mod 2 zeichnen wir einen Repräsentanten aus; $\bar{\alpha}$ bezeichne den Repräsentanten in der Restklasse von α ($\subset \mathfrak{o}$); wir verabreden noch: $\overline{\infty} = \infty' = \infty$. Mit den üblichen Festsetzungen über das Rechnen mit dem Symbol ∞ besteht dann vermöge der Beziehung

$$a \equiv \frac{1}{\varrho' + \sigma'}, \qquad b \equiv \frac{\varrho'\sigma'}{\varrho' + \sigma'} \quad (2) \tag{10}$$

eine eineindeutige Zuordnung der geordneten Paare $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ $(a, b \subset \mathfrak{o})$ und der ungeordneten Paare $\{\bar{\varrho}, \bar{\sigma}\}$ $(\varrho, \sigma \subset \mathfrak{o} + \infty,\ \bar{\varrho} \neq \bar{\sigma})$. Wir definieren

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau) = \vartheta_{\bar{\varrho},\bar{\sigma}}(\tau) = \psi_{\bar{a},\bar{b}}(\tau).$$

Wegen

$$\psi_{a,b}(\tau) = e^{\pi i S \frac{(a-\bar{a})b}{2\sqrt{D}}} \psi_{\bar{a},\bar{b}}(\tau)$$

folgt also

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau) = e^{\pi i S \frac{(a-\bar{a})b}{2\sqrt{D}}} \psi_{a,b}(\tau).$$

Es gilt dann der folgende

Satz 1. *Die Substitutionen $S \subset \Gamma(1)$ führen die Gesamtheit der Reihen $\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau)$ in sich über.*

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(S\tau) = v_{\varrho,\sigma}(S) N(\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}} \vartheta_{S^{-1}\varrho,\, S^{-1}\sigma}(\tau), \qquad \underline{S} = (\gamma, \delta), \tag{11}$$

$$|v_{\varrho,\sigma}(S)| = 1.$$

Es genügt, die Behauptung für die Substitutionen

$$U^{\omega} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\omega \subset \mathfrak{o}, \quad \varepsilon = \text{beliebige Einheit}, \quad \gamma \equiv 0\,(2)\ \gamma \neq 0,$$

zu beweisen, da man aus diesen alle gewinnen kann. Ich skizziere den Verlauf der Rechnung für die Substitution S_1. Seien a, b schon so gewählt, daß

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b.$$

Wenn

$$\tau_1 = S_1 \tau = \frac{\alpha}{\gamma} + \tau_2, \qquad 4\gamma^2 \tau_2 = \tau_3 = -\frac{4}{\tau + \frac{\delta}{\gamma}},$$

so wird

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau_1) = \sum_{r_0 \bmod 2\gamma} (-1)^{S\frac{b r_0}{\sqrt{D}}} e^{\pi i S \frac{\left(r_0 + \frac{a}{2}\right)^2 \alpha}{\gamma \sqrt{D}}} \sum_{r \equiv r_0\,(2\gamma)} e^{\pi i S \frac{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2 \tau_2}{\sqrt{D}}}.$$

Die innere Summe ist gleich

$$\sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{\left(\mu + \frac{2 r_0 + a}{4\gamma}\right)^2 \tau_3}{\sqrt{D}}}$$

und wird durch die Heckesche Thetatransformationsformel in

$$\frac{1}{4} N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda \subset \mathfrak{o}} e^{-\pi i S \frac{\lambda (2 r_0 + a)}{2\gamma \sqrt{D}} + \pi i S \frac{\lambda^2 (\gamma \tau + \delta)}{4\gamma \sqrt{D}}}$$

übergeführt. Trägt man dies ein, so erhält man nach einfachen Umrechnungen

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau_1) = \frac{1}{4} N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda_0 \bmod 4\gamma} e^{-\pi i S \frac{\lambda_0 a}{2\gamma \sqrt{D}} + \pi i S \frac{\lambda_0^2 \delta}{4\gamma \sqrt{D}}}$$

$$\times \sum_{r_0 \bmod 2\gamma} e^{\pi i S \left\{ \frac{b r_0}{\sqrt{D}} + \frac{\left(r_0 + \frac{a}{2}\right)^2 \alpha}{\gamma \sqrt{D}} - \frac{\lambda_0 r_0}{\gamma \sqrt{D}} \right\}} \sum_{\lambda \equiv \lambda_0\,(4\gamma)} e^{\pi i S \frac{\lambda^2 \tau}{4\sqrt{D}}}.$$

Die Summe über $r_0 \bmod 2\gamma$ verschwindet nur dann nicht, wenn

$$a\alpha \equiv \lambda_0\,(2).$$

Setzt man daher $\lambda_0 = a\alpha + 2\nu$, wo also $\nu \bmod 2\gamma$ läuft, so wird

$$\sum_{r_0 \bmod 2\gamma} = 4 e^{\pi i S \left\{ \frac{a^2 \alpha}{4\gamma \sqrt{D}} - \frac{\left(\nu - \frac{b\gamma}{2}\right)^2}{\alpha \gamma \sqrt{D}} + \frac{\mu_1^2}{\alpha \gamma \sqrt{D}} \right\}} \cdot H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right),$$

wobei $\mu_1 = \alpha \mu_0 - \nu + \frac{b\gamma}{2}$ und μ_0 so bestimmt ist, daß $\mu_1 \equiv 0\,(\gamma)$; ferner ist

$$H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{\mu \bmod \gamma} e^{\pi i S \frac{\mu^2 \alpha}{\gamma \sqrt{D}}}.$$

Beachtet man bei weiterer Umformung

$$\mu_0 \equiv \alpha' \nu - \frac{\alpha' b \gamma}{2} (2),$$

$$S \frac{\beta \alpha' \nu^2}{\sqrt{D}} \equiv S \frac{\beta' \alpha \nu}{\sqrt{D}} (2),$$

so erhält man schließlich

$$\vartheta_{\varrho,\sigma}(\tau_1) = N\left(\tau + \frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) \cdot e^{\frac{\pi i}{4} S \left\{\frac{a^2 \alpha\beta + b^2 \gamma(\gamma\beta\alpha' - \delta)}{\sqrt{D}}\right\}}$$

$$\times \sum_{\nu \subset \mathfrak{o}} (-1)^{S\left\{\frac{\nu(a\beta + b\delta + \beta'\alpha)}{\sqrt{D}}\right\}} e^{\pi i S \frac{\left(\nu + \frac{a\alpha}{2}\right)^2 \tau}{\sqrt{D}}}$$

Setzt man

$$a_1 = a\alpha, \quad b_1 = a\beta + b\delta + \beta'\alpha,$$
$$S_1^{-1}(\varrho, \sigma) \equiv (\varrho_1, \sigma_1) (2),$$

so folgt in der Tat

$$a_1 \equiv \frac{1}{\gamma_1' + \sigma_1'}, \quad b_1 \equiv \frac{\varrho_1' \sigma_1'}{\varrho_1' + \sigma_1'} (2),$$

außerdem

$$(12) \quad v_{\varrho,\sigma}(S_1) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn}\gamma \sqrt{D}}$$

$$\times e^{\frac{\pi i}{4} S \left\{\frac{a^2 \alpha\beta + b^2 \gamma(\gamma\beta\alpha' - \delta)}{\sqrt{D}}\right\} + \pi i S \frac{(a\alpha - \overline{a\alpha})(a\beta + b\delta + \beta'\alpha)}{2\sqrt{D}}}$$

Die Rechnung für die übrigen Substitutionen ist einfacher und liefert

$$(13) \quad \begin{cases} v_{\varrho,\sigma}(U^\omega) = e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{a^2 \omega}{\sqrt{D}}} \\ v_{\varrho,\sigma}(S_0) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} a \sqrt{D} + \pi i S \frac{(a a - \overline{a a}) b a'}{2\sqrt{D}}} \\ v_{\varrho,\sigma}(T) = e^{-\frac{\pi i}{2} S \frac{a b}{\sqrt{D}}}. \end{cases}$$

Fordern wir noch $\bar{0} = 0$, so wird

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_{0,\infty}(\tau)$$

und man erkennt, daß die maximale Gruppe, die $\vartheta(\tau)$ festläßt, aus allen Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma(1)$$

besteht, für welche

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 (2) \quad \text{oder} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0 (2).$$

Diese Gruppe hat in $\Gamma(1)$ den Index 10; wir bezeichnen sie mit Γ_{10}. Ich merke noch an, daß Γ_{10} nur mit ihren eignen Elementen vertauschbar ist, d. h. aus $S\Gamma_{10}S^{-1} = \Gamma_{10}$ folgt $S \subset \Gamma_{10}$. Die Multiplikatoren von $\vartheta(\tau)$:

$$v(S) = v_{0,\infty}(S) \quad S \subset \Gamma_{10}$$

setzen sich aus den vier Typen

$$(14)\quad \begin{cases} v(U^\omega) = 1, & (\omega \equiv 0\,(2)), \\ v(S_0) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} s \sqrt{D}}, & \\ v(T) = 1, & \\ v(S_1) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}}, & (\beta \equiv 0\,(2)) \end{cases}$$

nach der Regel (7) zusammen. S_1^{-1} ist selbst vom Typus S_1, daher gilt

$$v(S_1^{-1}) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}},$$

$$= |N\gamma|^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)^{-1} e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}}.$$

Wegen

$$\sigma_Z(S_1, S_1^{-1}) = 1 \quad (\text{da ja } \gamma \neq 0),$$

folgt also

$$v(S_1)\, v(S_1^{-1}) = 1, \quad \text{falls } S_1 \subset \Gamma_{10},$$

mithin

$$v(S_1) = |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \gamma \sqrt{D}}.$$

Halten wir uns an die Heckesche Bezeichnung der Gaußschen Summen

$$C(\omega) = \sum_{\alpha \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \alpha^2 \omega},$$

($\mathfrak{a}$ = Idealnenner von $\omega\sqrt{D}$)

dann ist

$$H\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right) = \frac{1}{4} C\left(\frac{\delta}{2\gamma\sqrt{D}}\right).$$

Das Reziprozitätsgesetz für Gaußsche Summen [7]), zweimal angewandt:

$$\frac{1}{4} |N\gamma|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{\delta}{2\gamma\sqrt{D}}\right) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \delta\gamma \sqrt{D}}\ |N\delta|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{-\gamma}{2\delta\sqrt{D}}\right),$$

$$|N\delta|^{-\frac{1}{2}} C\left(\frac{-\gamma}{2\delta\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{\gamma_1}{\delta}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn} \delta \sqrt{D}} \cdot \frac{1}{8} C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right),$$

falls $\gamma = 2\gamma_1$, liefert also

$$v(S_1) = \left(\frac{\gamma_1}{\delta}\right) N\sigma_{\gamma,\delta} \cdot \frac{1}{8} C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right),$$

wobei

$$\sigma_{\gamma,\delta} = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn}\gamma - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}\delta - 1}{2}}.$$

---

[1]) Vgl. E. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, §§ 54, 56, 59. Leipzig 1923.

Aus dem zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz für das quadratische Restsymbol entnimmt man die Beziehung

$$\frac{1}{8} C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{16} C\left(\frac{\delta}{8\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}},$$

so daß schließlich

$$v(S_1) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) N\sigma_{\gamma,\delta}\, e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}.$$

Für eine affine Substitution $S \subset \Gamma_{10}$ (d. h. $\gamma = 0$) zeigt man

$$v(S) = e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn}\delta \sqrt{D}}, \quad \underline{S} = (0, \delta).$$

Da nun δ eine Einheit ist, so ist $\frac{1}{8} C\left(\frac{\delta}{4\sqrt{D}}\right)$ sowohl gleich $e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}$ als auch gleich $e^{\frac{\pi i}{4} S \operatorname{sgn}\delta \sqrt{D}}$, folglich ist

$$v(S) = e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}}.$$

Mit den gleichen Hilfsmitteln bestimmt man die Multiplikatorwerte für die Substitutionen $S = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \subset \Gamma_{10}$, für welche $\alpha \equiv \delta \equiv 0\,(2)$:

$$v(S) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \frac{\gamma^3}{\sqrt{D}}} \quad (\gamma \not\equiv 0\,(2)).$$

Wir definieren nun das im Zähler bzw. im Nenner periodische Restsymbol $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^*$ bzw. $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_*$, wie folgt:

δ sei prim zu 2; $\gamma, \delta \subset \mathfrak{o}$.

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^* = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right),$$

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) N\sigma_{\gamma,\delta} & \text{für } \gamma \neq 0, \\ 1 & \text{für } \gamma = 0, \quad \delta = \text{Einheit}, \\ 0 & \text{für } \gamma = 0, \quad \delta \neq \text{Einheit}. \end{cases}$$

Für $\alpha\alpha_1 \not\equiv 0$, $\nu\nu_1\mu$ prim zu 2 gelten dann die Regeln

$$\left(\frac{-1}{\nu}\right)_* = \left(\frac{-1}{\nu}\right)^* \operatorname{sgn} N\nu = (-1)^{\frac{N\nu-1}{2}},$$

$$\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)^*, \quad \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)_* = \left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)_* N\sigma_{\nu,\alpha\alpha_1} \quad \text{für } \alpha \equiv \alpha_1\,(\nu),$$

(15)

$$\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\alpha}{\nu_1}\right)^* N\sigma_{\alpha,\nu\nu_1}, \quad \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)_* = \left(\frac{\alpha}{\nu_1}\right)_* \quad \text{für } \nu \equiv \nu_1\,(4\alpha),$$

$$\left(\frac{2}{\nu}\right)^* = \left(\frac{2}{\nu}\right)_* = 1, \quad \text{falls } \nu \text{ hyperprimär nach 8 (d. h. quadratischer Rest mod. 8),}$$

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^*\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^* = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_*\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_* = N\sigma_{\nu,\mu}, \text{ falls } \nu \text{ oder } \mu \text{ primär (d. h. quadratischer Rest mod. 4),}$$

$$(15)\quad \left.\begin{aligned} \left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)_* &= \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^*\left(\frac{-1}{\nu}\right)_* \\ \left(\frac{\nu}{\mu}\right)_*\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^* &= \left(\frac{\nu_1}{\mu}\right)_*\left(\frac{\mu}{\nu_1}\right)^* \\ \left(\frac{2}{\nu}\right)_*\left(\frac{2}{\nu_1}\right)_* &= \left(\frac{2}{\nu}\right)^*\left(\frac{2}{\nu_1}\right)^* = e^{\pi i S\frac{\nu'\nu_1}{4\sqrt{D}}} \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu \equiv \nu_1\,(4).$$

Das Zahlsystem $v_0(S)$, $S \subset \Gamma(1)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, erklärt durch

$$v_0(S) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* & \text{für } 2 \mid \gamma, \\ \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^* & \text{für } 2 \nmid \gamma, \end{cases}$$

definiert ein Multiplikatorsystem zu $\Gamma(4)$. Darüber hinaus gilt

Satz 2. *Für S_1, $S_2 \subset \Gamma(1)$ ist*

$$v_0(S_1 S_2) = \sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(S_1, S_2)\, v_0(S_1)\, v_0(S_2),$$

sobald S_1 oder $S_2 \subset \Gamma(4)$.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Regeln (15) (vgl. A, S. 402—404). Nur ein Fall ist erwähnenswert. Wenn nämlich die ersten Elemente der zweiten Zeilen von S_1 und S_2 verschwinden, so wird behauptet

$$\sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(S_1, S_2) = N\sigma_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 1, \qquad \underline{S_i} = (0, \varepsilon_i).$$

Da eine der Einheiten ε_i kongruent 1 mod 4 ist, so ist das eine Folge des Reziprozitätsgesetzes:

$$1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^* = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)_* = N\sigma_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Satz 2 ermöglicht den Nachweis, daß das mit $S \subset \Gamma(1)$ transformierte Multiplikatorsystem v_0^S mit v_0 identisch ist. Sei nämlich

$$LS = SL_1, \quad L, L_1 \subset \Gamma(4),$$

dann ist

$$\begin{aligned} v_0(LS) &= \sigma_Z(L, S)\, v_0(L)\, v_0(S), \\ v_0(SL_1) &= \sigma_Z(S, L_1)\, v_0(S)\, v_0(L_1), \end{aligned}$$

also

$$v_0(L_1) = v_0(L)\frac{\sigma_Z(L, S)}{\sigma_Z(S, L_1)} = v_0^S(L_1).$$

Wir verabreden, Vorzeichenbedingungen, denen Zahlen aus Z unterliegen, in Form von Kongruenzen nach unendlichen Primstellen zu schreiben. Es seien $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{p}'_\infty$ die unendlichen Primstellen von Z und

$$p_\infty = \mathfrak{p}_\infty \cdot \mathfrak{p}'_\infty.$$

Unter den Voraussetzungen

$$A \subset \Gamma(1),\ U^\nu = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_0 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix},\quad \eta = \text{Einheit},$$

$$\nu \equiv 0\,(4),\quad \eta \equiv 1\,(4\,p_\infty)$$

beweist man schließlich, indem man auf die Definition der Symbole zurückgeht,

$$\begin{aligned} \sigma_Z^{(\frac{1}{2})}(A, A^{-1}U^\nu S_0 A) &= 1, \\ v_0(A^{-1}U^\nu S_0 A) &= 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Davon machen wir im folgenden Paragraphen Gebrauch.

Erklären wir noch $\varkappa(S)$ für $S \subset \Gamma(1)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$ durch

$$\varkappa(S) = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\delta^3}{\sqrt{D}}} & \text{für } 2 \mid \gamma, \\ e^{-\frac{\pi i}{4} S \frac{\gamma^3}{\sqrt{D}}} & \text{für } 2 \nmid \gamma, \end{cases}$$

so nimmt das ϑ-Multiplikatorsystem die einfache Gestalt

$$v(S) = v_0(S)\,\varkappa(S) \quad \text{für } S \subset \Gamma_{10} \tag{17}$$

an; insbesondere gilt also

$$v(S) = v_0(S) \quad \text{für } S \subset \Gamma(8).$$

§ 2.

Formen zur Idealstufe $\mathfrak{N}$.

Die Vorbereitungen sind jetzt soweit gediehen, daß wir mit der Aufstellung der ganzen Formen mit den Multiplikatoren $v_0(S)$ zur Idealstufe $\mathfrak{N}$ beginnen können. $\mathfrak{N}$ sei ein fest gewähltes, durch 4 teilbares ganzes Ideal aus $\mathfrak{o}$. Für den Rest der Arbeit sei ständig

$$D \equiv 5\,(8).$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiger ganzer Modul, der neben endlichen auch unendliche Primstellen enthalten darf, so heißen zwei Zeilen (γ, δ) und (γ_1, δ_1) mod $\mathfrak{a}$ assoziiert, wenn es eine Einheit

$$\eta \equiv 1\,(\mathfrak{a})$$

gibt, derart, daß

$$\gamma = \eta\gamma_1,\quad \delta = \eta\delta_1.$$

Wir wählen aus der Nebengruppe $A \cdot \Gamma(\mathfrak{N})$, $A \subset \Gamma(1)$, ein vollständiges System $\mathfrak{S}(A, \Gamma(\mathfrak{N}))$ von Matrizen aus, die zu je zweien mod $\mathfrak{N}\,p_\infty$ nicht

assoziierte zweite Zeilen haben. In der Schar der zu (γ, δ) mod $\mathfrak{a}$ assoziierten Zeilen bezeichne $(\gamma, \delta)_{\mathfrak{a}}$ einen Repräsentanten. Analoge Betrachtungen wie in E zeigen, daß die Reihen

$$(18)\quad E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma(\mathfrak{N}))} \frac{1}{\lambda(M) N(\mu_1 \tau + \mu_2)^r |\mu_1 \tau + \mu_2|^s},$$

wobei $M = AL$, $\underline{M} = (\mu_1, \mu_2)$, $\lambda(M) = \sigma_Z(A, L)\, v_0(L)$, $r = \frac{k}{2}$ ($k = 1, 3, 5, \ldots$), auf Grund von (16) von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A, \Gamma(\mathfrak{N}))$ unabhängig sind und sich bei den Substitutionen $S \subset \Gamma(1)$ folgendermaßen verhalten:

$$(19)\quad \frac{E_{-r}(S\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N}))}{N(\gamma\tau + \delta)^r |\gamma\tau + \delta|^s} = \frac{1}{\sigma_Z(A, S)} \cdot E_{-r}(\tau, s; v_0, AS, \Gamma(\mathfrak{N})),$$

$$\underline{S} = (\gamma, \delta),$$

insbesondere für $S \subset \Gamma(\mathfrak{N})$:

$$(20)\quad \frac{E_{-r}(S\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N}))}{N(\gamma\tau + \delta)^r |\gamma\tau + \delta|^s} = v_0(S)\, E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})).$$

Die Reihen E_{-r} sind wegen $|\lambda(M)| = 1$ für $\Re e\, s > 2 - r$ absolut konvergent und in s analytisch. Für die Reihen

$$(21)\quad G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \mathfrak{N}) = \sum_{\substack{(\mu_1, \mu_2) \mathfrak{N} p_\infty \\ \mu_1 \equiv \alpha_1 (\mathfrak{N}) \\ \mu_2 \equiv \alpha_2 (\mathfrak{N}) \\ (\mu_1, \mu_2) = 1}} \frac{v_0(\mu_1, \mu_2)}{N(\mu_1 \tau + \mu_2)^r |\mu_1 \tau + \mu_2|^s}$$

$$= \frac{1}{v_0(A)} E_{-r}(\tau, s; v_0, A, \Gamma(\mathfrak{N})),$$

$$(\underline{M} = (\mu_1, \mu_2),\ v_0(M) = v_0(\mu_1, \mu_2),\ \underline{A} = (\alpha_1, \alpha_2)),$$

die wir jetzt eingehend untersuchen, gelten nach (19) die Transformationsformeln

$$(22)\quad \frac{G_{-r}(S\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \mathfrak{N})}{N(\gamma\tau + \delta)^r |\gamma\tau + \delta|^s} = \frac{v_0(AS)}{\sigma_Z(A, S)\, v_0(A)} G_{-r}(\tau, s; (\alpha_1, \alpha_2)S, \mathfrak{N}).$$

Bei der weiteren Diskussion beschränken wir uns auf die Körper mit der

$$\text{Klassenzahl} = 1.$$

Wir setzen dann (in fester Bedeutung):

$$\mathfrak{N} = \nu, \quad (\mu_1, \nu) = (\alpha_1, \nu) = \gamma,$$

$$\mu_1 = \gamma\mu_1^*, \quad \alpha_1 = \gamma\alpha_1^*, \quad \nu = \gamma\nu^* = 4\nu_0,$$

$$v_0(\mu_1, \mu_2) = v_0(\gamma, \alpha_2)\, u(\mu_1^*, \mu_2).$$

Dabei ist

$$u(\mu_1^*, \mu_2) = \begin{cases} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1^*}\right)^* & \text{für } 2 \nmid \alpha_1, \\ \left(\frac{\mu_1^*}{\mu_2}\right)_* & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \mid \nu \text{ oder } 4 \mid \gamma, \\ \left(\frac{\mu_1^*}{\alpha_2}\right)_* \left(\frac{\alpha_2}{\mu_1^*}\right)^* e^{\frac{\pi i}{4} S \frac{\alpha_2' \mu_2}{\sqrt{D}}} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1^*}\right)^* & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \nmid \nu,\ 4 \nmid \gamma, \end{cases}$$

und für beliebiges ganzes λ gilt

$$u(\mu_1^*, \mu_2 + \lambda \nu \mu_1^*) = e^{2\pi i S \frac{\lambda \eta}{\sqrt{D}}} u(\mu_1^*, \mu_2),$$

wobei

$$\eta = \begin{cases} \frac{\nu_0}{2} & \text{für } 2 \mid \alpha_1,\ 8 \nmid \nu,\ 4 \nmid \gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Verschiebungsinvarianz von u und die verallgemeinerte Lipschitz-Formel:

$$(23) \qquad \sum_{\lambda \subset \mathfrak{o}} \frac{e^{-2\pi i S \frac{\lambda \eta}{\sqrt{D}}}}{N(\lambda + \omega)^r \, |\lambda + \omega|^s} = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i S \frac{(\varrho + \eta) x}{\sqrt{D}}} \, dx \, dx'}{N(\omega + x)^r \, |\omega + x|^s}$$

$$(\Im \mathfrak{m}\, \omega \neq 0, \quad \Im \mathfrak{m}\, \omega' \neq 0)$$

vermitteln uns die Fourierentwicklung

$$(24) \quad G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0 \, \delta(A) \, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_0 \sqrt{D}} + \frac{v_0(\gamma, \alpha_2)}{|N \nu^*|^r + s \sqrt{D}} e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \nu^* \sqrt{D}}$$

$$\times \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} \left\{ \sum_{\substack{(\mu_1)_{\nu p_\infty} \\ \mu_1 \equiv \alpha_1 (\nu) \\ \mu_1 \neq 0}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu_1 \sqrt{D}}}{|N \mu_1|^{r+s}} W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \right\} B_{\varrho + \eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right).$$

Dabei ist

$$e_0 = \begin{cases} 2, \text{ falls es eine Einheit } \varepsilon \equiv 1 \ (\nu),\ \varepsilon \not\equiv 1 \ (p_\infty) \text{ gibt}, \\ 1 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, \text{ falls } A \cdot \Gamma(\nu) \text{ eine affine Substitution enthält}, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

ε_0 eine Einheit $\begin{cases} \equiv \alpha_2 \ (\nu), & \text{falls } \delta(A) = 1, \\ = 1, & \text{falls } \delta(A) = 0, \end{cases}$

$(\mu_1)_{\nu p_\infty}$ ein Repräsentant aus der Schar der zu $\mu_1 \bmod \nu p_\infty$ assoziierten Zahlen,

$$W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{\beta \bmod \nu \mu_1^* \\ \beta \equiv \alpha_2 (\nu) \\ (\beta, \mu_1) = 1}} u(\mu_1^*, \beta) e^{2\pi i S \frac{\beta}{\nu \mu_1^* \sqrt{D}} (\varrho + \eta)},$$

$$B_{\varrho+\eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i S\frac{(\varrho+\eta)x}{\sqrt{D}}}}{N\left(\frac{\tau}{\nu^*}+x\right)^r \left|\frac{\tau}{\nu^*}+x\right|^s} dx\, dx'.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß das allgemeine Glied in der Dirichletreihe der Entwicklung (24) sich nicht ändert, wenn man μ_1 durch eine mod ν assoziierte Zahl ersetzt. Es reicht also, über $(\mu_1)_\nu$, $\mu_1 \equiv \alpha_1(\nu)$, $\mu_1 \neq 0$ zu summieren, wenn man die Reihe mit e_0 multipliziert. Durch eine affine Transformation der Integrationsvariablen wird das Doppelintegral $B_{\varrho+\eta}$ in

$$B_{\varrho+\eta}\left(s, \frac{\tau}{\nu^*}, r\right) = e^{-\frac{\pi i r}{2} S\operatorname{sgn}\nu^* \sqrt{D}} |N\nu^*|^{r+s-1} N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r)$$

übergeführt, wobei

$$N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r) = A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r) \cdot A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \tau', r),$$

$$A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \tau', r) = \overline{A_{-\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)'}(s, \overline{\tau'}, r)},$$

$$A_\lambda(s, \tau, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\lambda x} dx}{(\tau+x)^r |\tau+x|^s} \quad (\lambda \text{ reell}).$$

Damit ist die Berechnung von $B_{\varrho+\eta}$ auf die in K I, § 1 diskutierten Integrale zurückgeführt (vgl. in K I, Tabelle (9); daß n dort eine ganze Zahl ist, ist belanglos).

Wir erhalten also insgesamt:

$$(25)\quad G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0 \delta(A) e^{\frac{\pi i r}{2} S\operatorname{sgn} e_0 \sqrt{D}} + \frac{e_0 v_0(\gamma, \alpha_2)}{|N\gamma|^{r+s} |N\nu^*| \sqrt{D}} \sum_{\varrho \subset o} T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \cdot N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^*\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, r)$$

mit

$$(26)\quad T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{(\mu_1^*)_\nu \\ \mu_1^* \equiv \alpha_1^*(\nu^*) \\ \mu_1^* \neq 0}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S\operatorname{sgn}\mu_1 \sqrt{D}} W(\mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}}.$$

Der Weg, den man bei der Diskussion der Reihen T einschlägt, ist in E, § 5 bereits völlig vorgezeichnet. Ich kann mich daher gelegentlich, so bei der Auswertung der Koeffizienten W, darauf beschränken, Resultate mitzuteilen.

Wir definieren (für beliebige ϱ, α, ν und ungerades μ_1^*):

$$W_1(\mu_1^*, \varrho; \alpha, \nu) = \sum_{\substack{\lambda \bmod \mu_1^* \nu \\ \lambda \equiv \alpha(\nu)}} \left(\frac{\lambda}{\mu_1^*}\right) e^{2\pi i S\frac{\lambda\varrho}{\mu_1^*\sqrt{D}}}.$$

Bezeichnet γ_1 das maximale Potenzprodukt von Primteilern von (μ_1^*, ν), so daß $\mu_1^* = \gamma_1 \mu$, so gilt

$$W_1(\mu_1^*, \varrho; \alpha, \nu) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right)\left(\frac{\nu\gamma_1}{\mu}\right) e^{2\pi i S \frac{\alpha \bar{\mu} \varrho}{\nu \gamma_1 \sqrt{D}}} |N\gamma_1| C(\mu, \varrho), \text{ falls } \gamma_1 | \varrho, \\ 0 \qquad \text{sonst,} \end{cases}$$

dabei ist $\mu\bar{\mu} \equiv 1\ (\nu)$ und

$$C(\mu, \varrho) = \sum_{\iota \bmod \mu} \left(\frac{\iota}{\mu}\right) e^{2\pi i S \frac{\iota \varrho}{\mu \sqrt{D}}}.$$

Wir wählen ein vollständiges System von mod ν inkongruenten Einheiten

$$\varepsilon_j \equiv 1\ (\nu^*) \qquad (j = 1, \ldots, \iota)$$

und zerspalten die Summation in (26):

$$(27)\quad T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{\nu^*} \\ \mu_1^* \equiv \alpha_1^*\ (\nu^*) \\ \mu_1^* \neq 0}} \frac{\sum_{j=1}^{\iota} e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_j \mu_1 \sqrt{D}} W(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}}.$$

Entsprechend den drei Fällen:

1. $\alpha_1 \not\equiv 0\ (2)$,
2. $\alpha_1 \equiv 0\ (2)$, $\nu \not\equiv 0\ (8)$, $\gamma \not\equiv 0\ (4)$,
3. $\alpha_1 \equiv 0\ (2)$, $\nu \equiv 0\ (8)$ oder $\gamma \equiv 0\ (4)$

bezeichnen wir die Koeffizienten W von T mit W_1, W_2 und W_3. Es gilt dann

$$(28)\qquad W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_2, \nu),$$

$$(29)\qquad W_2(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \left(\frac{2\alpha_2}{\varepsilon_j \mu_1^*}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j \mu_1^*}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2 \bar{\nu}_0 \bar{\varepsilon}_j \bar{\mu}_1^* (2\varrho + \nu_0)}{8\sqrt{D}}}$$
$$\times W_1(\varepsilon_j \mu_1^*, 2\varrho + \nu_0; \bar{8}\alpha_2, \nu_0),$$

wobei

$$\varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j \equiv \mu_1^* \overline{\mu_1^*} \equiv \nu_0 \bar{\nu}_0 \equiv 1\ (8), \quad 8 \cdot \bar{8} \equiv 1\ (\nu_0),$$

und schließlich

$$(30)\ W_3(\varepsilon_j \mu_1^*, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\alpha_2}\right)^{\delta_1} \left(\frac{2^{\delta_0 + \delta_1} \alpha_2}{\varepsilon_j \mu_0}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j \mu_0}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2 \bar{\varepsilon}_j \bar{\mu}_0 \bar{\nu}_1 \varrho}{2^{\delta_0 + \delta_1} \sqrt{D}}} N 2^{\delta_1} \\ \times W_1(\varepsilon_j \mu_0, \varrho; \alpha_2 \overline{2^{\delta_0 + \delta_1}}, \nu_1), \text{ falls } S(\alpha_2 \bar{\varepsilon}_j \bar{\mu}_0 \bar{\nu}_1) \neq 0, \\ 0 \qquad \text{sonst,} \end{cases}$$

wenn

$$\mu_1^* = 2^{\delta_1}\mu_0, \quad \nu = 2^{\delta_0}\nu_1, \quad (2, \mu_0\nu_1) = 1,$$
$$\varepsilon_j\bar{\varepsilon}_j \equiv \mu_0\bar{\mu}_0 \equiv \nu_1\bar{\nu}_1 \equiv 1\,(2^{\delta_0+1}), \quad 2\bar{2} \equiv 1\,(\nu_1),$$

$$S(\lambda) = \sum_{\substack{\beta \bmod 2^{\delta_0+\delta_1} \\ \beta \equiv \lambda\,(2^{\delta_0})}} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\delta_1} e^{2\pi i S \frac{\beta\varrho}{2^{\delta_0+\delta}\sqrt{D}}}.$$

$S(\lambda)$ verschwindet genau dann nicht, wenn

$$\begin{cases} 2^{\delta_1}/\varrho & \text{für } \delta_0 \geqq 3 \quad (\text{d. h. } \nu \equiv 0\,(8)), \\ 2^{\delta_1-1}/\varrho, \quad \frac{\varrho}{2^{\delta_1-1}} \equiv \lambda'\,\delta_1\,(2) & \text{für } \delta_0 = 2. \end{cases}$$

Setzt man die so bestimmten Werte für W in (27) ein und spaltet die Summation weiter auf, so erhält man nach erfolgter Umordnung:

1. für $\alpha_1 \not\equiv 0\,(2)$:

(31) $T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$

$$= \sum_{j=1}^{t} \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{\nu^*} \\ \mu_1^* \equiv \alpha_1^*\,(\nu^*)}}{}' \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_j\mu_1 \sqrt{D}} W_1(\varepsilon_j\mu_1^*, \varrho; \alpha_2, \nu)}{|N\mu_1^*|^{r+s}},$$

2. für $\alpha_1 \equiv 0\,(2)$, $\nu \not\equiv 0\,(8)$, $\gamma \not\equiv 0\,(4)$:

(32) $T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{\substack{(\beta)_{\nu^*} \\ \beta \bmod 4\,\nu^* \\ \beta \equiv \alpha_1^*\,(\nu^*)}} \left(\frac{2\alpha_2}{\varepsilon_j\beta}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j\beta}{\alpha_2}\right)_* e^{2\pi i S \frac{\alpha_2\bar{\nu}_0\bar{\varepsilon}_j\bar{\beta}(2\varrho+\nu_0)}{8\sqrt{D}}}$

$$\times \sum_{\substack{(\mu_1^*)_{4\nu^*} \\ \mu_1^* \equiv \beta\,(4\nu^*)}}{}' \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_j\mu_1\sqrt{D}} W_1(\varepsilon_j\mu_1^*, 2\varrho+\nu_0, \alpha_2\bar{8}, \nu_0)}{|N\mu_1^*|^{r+s}},$$

3. für $\alpha_1 \equiv 0\,(2)$, $\nu \equiv 0\,(8)$ oder $\gamma \equiv 0\,(4)$:

(33) $T(r+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$

$$= \sum_{j=1}^{t} \sum_{\delta_1}{}' \frac{\left(\frac{2}{\alpha_2}\right)^{\delta_1}}{N\,2^{\delta_1(r-1+s)}} \sum_{\substack{(\beta)_{\nu^*} \\ \beta \bmod 2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^* \\ \beta \equiv \alpha_1^*\bar{2}^{\delta_1}\,(\nu^*) \\ 2\nmid\beta}}{}' e^{2\pi i S \frac{\alpha_2\bar{\beta}\bar{\nu}_1\bar{\varepsilon}_j\varrho}{2^{\delta_0+\delta_1}\sqrt{D}}}$$

$$\times \left(\frac{2^{\delta_0+\delta_1}\alpha_2}{\varepsilon_j\beta}\right)^* \left(\frac{\varepsilon_j\beta}{\alpha_2}\right)_* \sum_{\substack{(u_0)_{2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^*} \\ \mu_0 \equiv \beta\,(2^{\delta_0-\delta'+1}\nu^*)}}{}' \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon_j\mu_1\sqrt{D}} \cdot W_1(\varepsilon_j\mu_0, \varrho; \alpha_2\bar{2}^{\delta_0+\delta_1}, \nu_1)}{|N\mu_0|^{r+s}}.$$

dabei wird über die $\delta_1 (\geqq 0)$ und β summiert, für welche die zusätzliche Bedingung

$$\begin{cases} 2^{\delta_1} / \varrho & \text{für } \delta_0 \geqq 3, \\ 2^{\delta_1 - 1} / \varrho, \quad 2^{1-\delta_1}\, \varrho \equiv (\alpha_2\, \bar{\varepsilon}_j\, \beta\, \bar{\nu}_1)^2\, \delta_1 \,(2) & \text{für } \delta_0 = 2 \end{cases}$$

erfüllt ist, falls

$$\beta \bar{\beta} \equiv \nu_1 \bar{\nu}_1 \equiv \varepsilon_j \bar{\varepsilon}_j \equiv 1 \,(2^{\delta_0 + 1});$$

außerdem gilt

$$2^{\delta'} \mid \nu^*, \quad 2^{\delta' + 1} \nmid \nu^*, \quad 2 \cdot 2 \equiv 1 \,(\nu_1).$$

Die innere Summe in jeder dieser drei Entwicklungen ist über ein beliebiges System von Scharrepräsentanten zu erstrecken, doch hat man für alle j die gleichen Repräsentanten zu wählen.

Man kann also stets $T(r + s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ aus Reihen vom Typus

$$(34) \quad T_1(r + s, \varrho; \beta, \alpha, \nu) = \sum_{\substack{(\varkappa)_{\nu_2} \\ \varkappa \equiv \beta \,(\nu_2)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \gamma \varkappa \sqrt{D}}\, W_1(\varkappa, \varrho; \alpha, \nu_3)}{|N \varkappa|^{r+s}},$$

wobei

$$\begin{cases} \gamma \mid \nu, \quad 4 \mid \nu, \quad (\beta, \nu_2) = 1, \quad \nu_2 \mid 2\nu, \quad \nu = 2^\lambda \nu_3, \quad \lambda \geqq 0 \\ \text{und } \dfrac{2\nu}{\nu_2} \text{ prim zu } 2, \quad 2 \nmid \nu_3 \text{ oder } \dfrac{\nu}{\nu_2} \text{ prim zu } 2, \quad \nu_3 = \nu, \end{cases}$$

linear zusammensetzen. Das Repräsentantensystem $(\varkappa)_{\nu_2}$ in (34) darf beliebig — aber unabhängig von β — spezialisiert werden. Sei γ_1 das maximale Potenzprodukt von Primteilern von $(\varkappa, \nu_3)$, so daß

$$\varkappa = \gamma_1 \mu,$$

dann kann man sich in (34) bei der Summation auf $\gamma_1 \mid \varrho$ beschränken, da andernfalls $W_1 = 0$ ist. Trägt man dann

$$W_1(\varkappa, \varrho; \alpha, \nu_3) = \left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right) \left(\frac{\nu_3 \gamma_1}{\mu}\right) e^{2\pi i S \frac{\alpha \bar{\mu} \varrho}{\nu_3 \gamma_1 \sqrt{D}}} |N \gamma_1|\, C(\mu, \varrho) \qquad \text{für } \gamma_1 \mid \varrho$$

in (34) ein, so ergibt sich bei geeigneter Wahl der Scharrepräsentanten:

$$(35) \quad T_1(r + s, \varrho; \beta, \alpha, \nu) = \sum_{\substack{(\gamma_1) \\ \gamma_1 \mid \varrho}} \frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma_1}\right)}{|N \gamma_1|^{r+s-1}} \sum_{\substack{(\lambda)_{\nu_2} \\ \lambda \bmod 2^\nu \\ \gamma_1 \lambda \equiv \beta \,(\nu_2) \\ (\lambda, \nu) = 1}} \left(\frac{\nu_3 \gamma_1}{\lambda}\right) e^{2\pi i S \frac{\alpha \bar{\lambda} \varrho}{\nu_3 \gamma_1 \sqrt{D}}}$$

$$\times \sum_{\substack{(\mu)_{2^\nu} \\ \mu \equiv \lambda \,(? \,\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \gamma \gamma_1 \mu \sqrt{D}}\, N \sigma_{\lambda \mu, \nu_3 \gamma_1}\, C(\mu, \varrho)}{|N \mu|^{r+s}}.$$

Der Ausdruck

$$K(\mu, \varrho) = |N \mu|^{\frac{1}{2}} C^{-1}\left(\frac{1}{\mu \sqrt{D}}\right) C(\mu, \varrho)$$

hängt nur vom Ideal (μ) ab und ist in μ multiplikativ:

$$K(\mu, \varrho) = K(\mu_1, \varrho) \cdot K(\mu_2, \varrho), \text{ falls } \mu = \mu_1 \mu_2 \text{ und } (\mu_1, \mu_2) = 1.$$

Da $|N\mu|^{\frac{1}{2}} C^{-1}\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right)$ nur von μ mod $4 p_\infty$ abhängt, so wird die innere Summe von (35) gleich

$$\sum_{\substack{\varkappa \bmod p_\infty \\ \varkappa \equiv 1 (2\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \gamma \gamma_1 \lambda \varkappa \sqrt{D}} N \sigma_{\varkappa, \nu_2 \gamma_1} C\left(\frac{1}{\lambda \varkappa \sqrt{D}}\right)}{|N \lambda \varkappa|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda \varkappa (2 \nu p_\infty)}} \frac{K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Bezeichnen wir mit χ einen beliebigen Idealcharakter mod $2 \nu p_\infty$, so läßt sich

$$\sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda \varkappa (2 \nu p_\infty)}} \frac{K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}$$

aus den Reihen

$$Q(r+s, \varrho; \chi, \nu, r) = \sum_{(\mu)} \frac{\chi(\mu) K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}$$

linear kombinieren. Eine einfache Diskussion zeigt, daß $Q(r+s, \varrho; \chi, \nu, r)$ bis auf einen elementaren Faktor von der Struktur des Ausdrucks (54) in K I, § 3 gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2} + s, \chi(x)\left(\frac{\varrho}{x}\right)\right)}{L(k-1+2s, \chi^2(x))}$$

ist. Die Dirichletreihen T haben also die gleiche Bauart, wie die analogen Reihen, auf die man bei der Diskussion der entsprechenden Formen in einer Variablen in E geführt wird. Für die Dimension $-\frac{3}{2}$ ist noch nichts gewonnen, da die Konvergenzschwierigkeiten der Eisensteinreihen $G_{-\frac{3}{2}}$ auf diesem Wege aus Gründen, die später deutlich werden, nicht behoben werden können. Wir beginnen noch einmal bei der Formel (35) und setzen nun voraus, daß alle Primteiler von ν total positiv gewählt werden können, was stets dann der Fall ist, wenn die Norm der Grundeinheit von Z gleich -1 ist. Wir können demnach annehmen, daß

$$\nu \equiv \gamma \equiv \gamma_1 \equiv 1 (p_\infty).$$

Dann geht die innere Summe von (35) über in

$$\Omega = \sum_{\substack{(\mu)_{2\nu} \\ \mu \equiv \lambda (2\nu)}} \frac{e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu \sqrt{D}} C(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Auf Grund des Reziprozitätsgesetzes für Gaußsche Summen gilt

$$e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \mu \sqrt{D}} = \frac{|N\mu|^{\frac{k}{2}} C^k\left(\frac{-\mu}{4\sqrt{D}}\right)}{8^k C^k\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right)};$$

ferner ist

$$|N\mu|^{-\frac{k-1}{2}} C^{k-1}\left(\frac{1}{\mu\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

so daß

$$\Omega = 8^{-k} C^k\left(\frac{-\lambda}{4\sqrt{D}}\right) \sum_{\substack{(\mu) \\ \mu \equiv \lambda\,(2\nu)}} \frac{\left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}}.$$

Ω läßt sich daher aus den Reihen

$$Q_1(r+s, \varrho; \chi, \nu, r) = \sum_{(\mu)} \frac{\chi(\mu)\left(\frac{-1}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{2}} K(\mu, \varrho)}{|N\mu|^{r+s}},$$

wo χ jetzt ein beliebiger Idealcharakter mod 2ν ist, linear zusammensetzen. Q_1 ist bis auf einen elementaren Faktor gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2}+s, \chi(x)\left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho}{x}\right)\right)}{L(k-1+2s, \chi^2(x))}.$$

Dieser wird bei $s = 0$ genau dann singulär und hat dann einen Pol erster Ordnung, wenn $\chi(x)\left(\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho}{x}\right)$ Hauptcharakter ist.

Im Falle $k = 3$ kann das nur für $\varrho = 0$ oder $-\varrho \equiv 1\,(p_\infty)$ eintreten. Verfolgt man die Entwicklungen zurück, so erkennt man schließlich, daß in den Fällen 1 und 3 unserer oben eingeführten Fallunterscheidung $T(\frac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ eine etwas komplizierte Linearkombination von Quotienten der Art

$$\frac{L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-\varrho}{x}\right)\right)}{L(2+2s, \chi^2(x))}$$

ist. Die Koeffizienten einer solchen Linearkombination sind in Abhängigkeit von s elementare Funktionen, in Abhängigkeit von ϱ — cum grano salis — eine Art von Teilersummen und gestatten eine im s Bereich

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{4} &\leqq \Re s \leqq 1 \\ -1 &\leqq \Im s \leqq 1 \end{aligned} \tag{36}$$

gleichmäßige Abschätzung für $|N\varrho| \to \infty$, aus der hervorgeht, daß sie höchstens wie eine feste Potenz von $|N\varrho|$ wachsen. Im Fall 2 setzt sich $T(\frac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ aus Quotienten der Art

$$\frac{L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-2(\varrho+\eta)}{x}\right)\right)}{L(2+2s, \chi^2(x))}$$

zusammen, und es gilt der entsprechende Sachverhalt. Nach der Bedeutung von η ist daher der Ausdruck

$$T(\tfrac{3}{2}+s, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)\, N A_{\left(\frac{\varrho+\eta}{\nu^2\sqrt{D}}\right)}(s, \tau, \tfrac{3}{2}) \tag{37}$$

bei $s=0$ stets regulär und hat überdies bei $s=0$ eine Nullstelle, falls $\varrho+\eta \not\equiv 1\ (p_\infty)$; denn das Doppelintegral hat in diesen Fällen eine Nullstelle im allgemeinen von erster, im besonderen für

$$\varrho+\eta=0 \quad \text{und} \quad -(\varrho+\eta) \equiv 1\ (p_\infty)$$

von zweiter Ordnung.

Bei der Abschätzung des Ausdrucks (37) ist jetzt folgendes zu beachten: Falls $r \geqq \frac{3}{2}$ und $\lambda \leqq 0$, so ist

$$A_\lambda(0, \tau, r) = 0 \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\tau > 0)$$

und es resultiert eine im Bereich (36) gleichmäßige Abschätzung

$$\frac{1}{s} A_\lambda(s, \tau, r) = O(e^{-\delta|\lambda|}) \qquad (\lambda \to -\infty)$$

für ein gewisses $\delta > 0$. Kommt nun in (37) eine L-Reihe mit Hauptcharakter vor, so erhält man eine ausreichende Abschätzung, wenn man vom Doppelintegral den Faktor s abspaltet und ihn der L-Reihe anheftet. Handelt es sich um einen Nicht-Hauptcharakter, so gilt gleichmäßig im Bereich (36)

$$L\left(1+s, \chi(x)\left(\frac{-\varrho}{x}\right)\right) = O(|N\varrho|^\varkappa) \qquad (|N\varrho| \to \infty).^{8})$$

$$(\varkappa \text{ konstant} > 0).$$

Es gibt also (für $\varrho+\eta \neq 0$) für den Betrag des Ausdrucks (37) stets eine im Bereich (36) von s unabhängige Schranke der Gestalt

$$c_2 |N(\varrho+\eta)|^\varkappa e^{-\delta(|\varrho+\eta|+|\varrho'+\eta'|)}.$$

($c_1, c_2, \varkappa, \delta$ bedeuten positive Konstanten.) Die Eisensteinreihe $G_{-\frac{3}{2}}$ in der Gestalt (25) besitzt also die von s unabhängige konvergente Majorante

$$c_1 + c_2 \sum_{\varrho \subset \mathfrak{o}} |N(\varrho+\eta)|^\varkappa e^{-\delta(|\varrho+\eta|+|\varrho'+\eta'|)}. \tag{38}$$

---

8) Vgl. E. Landau, Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 152.

Damit ist die analytische Fortsetzung von $G_{-\frac{s}{2}}$ in eine volle Umgebung von $s = 0$ bewerkstelligt und wir erhalten Formen zur Dimension $-\frac{3}{2}$. Trägt man die Nullwerte der Doppelintegrale in die Entwicklung (25) ein, so erhält man für $r \geqq \frac{3}{2}$ die Darstellungen

$$(39)\quad G_{-r}(\tau, 0; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = e_0\,\delta(A)\,e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} s_0 \sqrt{D}}$$
$$+ \frac{(2\pi)^k e_0 v_0(\gamma, \alpha_2)}{D^{\frac{k-1}{2}} (\Gamma(r))^2 |N\nu|^r} \cdot \sum_{\frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \gg 0} T(r, \varrho; \alpha_1, \alpha_2, \nu)\,|N(\varrho+\eta)|^{r-1} e^{2\pi i S \frac{(\varrho+\eta)\tau}{\nu^* \sqrt{D}}},$$

wo über alle ganzen ϱ summiert wird, für die

$$\frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \gg 0, \text{ d. h. } \frac{\varrho+\eta}{\nu^*} \equiv 1 \ (p_\infty).$$

Für $r = \frac{3}{2}$ gilt (39) nur unter den eingeführten Einschränkungen. Aus den Transformationsformeln der Reihen

$$G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) = G_{-r}(\tau, 0; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$$

entnimmt man, daß $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ nur in den zu $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalenten Spitzen nicht verschwindet. Lineare Relationen mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten können demnach nur zwischen solchen Reihen bestehen, die in dem genannten Sinne zu demselben System äquivalenter Spitzen gehören. Indem man auf die Reihen $G_{-r}(\tau, s; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ zurückgreift, zeigt man mühelos, daß für eine beliebige Einheit ε die Relationen

$$(40)\quad G_{-r}(\tau; \varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \nu) = e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)_* G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \text{ für } \alpha_1 \equiv 0\,(2),$$
$$G_{-r}(\tau; \varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \nu) = e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)_* G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu) \text{ für } \alpha_1 \not\equiv 0\,(2)$$

erfüllt sind. Dies sind auch alle, wenn man von vornherein die G_{-r} identifiziert, die sich im zweiten und dritten Argument nur um Zahlen $\equiv 0\,(\nu)$ unterscheiden. Es ist also bewiesen:

Satz 3. *Die Klassenzahl des reell quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante $D \equiv 5\,(8)$ sei gleich 1. Dann ist die Maximalzahl linear unabhängiger Eisensteinreihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ halbzahliger Dimension $-r \leqq -\frac{3}{2}$ zur Stufe $\nu \equiv 0\,(4)$ mit ϑ-Multiplikatoren gleich der Anzahl aller nach $\Gamma(\nu)$ inäquivalenten parabolischen Spitzen. Ist $\varphi(\tau)$ eine beliebige ganze Form der Dimension $-r$ zur Stufe ν mit ϑ-Multiplikatoren, so gibt es eine Linearkombination $\Lambda(\tau)$ der Reihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ derart, daß $\varphi(\tau) - \Lambda(\tau)$ eine Form ist, die in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Im Falle der Dimension $-\frac{3}{2}$ hat man noch vorauszusetzen, daß die Norm der Grundeinheit von $R(\sqrt{D})$ gleich -1 ist.*

Die mit $\varkappa^{-k}(A)$, $\underline{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$, multiplizierte Reihe

$$\varkappa^{-k}(A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{A},\, \nu)$$

hängt nur von dem System der zu $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalenten Spitzen ab, falls $\nu \equiv 0\ (8)$ vorausgesetzt wird. Sind nämlich $-\frac{\beta_2}{\beta_1}$ (reduzierter Bruch) und $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ nach $\Gamma(\nu)$ äquivalent, so gibt es eine Einheit ε derart, daß

$$\beta_1 \equiv \varepsilon\alpha_1, \quad \beta_2 \equiv \varepsilon\alpha_2 \quad (\nu),$$

und es wird

$$\varkappa^{-k}(B)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{B},\, \nu) = \varkappa^{-k}(S_0 A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{S_0 A},\, \nu)$$
$$(\underline{B} = (\beta_1, \beta_2), \quad \underline{S_0} = (0,\, \varepsilon)).$$

Die Behauptung

$$\varkappa^{-k}(S_0 A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{S_0 A},\, \nu) = \varkappa^{-k}(A)\, G_{-r}(\tau;\, \underline{A},\, \nu)$$

ist dann auf Grund der Relationen (40) mit

$$\frac{\varkappa^k(S_0 A)}{\varkappa^k(A)} = \begin{cases} e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_1}\right)_* & \text{für } \alpha_1 \not\equiv 0\ (2), \\ e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon \sqrt{D}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)_* & \text{für } \alpha_1 \equiv 0\ (2) \end{cases}$$

gleichwertig. Dies ergibt sich aber aus dem Reziprozitätsgesetz (Hecke, loc. cit. [7]). Mit Hilfe von

$$8^{-1} C\left(\frac{-\alpha}{4\sqrt{D}}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{4} S \frac{\alpha^3}{\sqrt{D}}} \qquad \text{für } 2 \nmid \alpha$$

folgt nämlich aus

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)_* = \frac{C\left(\frac{-\alpha\varepsilon}{4\sqrt{D}}\right) \cdot 8}{C\left(\frac{-\alpha}{4\sqrt{D}}\right) C\left(\frac{-\varepsilon}{4\sqrt{D}}\right)},$$

daß

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)_* = e^{\frac{\pi i r}{2} S \frac{\alpha^3(\varepsilon^3 - 1)}{\sqrt{D}}} e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\varepsilon \sqrt{D}},$$

was jeweils behauptet wird.

Wir versuchen nun unter der Voraussetzung $\nu \equiv 0\ (8)$ aus den Reihen G_{-r} Formen zur ϑ-Gruppe Γ_{10} mit ϑ-Multiplikatoren $v(S)$ zu konstruieren. Es zeigt sich, daß dies auf genau eine Weise möglich ist. Die parabolischen Spitzen $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ (in reduzierter Gestalt) zerfallen entsprechend der Tatsache, daß $\alpha_1\alpha_2 \equiv 0\ (2)$ oder $\alpha_1\alpha_2 \not\equiv 0\ (2)$, in zwei Klassen. Man sieht leicht ein, daß zwei Spitzen aus derselben Klasse stets, aus verschiedenen Klassen

nie nach Γ_{10} äquivalent sind. In gleicher Weise zerfallen auch die Reihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ in zwei Klassen. Gibt es nun eine Linearkombination der G_{-r}, die eine Form zu Γ_{10} darstellt, so auch schon eine solche, in der nur Reihen aus einer Klasse vorkommen. Mit einer Reihe kommen aber auch alle übrigen dieser Klasse vor; daraus folgt unter Berücksichtigung der Relationen (40) die eindeutige Bestimmtheit der Linearkombination durch die Klasse. Es gibt also zu jeder Klasse höchstens eine Form. Ich habe mich nun durch Rechnung überzeugt, daß es zu der Klasse, die durch $\alpha_1 \alpha_2 \not\equiv 0\ (2)$ gekennzeichnet ist, keine Linearkombination gibt. Zur anderen Klasse kann ich eine solche explizit angeben: Sei S_i, $i = 1, \ldots, \nu$, ein vollständiges System von Matrizen aus Γ_{10} derart, daß die Spitzen $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, $\underline{S_i} = (\gamma_i, \delta_i)$, nach $\Gamma(\nu)$ nicht äquivalent sind. Dann ist

$$G_{-r}(\tau) = \sum_{i=1}^{\nu} \varkappa^{-k}(S_i)\, G_{-r}(\tau; \underline{S_i}, \nu) \tag{41}$$

eine Form zu Γ_{10} mit ϑ-Multiplikatoren. Wenn nämlich $S \subset \Gamma_{10}$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, so folgt aus (17) und (22)

$$\frac{\varkappa^{-k}(S_i)\, G_{-r}(S\tau; \underline{S_i}, \nu)}{N(\gamma\tau + \delta)^r} = v(S) \cdot \varkappa^{-k}(S_i S)\, G_{-r}(\tau; \underline{S_i S}, \nu),$$

woraus die Behauptung erhellt. Im Rahmen einer systematischen Untersuchung werden wir im nächsten Paragraphen noch einmal auf die Form $G_{-r}(\tau)$ stoßen; es ist nämlich die Geschlechtsinvariante zur quadratischen Form $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$.

§ 3.

Aufstellung der analytischen Invariante des Formengeschlechts einer total positiv definiten quadratischen Form ungerader Variablenzahl.

Über den Körper Z sei nur

$$D \equiv 5\ (8)$$

vorausgesetzt.

Es sei

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{k} q_{\nu\mu}\, x_\nu\, x_\mu, \quad 2 \nmid k,$$

eine primitive total positiv definite quadratische Form, dabei

$$\mathfrak{Q} = (q_{\nu\mu})$$

eine ganzzahlige, symmetrische Matrix über Z mit den Hauptunterdeterminanten Δ_i, $i = 1, \ldots, k$; insbesondere ist

$$|\mathfrak{Q}| = \Delta = \Delta_k.$$

Setzen wir in fester Bedeutung

$$\nu = 8\,D\,\Delta_1\,\Delta_2 \ldots \Delta_k,$$

dann ist die ϑ-Reihe

$$f(\mathfrak{Q};\tau) = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k \subset \mathfrak{o}} e^{\pi i S \frac{Q(\mu)\tau}{\sqrt{D}}}$$

eine Form der Dimension $-r = -\frac{k}{2}$ zu $\Gamma(\nu)$ mit dem Multiplikatorsystem v_0[9]). Das Verhalten von $f(\mathfrak{Q};\tau)$ bei Annäherung von (τ,τ') an die Spitze $(-\omega, -\omega')$ $(\omega \subset Z)$ untersucht man mit der aus der Theorie der ϑ-Reihen in einer Variablen geläufigen Methode mit dem Resultat:

$$(42)\quad N(\tau+\omega)^r f(\mathfrak{Q};\tau) = \begin{cases} N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}^{-k} H(\mathfrak{O},\omega) + o(1) & \text{für } 2 \mid \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \\ o(1) & \text{für } 2 \nmid \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \end{cases}$$

dabei ist

$$\omega = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

$\mathfrak{a}$ der Idealnenner von ω und

$$H(\mathfrak{Q},\omega) = \sum_{\substack{\lambda_i \bmod \mathfrak{a} \\ i=1,\ldots,k}} e^{-\pi i S \frac{Q(\lambda)\omega}{\sqrt{D}}} \qquad (2 \mid \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}).$$

Im weiteren Verlauf setzen wir $2 \mid \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ voraus. Ersetzt man in der asymptotischen Formel (42) τ durch $\tau_1 = S\tau$, also ω durch $\omega_1 = -S(-\omega)$, so gilt also auch, wenn ω_1 endlich und $\mathfrak{a}_1$ der Idealnenner von ω_1 ist,

$$N(\tau_1+\omega_1)^r f(\mathfrak{Q};\tau_1) = N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}_1^{-k} H(\mathfrak{Q},\omega_1) + o(1).$$

Für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{S} = (\gamma,\delta)$, vermittelt dann die Gleichung

$$(43)\qquad f(\mathfrak{Q};\tau_1) = v_0(S)\,N(\gamma\tau+\delta)^r f(\mathfrak{Q};\tau)$$

zwischen den Hauptgliedern der asymptotischen Entwicklungen (42) und (43) eine Beziehung, aus der man nach einiger Rechnung schließlich

$$(44)\quad N\mathfrak{a}_1^{-r} H(\mathfrak{Q},\omega_1) = v_0(S^{-1})\sigma_Z(\mathfrak{Q},S^{-1}) e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}(-\gamma\omega+\delta)\sqrt{D}} N\mathfrak{a}^{-r} H(\mathfrak{Q},\omega)$$

gewinnt; dabei ist

$$\underline{\mathfrak{Q}} = (1,\omega).$$

Stellt man ω als Quotient ganzer Zahlen dar:

$$\omega = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

---

[9]) Vgl. H. D. Kloosterman, Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern, Math. Annalen 103 (1930), S. 279.

so wird (44) durch

$$\sigma_Z(\Omega, S^{-1}) = \sigma_Z(M, S^{-1})\, N\sigma_{\mu_1, -\gamma\omega+\delta}, \quad \underline{M} = (\mu_1, \mu_2),$$

$$N\sigma_{\mu_1, -\gamma\omega+\delta}\, e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}(-\gamma\omega+\delta)\sqrt{D}} = e^{-\frac{\pi i r}{2} S(\operatorname{sgn}(-\gamma\mu_2+\delta\mu_1)\sqrt{D} - \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D})}$$

in

$$(45)\quad N\mathfrak{a}_1^{-r} H(\Omega, \omega_1)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}(-\gamma\mu_2+\delta\mu_1)\sqrt{D}} = v_0(S^{-1})\,\sigma_Z(M, S^{-1})\, N\mathfrak{a}^{-r} H(\Omega, \omega)\, e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D}}$$

übergeführt. Wir definieren nun

$$w(M) = w(\mu_1, \mu_2) = N\Delta^{-\frac{1}{2}} N\mathfrak{a}^{-r} H\left(\Omega, \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) e^{\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_1\sqrt{D}} \quad (\mu_1 \neq 0).$$

Gleichung (45) besagt dann, wenn man S^{-1} durch S ersetzt, daß

$$(46)\qquad w(MS) = \sigma_Z(M, S)\, w(M)\, v_0(S) \qquad S \subset \Gamma(\nu).$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, daß die ersten Elemente der Zeilen $\underline{MS}$ und $\underline{M}$ nicht verschwinden. Aus der Invarianzeigenschaft von $f(\Omega; \tau)$ ergibt sich ferner, daß $w(S) = v_0(S)$ für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{S} = (\gamma, \delta)$, $\gamma \neq 0$. Definieren wir noch für $\mu_2 \neq 0$:

$$w(M) = e^{-\frac{\pi i r}{2} S \operatorname{sgn}\mu_2\sqrt{D}}, \quad \underline{M} = (0, \mu_2),$$

so folgt mühelos, indem man auf die Definition der Symbole zurückgeht, die Gültigkeit von (46) auch für $\mu_1 = 0$ oder $\alpha\mu_1 + \gamma\mu_2 = 0$. Wir fassen zusammen:

Satz 4. *Für $S \subset \Gamma(\nu)$, $\underline{M} = (\mu_1, \mu_2)$ gilt*

$$w(MS) = \sigma_Z(M, S)\, w(M)\, w(S), \quad w(S) = v_0(S),$$

falls $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ nicht prim zu 2, oder gleich ∞ ist.

Die asymptotischen Formeln (42) führen nun zur Aufstellung der Reihen

$$(47)\qquad F(\Omega; \tau, s) = 1 + \sum_{\substack{\omega \\ 2 \mid \mathfrak{a}^2\omega \\ (\mathfrak{a}\omega, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}}} \frac{H(\Omega, \omega)}{N\Delta^{\frac{k}{2}} N\mathfrak{a}^{k+s} N(\tau+\omega)^r\, |\tau+\omega|^s},$$

welche die Invarianzeigenschaft

$$\frac{F(\Omega; S\tau, s)}{N(\gamma\tau+\delta)^r\, |\gamma\tau+\delta|^s} = v_0(S) F(\Omega; \tau, s) \text{ für } S \subset \Gamma(\nu),\ \underline{S} = (\gamma, \delta),$$

aufweisen. Wir bezeichnen den Wert $F(\Omega; \tau)$ der in s analytischen Funktion $F(\Omega; \tau, s)$ im Punkte $s = 0$ als die Geschlechtsinvariante zu Ω; das rechtfertigt sich insofern, als sich $H(\Omega, \omega)$ nicht ändert, wenn man Ω durch einen anderen Repräsentanten des Formengeschlechts zu Ω ersetzt. Der Nachweis, daß $F(\Omega; \tau)$ für $k = 3$ existiert und sich aus den in § 2 konstruierten Eisen-

steinreihen $G_{-\frac{3}{2}}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$ linear kombinieren läßt (vorausgesetzt, daß Z die Klassenzahl 1 hat und die Norm der Grundeinheit gleich -1 ist), bildet den wesentlichen Inhalt dieses Paragraphen. Da $H(\mathfrak{Q}, \omega)$ nur von ω mod 2 abhängt, so findet man mit Hilfe der Lipschitz-Formel (23) auf dem schon gewohnten Wege die Entwicklung

$$(48) \qquad F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = 1 + \frac{1}{4^{r+s}\sqrt{D}\, N\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu \subset \mathfrak{o}} T_\mu(s, r)\, B_\mu\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right),$$

dabei ist

$$T_\mu(s, r) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}} \frac{a_\mathfrak{a}(\mu)}{N\mathfrak{a}^{r+s}},$$

$$a_\mathfrak{a}(\mu) = \sum_{\substack{\omega \bmod 2 \\ 2 \mid \mathfrak{a}^2 \omega \\ (\mathfrak{a}\omega,\, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}}} \frac{H(\mathfrak{Q}, \omega)\, e^{\pi i S \frac{\mu\omega}{\sqrt{D}}}}{N\mathfrak{a}^r}$$

und $B_\mu\left(s, \frac{\tau}{2}, r\right)$ in § 2 erklärt.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der singulären Reihe $T_\mu(s, r)$. Es bezeichne $A_\mathfrak{a}(\mathfrak{Q}, \mu)$ die Anzahl der mod $\mathfrak{a}$ verschiedenen Darstellungen mod $\mathfrak{a}$ von μ durch die quadratische Form Q; dann gilt

$$(49) \qquad \sum_{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}} \frac{a_\mathfrak{a}(\mu)}{N\mathfrak{a}^r} = \begin{cases} N\mathfrak{b}^{1-k} A_\mathfrak{b}(\mathfrak{Q}, \mu) & \text{für } 2 \nmid \mathfrak{b}, \\ N(2\mathfrak{b})^{1-k} A_{2\mathfrak{b}}(\mathfrak{Q}, \mu) & \text{für } 2 \mid \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Der Nachweis erfolgt durch identische Umformungen (vgl. Siegel, loc. cit. [3]), wenn man beachtet, daß

$$N\mathfrak{a}^k A_\mathfrak{a}(\mathfrak{Q}, \mu) = \sum_{\substack{\nu_j \subset \mathfrak{o} \\ \nu_j \bmod \mathfrak{a}}} \sum_{\substack{\omega \subset \mathfrak{a}^{-1} \\ \omega \bmod 1}} e^{-2\pi i S \frac{(Q(\nu) - \mu)\omega}{\sqrt{D}}}$$

und eine Gaußsche Summe

$$\sum_{\substack{\nu_j \subset \mathfrak{o} \\ \nu_j \bmod \mathfrak{a}}} e^{2\pi i S \frac{Q(\nu)\omega}{\sqrt{D}}}$$

notwendig verschwindet, falls der Idealnenner $\mathfrak{a}$ von ω genau einmal durch 2 teilbar ist (dabei wird vorausgesetzt, daß die Diagonalelemente q_{ii} nicht alle gerade sind). Aus den Gleichungen (49) beweist man, etwa durch Induktion nach der Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{a}$, die Multiplikativität der $a_\mathfrak{a}(\mu)$:

$$a_{\mathfrak{a}_1}(\mu)\, a_{\mathfrak{a}_2}(\mu) = a_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}(\mu) \quad \text{für} \quad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{o};$$

diese ist nämlich für $A_\mathfrak{a}(\mathfrak{Q}, \mu)$ fast selbstverständlich. Die Berechnung von $a_{\mathfrak{p}^r}(\mu)$, auf die es jetzt nur noch ankommt, wird für $\mathfrak{p} \neq 2$ dadurch

ermöglicht, daß man $\mathfrak{Q}$ mod $\mathfrak{p}^\nu$ minmodular auf Diagonalgestalt transformieren kann. Für $\mathfrak{p} = 2$ beachte man, daß

(50) $$a_{2^\nu}(\mu) = 0,$$

sobald

$$\nu > 2h + 3, \quad (2^h \mid \mu,\ 2^{h+1} \nmid \mu).$$

Das ist so einzusehen: Falls $2 \nmid \alpha$, so ist

$$H\left(\mathfrak{Q}, \frac{\alpha}{2^\nu}\right) = N\, 2^{ak} \sum_{\substack{\mu_j \subset \mathfrak{o} \\ \mu_j \bmod 2^{\nu-a} \\ \sum_l q_{jl}\mu_l \equiv 0\,(2^a) \\ j=1,\ldots,k}} e^{-\pi i S \frac{Q(\mu)\,a}{2^\nu \sqrt{D}}} \text{ für } 0 \leqq a \leqq \frac{\nu-1}{2}$$

(Beweis durch Induktion nach a). $H\left(\mathfrak{Q}, \frac{\alpha}{2^\nu}\right)$ hängt also nur von $\alpha \bmod 2^{\nu+1-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]}$ ab; daraus folgt dann schließlich die Behauptung (50). $Q(\mu, \mathfrak{p})$ sei, wie folgt, erklärt:

$$Q(\mu, \mathfrak{p}) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ vollständig zerfällt,} \\ -1, \text{ wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ unzerlegt bleibt,} \\ 0, \text{ wenn } \mathfrak{p} \text{ in } Z(\sqrt{\mu}) \text{ verzweigt ist.} \end{cases}$$

Dann ist für $\mu \neq 0$ $T_\mu(s, r)$ bis auf einen elementaren Faktor gleich dem L-Reihenquotienten

$$\frac{L\left(\frac{k-1}{2} + s, Q\left((-1)^{\frac{k-1}{2}} \Delta \mu, \mathfrak{a}\right)\right)}{\zeta_Z(k-1+2s)},$$

wobei ζ_Z die ζ-Funktion von Z ist, und $T_0(s, r)$ ist bis auf einen ebenfalls elementaren Faktor gleich

$$\frac{\zeta_Z(k-2+2s)}{\zeta_Z(k-1+2s)}.$$

Im Falle $k = 3$ folgt die analytische Fortsetzbarkeit bis in eine volle Umgebung von $s = 0$ mit der Schlußweise des § 2. Wir erhalten demnach für $k \geqq 3$ die Geschlechtsinvarianten

$$F(\mathfrak{Q}; \tau) = 1 + \frac{\pi^k}{N\, \Delta^{\frac{1}{2}}\, D^{\frac{k-1}{2}}\, (\Gamma(r))^2} \sum_{\mu \gg 0} T_\mu(0, r)\, N\mu^{r-1}\, e^{\pi i S \frac{\mu\tau}{\sqrt{D}}},$$

deren weitere Diskussion sich im Hinblick auf die Siegelsche Theorie der quadratischen Formen (loc. cit. [3])) erübrigt.

Hat Z die Klassenzahl 1, was wir jetzt voraussetzen, so geht die Reihe (47) nach Definition von w über in

$$F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}} \frac{w(M)}{N(\mu_1\tau + \mu_2)^r \mid \mu_1\tau + \mu_2 \mid^s}, \quad \underline{M} = (\mu_1, \mu_2),$$

dabei ist $\mathfrak{S}$ ein vollständiges System solcher Matrizen aus Γ_{10}, die zu je zweien mod 1 nicht assoziierte zweite Zeilen haben. Nach der Herleitung der Reihe hängt sie natürlich von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}$ nicht ab. Wir bestimmen jetzt:

1. Ein vollständiges System von Matrizen S_j, $j = 1, \ldots, v$, aus Γ_{10}, $\underline{S_i} = (\gamma_j, \delta_j)$, derart, daß die Spitzen $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ und $-\frac{\delta_j}{\gamma_j}$ für $i \neq j$ nach $\Gamma(\nu)$ nicht äquivalent sind,

2. ein vollständiges System $\mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ von Matrizen aus $S_j\,\Gamma(\nu)$ mit mod 1 nicht assoziierten zweiten Zeilen,

3. ein vollständiges System von mod p_∞ inkongruenten Einheiten $\varepsilon_i \equiv 1\ (\nu)$, $i = 1, \ldots, e_0$ (also $e_0 = 1$ oder 2), $H_i \subset \Gamma(\nu)$ derart, daß

$$\underline{H_i} = (0, \varepsilon_i).$$

Dann hat $\sum_j \mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ die charakteristischen Eigenschaften von $\mathfrak{S}$, und $\sum_i H_i\,\mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu))$ ist ein vollständiges System von Matrizen aus $S_j\,\Gamma(\nu)$ mit mod νp_∞ nicht assoziierten zweiten Zeilen; ein solches System hatten wir mit $\mathfrak{S}(S_j, \Gamma(\nu))$ bezeichnet. Wählen wir demnach

$$\mathfrak{S} = \sum_j \mathfrak{S}_1(S_j, \Gamma(\nu)),$$

so wird

$$\sum_i H_i\,\mathfrak{S} = \sum_j \mathfrak{S}(S_j, \Gamma(\nu))$$

mithin auf Grund von Satz 4:

$$e_0 F(\mathfrak{Q}; \tau, s) = \sum_j \frac{w(S_j)}{v_0(S_j)} \cdot \sum_{M \subset \mathfrak{S}(S_j, \Gamma(\nu))} \frac{v_0(M)}{N(\mu_1\tau + \mu_2)^r\,|\mu^1\tau + \mu_2|^s}.$$

Damit erhalten wir das gewünschte Resultat

$$F(\mathfrak{Q}; \tau) = \frac{1}{e_0} \sum_j \frac{w(S_j)}{v_0(S_j)} G_{-r}(\tau; \underline{S_j}, \nu)$$

(für $k = 3$ nur unter den genannten Einschränkungen für $R(\sqrt{D})$). Insgesamt gilt also:

Satz 5. *Die Geschlechtsinvariante $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ zu einer primitiven total positiv definiten quadratischen Form $\mathfrak{Q}$ ungerader Variabelnzahl $k \geqq 3$ ist eine Form zur Stufe $\nu = 8\,D\,\Delta_1\,\Delta_2 \ldots \Delta_k$; dabei sind Δ_i $(i = 1, \ldots, k)$, die Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{Q}$. Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist $F(\mathfrak{Q}; \tau)$ eine Linearkombination der Eisensteinreihen $G_{-r}(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \nu)$,* wobei $r = \frac{k}{2}$.

(Eingegangen am 15. September 1937.)

Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung.

Von

Helmut Unkelbach in München.

Wir befassen uns im folgenden mit der Familie derjenigen Funktionen $f(z)$, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllen und untersuchen die Randverzerrung, welche sich bei der durch $w = f(z)$ vermittelten konformen Abbildung des Einheitskreises ergibt.

Bei der Definition des Vergrößerungsverhältnisses auf dem Rand können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der zu untersuchende Punkt des Kreises $|z| = 1$ der Punkt $z = 1$ ist. Wir betrachten nun mit Carathéodory[1]) in der z-Ebene ein Dreieck A, dessen eine Ecke mit dem Punkt $z = 1$ zusammenfällt und dessen entgegengesetzte Seite ganz im Innern des Kreises $|z| < 1$ liegt. Die Punktfolge $z_1, z_2, \ldots$ sei im Innern von A gelegen und es sei $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu = 1$. Wir definieren dann das Vergrößerungsverhältnis D im Punkte $z = 1$ durch

$$D = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu}, \tag{1}$$

falls dieser Grenzwert existiert und endlich ist und von der speziellen Wahl der Folge z_ν nicht abhängt. Dies ist nach Carathéodory sicher dann der Fall, wenn wenigstens für *eine* Folge z_ν

$$\left| \frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu} \right| < M, \tag{2}$$

wo M eine von ν unabhängige positive Zahl ist. Unter dieser Voraussetzung gilt auch

$$\lim_{\nu \to \infty} f'(z_\nu) = D. \tag{3}$$

D heißt die Winkelderivierte von $f(z)$ für $z = 1$. Sie kann natürlich gemäß (1) nur dann einen endlichen Wert annehmen, wenn $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(z_\nu) = 1$ ist. (Statt $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(z_\nu)$ schreiben wir auch kurz $f(1)$.) Gilt dagegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu} = \infty$ für *eine* Folge z_ν, so gilt nach Carathéodory dasselbe für jede Folge z_ν. Wir sagen dann $D = \infty$. Für D gilt nun ganz allgemein die Ungleichung

$$D \geqq 1. \tag{4}$$

[1]) C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen; Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse 1929.

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $w = z$. Die Ungleichung (4) sehen wir auch dann als erfüllt an, wenn $D = \infty$ ist.

In meiner Arbeit „Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist", Mathematische Annalen **115**, habe ich u. a. dargelegt, wie sich die Abschätzung (4) verschärfen läßt, falls ein Wert w_* mit $0 < |w_*| < 1$ existiert, so daß $f(z) \neq w_*$ für $|z| < 1$. In den folgenden Sätzen soll nun die Frage beantwortet werden, wie das Vergrößerungsverhältnis auf dem Rand mit den Abbildungsverhältnissen im Mittelpunkt (Vergrößerungsverhältnis und Drehung) korrespondiert. Zunächst beweisen wir

Satz 1. *Die Funktion $w = f(z)$ möge die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllen und es sei*

$$f'(0) = \varrho e^{\varphi i}, \quad 0 \leqq \varrho < 1, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi.$$

Dann genügt die Winkelderivierte D von $f(z)$ im Punkte $z = 1$ der Ungleichung

$$D \geqq 2\,\frac{1 - \varrho\cos\varphi}{1 - \varrho^2} > 1.$$

Das Gleichheitszeichen steht nur für die Funktion

$$w = z\,\frac{(1 - \varrho e^{\varphi i})z + \varrho(e^{\varphi i} - \varrho)}{\varrho(e^{-\varphi i} - \varrho)z + (1 - \varrho e^{-\varphi i})}.$$

Beim Beweis können wir uns auf den Fall beschränken, daß D endlich ist. Insbesondere ist dann

$$f(1) = 1. \tag{5}$$

Unter dieser Voraussetzung betrachten wir die Funktion

$$f_1(z) \equiv \frac{1 - \varrho e^{-\varphi i}}{1 - \varrho e^{\varphi i}} \cdot \frac{\dfrac{f(z)}{z} - \varrho e^{\varphi i}}{1 - \varrho e^{-\varphi i}\cdot\dfrac{f(z)}{z}}\ ^{2}).$$

Man bestätigt leicht, daß auch $f_1(z)$ die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt und daß

$$f_1(1) = 1. \tag{6}$$

Nun ist wegen (3) und (5)

$$\lim_{\nu \to \infty} \left[\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{z}\right]_{z = z_\nu} = D - 1,$$

also

$$\lim_{\nu \to \infty} f_1'(z_\nu) = \frac{1 - \varrho e^{-\varphi i}}{1 - \varrho e^{\varphi i}} \cdot \frac{(D-1)(1-\varrho^2)}{(1 - \varrho e^{-\varphi i})^2} = \frac{(D-1)(1-\varrho^2)}{1 - 2\varrho\cos\varphi + \varrho^2} \tag{7}$$

[2]) Mit ähnlichen Mitteln hat J. Schur das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen behandelt. Vgl. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Aufl., 1931, S. 139.

für jede innerhalb des Dreiecks A gelegene und gegen Eins konvergierende Punktfolge z_ν. Die Funktion $f_1'(z)$ ist also innerhalb A regulär und auf dem Rand von A noch stetig und besitzt daher auf A eine obere Schranke M. Wegen (6) ist

$$|1 - f_1(z_\nu)| \leqq \int_{z_\nu}^{1} |f_1'(z)|\,|dz| \leqq M\,|1 - z_\nu|$$

falls das Integral über die gerade Strecke $\overline{z_\nu\,1}$ erstreckt wird. Danach ist die Bedingung (2) (mit f_1 an Stelle von f) erfüllt und die Funktion $f_1(z)$ besitzt eine endliche Winkelderivierte D_1. Nach (3) ist dann $D_1 = \lim_{\nu\to\infty} f_1'(z_\nu)$ und nach (4) und (7)

$$\frac{(D-1)\,(1-\varrho^2)}{1 - 2\,\varrho\,\cos\,\varphi + \varrho^2} \geqq 1$$

oder

$$D \geqq 2\,\frac{1 - \varrho\cos\varphi}{1 - \varrho^2}$$

wie behauptet war. Das Gleichheitszeichen kann nur dann stehen, wenn

$$f_1(z) \equiv \frac{1 - \varrho\,e^{-\varphi i}}{1 - \varrho\,e^{\varphi i}} \cdot \frac{\dfrac{f(z)}{z} - \varrho\,e^{\varphi i}}{1 - \varrho\,e^{-\varphi i}\cdot\dfrac{f(z)}{z}} = z.$$

Daraus folgt

$$f(z) = z\,\frac{(1 - \varrho\,e^{\varphi i})\,z + \varrho\,(e^{\varphi i} - \varrho)}{\varrho\,(e^{-\varphi i} - \varrho)\,z + (1 - \varrho\,e^{-\varphi i})}.$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Unabhängig von der Drehung im Mittelpunkt läßt sich nach Satz 1 folgendes aussagen, wenn eine obere Schranke für $|f'(0)|$ bekannt ist (wir bezeichnen im folgenden stets mit $w = f(z)$ eine beliebige Funktion, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt, und mit D ihre Winkelderivierte im Punkte $z = 1$):

Satz 2. *Ist* $|f'(0)| \leqq \varrho < 1$, *so gilt*

$$D \geqq \frac{2}{1+\varrho}\,^{3}).$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion

$$w = z\,\frac{z + \varrho}{\varrho\,z + 1}.$$

Auf Grund von Satz 2 läßt sich der Satz von Löwner für den Fall, daß nicht $f(z) \equiv z$ ist, in folgender Weise verschärfen: Bildet die Funktion

[3]) In einer demnächst erscheinenden Arbeit werde ich eine Verschärfung dieser Abschätzung für schlichte Abbildungen angeben.

$w = f(z)$ einen Bogen der Länge a des Kreises $|z| = 1$ in stetiger Weise auf einen Bogen der Länge b des Kreises $|w| = 1$ ab, und ist außerdem $|f'(0)| \leqq \varrho < 1$, so gilt

$$b > \frac{2a}{1+\varrho}. \tag{8}$$

Wir können aus Satz 1 noch einige weitere Folgerungen ziehen. Es zeigt sich nämlich, daß die Ungleichung (4) sich im Falle $\varphi \neq 0$ ganz unabhängig von $|f'(0)|$ verbessern läßt gemäß dem nachstehenden

Satz 3. *Ist* $f'(0) = |f'(0)|e^{\varphi i}$, *so gilt*

a) $D \geqq 1 + \sin|\varphi|$ *im Falle* $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$.

Das Gleichheitszeichen steht nur

$$\text{für} \quad w = e^{\varphi i} z \, \frac{z + i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i} \quad \text{im Falle } \varphi \geqq 0$$

$$\text{für} \quad w = e^{\varphi i} z \, \frac{z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - i}{z - i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{im Falle } \varphi \leqq 0$$

b) $D \geqq 2$ *im Falle* $\frac{\pi}{2} \leqq |\varphi| \leqq \pi$.

Das Gleichheitszeichen steht nur für

$$w = z^2.$$

Zum Beweis von Satz 3 braucht man nur das Minimum von $2\,\frac{1 - \varrho\cos\varphi}{1-\varrho^2}$ für festes φ und $0 \leqq \varrho \leqq 1$ zu bestimmen. Es liegt für $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$ bei $\varrho = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{|\varphi|}{2}\right)$ und für $|\varphi| \geqq \frac{\pi}{2}$ bei $\varrho = 0$.

Die Schranke von Satz 3b läßt sich verschärfen, wenn man (im Gegensatz zu Satz 2) eine *untere* Schranke für $|f'(0)|$ kennt. Aus Satz 1 folgt nämlich

$$D \geqq \frac{2}{1-\varrho^2}, \text{ falls } \Re(f'(0)) \leqq 0 \text{ und } |f'(0)| \geqq \varrho \geqq 0. \tag{9}$$

Für reelles $f'(0)$ gilt die folgende Ungleichung (10), durch welche (9) im Falle $f'(0) \leqq \alpha < 0$ verschärft wird:

$$D \geqq \frac{2}{1+\alpha}, \text{ falls } f'(0) \leqq \alpha, \; -1 < \alpha \leqq 1. \tag{10}$$

Zum Schluß sei noch auf eine merkwürdige Diskontinuität hingewiesen, welche die Familie derjenigen Funktionen $w = f(z)$ aufweist, für welche $\Re(f'(0)) \leqq |f'(0)|^2$ ist. Nach Satz 1 ist für diese Funktionen $D \geqq 2$; eine einzige Ausnahme bildet jedoch die der Familie angehörende Funktion $w = z$, für welche $D = 1$ ist.

(Eingegangen am 29. September 1937.)

Additional notes on the inversion of the Laplace transformation.

By

R. V. Churchill in Ann Arbor, Michigan, USA.

In a recent paper[1]) conditions on a function $f(s)$ were established under which its inverse Laplace transform $F(t)$ is represented by a convergent series determined by f. By the inverse transformation $\mathfrak{L}^{-1}\{f\} = F$ it is understood that for s in some half-plane $R(s) > \gamma$,

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s). \tag{1}$$

The following series inversion formula was employed.

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n t} \sum_{p=1}^{\sigma_n} A_{np} t^{p-1}/(p-1)! \qquad (t > 0), \tag{2}$$

where s_n are poles of $f(s)$ of order σ_n and A_{np} are coefficients in the Laurent expansion of f about s_n:

$$f(s) = \sum_{p=1}^{\sigma_n} A_{np}(s - s_n)^{-p} + \sum_{p=0}^{\infty} B_{np}(s - s_n)^p. \tag{3}$$

When $f(s) = f_1(s)/f_2(s)$ and the singularities of f in each finite region are simple poles coinciding with simple zeros of f_2, (2) reduces to the formal infinite Heaviside expansion formula

$$F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{f_1}{f_2}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(s_n)}{f_2'(s_n)} e^{s_n t} \qquad (t > 0), \tag{4}$$

The conditions of validity of (2) included one on the order of magnitude of $|f(s)|$ on circular or rectangular paths passing between the poles. The

[1]) R. V. Churchill, The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary value problems. Math. Zeitschr. **42** (1937), pp. 567—579. This paper should have contained a reference in footnote [11]) to E. Hille and J. D. Tamarkin, On moment functions, Proc. Nat. Acad. Sc. **19** (1933), pp. 902—908, where earlier function-theoretic conditions of the type referred to are given. Hille and Tamarkin give conditions under which $f(s)$ is represented as a Laplace integral with $F(t)$ equal to the limit in the mean of the complex integral; they give further related criteria in their paper: On the theory of Laplace integrals. Proc. Nat. Acad. Sc. **19** (1933), pp. 908—912. The author takes this opportunity to partially correct the omission of these references.

transforms of the solutions of many boundary value problems can readily be shown to satisfy those conditions. When the problem involves a differential equation of parabolic type however, the corresponding conditions for parabolic paths are more useful. It is the principal purpose of this note to establish and illustrate such conditions.

§ 1.

Conditions for the inversion in the form of an integral.

One of the criteria used in the preceding paper for the validity of the series inversion formula (2) is the condition that the complex integral inversion formula

$$\mathfrak{L}^{-1}\{f\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz \tag{5}$$

be valid for some real γ. Sufficient conditions for the representation (5) were given there[2]). The following set has been shown since to be sufficient and of greater practical value[3]).

Lemma 1. *Let $f(s)$ be analytic in some half-plane $R(s) > \alpha$ and, for some $\gamma > \alpha$, let the integral* (5) *converge uniformly with respect to t in each finite interval in $t > 0$. Also let $|s f(s)|$ be bounded in $R(s) \geqq \gamma$. Then* (5) *is valid; i. e., its right member converges to a function $F(t)$ for which $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ when $R(s) > \gamma$. Moreover $F(t)$ is continuous in every finite interval in $t > 0$.*

The conditions of this lemma are satisfied by the Laplace transforms of most of the continuous functions in physics. For let $F(t)$ be continuous in each $0 \leqq t \leqq T$ and have a derivative $F'(t)$ with at most a finite number of ordinary discontinuities in each such interval and such that, for all $t \geqq 0$ and some fixed $\alpha \geqq 0$, $F'(t)\, e^{-\alpha t}$ is bounded and monotone by segments of some minimum positive length. Then it is known[4]) that the transform $f(s)$ of F is analytic in $R(s) > \alpha$ and, for any $\gamma > \alpha$, can be written in the form

$$f(s) = \frac{F(0)}{s} + \frac{\varphi(s)}{s^2} \qquad \text{in } R(s) \geqq \gamma, \tag{6}$$

---

[2]) Theorems 1 and 2 in the first paper under[1]). It has been called to the author's attention that the proof of Theorem 1 can be given by using the same argument employed earlier by Tamarkin in establishing similar conditions in his paper: On Laplace's integral equations. Trans. Am. Math. Soc. **28** (1926), pp. 417—425; p. 418. Although his conditions are stated for a half-plane $R(s) > \alpha > 0$ the assumption $\alpha > 0$ is not used in his argument.

[3]) R. V. Churchill, The solution of linear boundary value problems in physics by means of the Laplace transformation. I. A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Annalen **114** (1937), pp. 591—613 (Theorem 3). The conditions given there also permit the failure of uniform convergence for values of t other than $t = 0$.

[4]) Theorem E of the paper cited under [3]).

where $|\varphi(s)|$ is bounded in the half-plane $R(s) \geqq \gamma$. The integral (5) with $f(z) = F(0)/z$ converges uniformly with respect to t in each finite interval in $t > 0$; and with $f(z) = \varphi(z)/z^2$ it converges uniformly and absolutely in each $0 \leqq t \leqq T$. Hence the function (6) satisfies the conditions of Lemma 1. In fact one of the most useful tests is the following.

Lemma 2. *The inversion formula* (5) *with* $\gamma > 0$ *is valid if*

$$f(s) = \frac{A}{s} + \frac{\varphi(s)}{s^2} \qquad \text{in } R(s) \geqq \gamma,$$

where A *is a constant and, for some fixed* α $(0 \leqq \alpha < \gamma)$, $\varphi(s)$ *is analytic in* $R(s) > \alpha$ *and bounded in* $R(s) \geqq \gamma$.

The conditions of this lemma are a special case not only of those of Lemma 1, but also of conditions given earlier by Tamarkin [5]). The above lemmas are stated here because they constitute practical tests of the validity of (5), tests which can be applied quite easily to many of the boundary value problems of physics.

§ 2.

Direct expansion of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ in series.

The following test is a useful one for determining the validity of the series inversion formula (2).

Theorem 1. *Let* $f(s)$ *be analytic in each finite region of the complex plane except for poles* s_m *of order* σ_m *in some half-plane* $R(s) < \gamma$, *and admit the integral form* (5) *of* $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ *on the line* $R(s) = \gamma$. *If for some fixed* $k > 0$, $|s^k f(s)|$ *is bounded at all points in* $R(s) \leqq \gamma$ *on a sequence of parabolas*

(7) $\qquad \varrho = 2 l_n/(1 - \cos\vartheta) \qquad (l_n > 0,\ l_n \to \infty \text{ as } n \to \infty;\ n = 1, 2, \ldots)$

the series (2) *converges to* $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ *for* $t > 0$, *when its terms which correspond to poles lying between adjacent parabolas are grouped as a single term.*

The proof follows the same lines as that of Theorem 3 of the earlier paper [1]). Let P_n denote the arc of the parabola (7) in $R(s) \leqq \gamma$ and L_n the segment of the line $R(s) = \gamma$ cut off by P_n. The theorem of residues applied to the function $e^{st} f(s)$ gives

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(L_n)} e^{st} f(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{(P_n)} e^{st} f(s)\, ds = \sum_{m=1}^{m_n} e^{s_m t} \sum_{p=1}^{\sigma_m} A_{mp}\, t^{p-1}/(p-1)!,$$

where m_n is the number of poles inclosed by P_n and L_n. As $n \to \infty$ the first integral on the left becomes the integral (5) which is assumed to represent

---

[5]) Conditions (A_1) and (A_4) in his paper cited under [2]). The special conditions of Lemma 2 however were given still earlier by S. Pincherle, Sur les fonctions determinantes. Annales de l'École Norm. Sup. 22 (1905), pp. 1—68; p. 31ff.

$\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$, so the theorem is true if the limit of the second integral on the left is zero.

When $s = \varrho e^{i\vartheta}$ is a point on P_n,

$$s = l_n e^{i\vartheta} \csc^2 \vartheta/2, \quad ds = \varrho e^{i\vartheta}(i - \cot \vartheta/2)\, d\vartheta,$$

and the integral J over P_n satisfies the inequality

$$(8) \quad |J| = \Big|\int_{(P_n)} e^{st} f(s)\, ds\Big| \leqq \int_{\pi/2 - \psi_n}^{3\pi/2 + \psi_n} e^{t l_n \cos\vartheta \csc^2 \vartheta/2} \big| f(\varrho e^{i\vartheta}) \csc \vartheta/2 \big| \varrho\, d\vartheta,$$

where, in terms of the radius vector ϱ_n of the upper endpoint of P_n,

$$\psi_n = \sin^{-1}(\gamma/\varrho_n) \qquad (-\pi/2 < \psi_n < \pi/2).$$

When $\pi/2 - \psi_n \leqq \vartheta \leqq 3\pi/2 + \psi_n$ and $\gamma \geqq 0$, $c_n^2 \equiv \csc^2(\pi/4 - \psi_n/2)$ is the maximum value of $\csc^2 \vartheta/2$. Since $|\varrho^k f|$ is bounded $(k > 0)$, $|\varrho f \csc \vartheta/2| < M l_n^{1-k} |c_n|^3$; hence

$$|J| < 2M |c_n|^3 l_n^{1-k} \Big\{ \int_{\pi/2 - \psi_n}^{\pi/2} e^{t l_n c_n^2 \cos\vartheta}\, d\vartheta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{t l_n \cos\vartheta}\, d\vartheta \Big\}$$

$$= 2M |c_n|^3 l_n^{1-k} \Big\{ \int_0^{\psi_n} e^{t l_n c_n^2 \sin\varphi}\, d\varphi + \int_0^{\pi/2} e^{-t l_n \sin\varphi}\, d\varphi \Big\}.$$

Since $\varphi/2 \leqq \sin\varphi \leqq \varphi$ here,

$$|J| < \frac{2M |c_n|^3}{t l_n^k} \{(e^{t c_n^2 l_n \psi_n} - 1) c_n^{-2} + 2(1 - e^{-t l_n \pi/4})\}.$$

As $n \to \infty$, $l_n \to \infty$ and $\psi_n \to 0$, so $c_n^2 \to 2$; also $2 l_n \psi_n \to \gamma$. Hence $J \to 0$ for $t > 0$.

It is evident that the upper limit of $|J|$ given by (8) is less when $\gamma < 0$ than when $\gamma = 0$, so $J \to 0$ as $n \to \infty$ for any γ and the theorem is proved.

§ 3.

Applications of the series expansion.

The known conditions for the integral representation (5) of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ are broader than those for the series representation (2). Hence to solve boundary value problems in partial differential equations using the Laplace transformation the process which has been presented is that of passing from the solution of the transformed problem to that of the original by means of (5), and completely establishing the solution in this integral form [6]). Although the result can be written at once as a real infinite integral, that form is

[6]) The tests for using this method are given in the paper cited under [3]).

generally not as useful for computation as the series form. In case of parabolic differential equations Theorem 1 is especially useful in obtaining this form. It has just been used as the only available means to establish the series form of the temperature function for a slab of two layers [7]).

Some simpler applications of Theorem 1 to problems whose solutions by other methods are known, are presented here. When the initial temperature is zero the simple heat equation $U_{xx} = U_t$ has, for its corresponding equation in the transform of U, the equation $d^2u/dx^2 = su$. So it is easily seen that the function

$$u(x, s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$$

is formally the transform of the temperature in a slab with the face $x = 0$ insulated, and the face $x = a$ held at temperature $U = 1$. For each x in $0 \leqq x \leqq a$, $u(x, s)$ satisfies the conditions of Lemma 2 for any $\gamma > 0$; moreover it can be seen from character of u in $R(s) \geqq \gamma$ that the integral form of its inverse transform does satisfy all conditions of the boundary value problem [8]).

The conditions of Theorem 1 are satisfied by u for any $\gamma > 0$ and $k = 1$. For the singularities of u are the simple poles

$$s = 0, \; s = s_n = -(2n-1)^2 \pi^2 (2a)^{-2}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

and each pair of adjacent parabolas of the system

$$\varrho = l_n \csc^2 \vartheta/2 \quad \text{with} \quad l_n = n^2 \pi^2 a^{-2}$$

incloses just one of the poles s_n. When $s = \varrho e^{i\vartheta}$ is on any of these parabolas, $\sqrt{s} = (\cot \vartheta/2 + i)\, n\pi/a$ and since

$$|\cosh(\lambda + i\mu)|^2 = \sinh^2 \lambda + \cos^2 \mu,$$

it follows that

$$\left|\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}\right|^2 = \frac{\sinh^2(n\pi x a^{-1} \cot \vartheta/2) + \cos^2(n\pi x/a)}{\sinh^2(n\pi \cot \vartheta/2) + 1} \leqq 1$$

---

[7]) R. V. Churchill, The solution of linear boundary value problems in physics by means of the Laplace transformation. Part II. to appear in Math. Annalen.

[8]) Theorem 10 of the paper cited under [3]) can be used to show at once that the inverse transform of u satisfies all conditions except that at $x = a$. This remaining condition can be shown to be satisfied by writing

$$u = s^{-1} e^{-(a-x)\sqrt{s}} + s^{-1}\left[\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}} - e^{-(a-x)\sqrt{s}}\right].$$

The function in brackets has the order of $e^{-a\sqrt{s}}$ in $R(s) \geqq \gamma > 0$, so the same theorem applies to it for $0 \leqq x \leqq a$. For the first function the integral form of the inverse is shown in the paper cited under [7]) to approach unity as x approaches a.

when $0 \leqq x \leqq a$. Hence $|su|$ is bounded on the parabolas, and the inversion can be written at once from (4):

$$(9)\quad U(x,t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}\right\} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cos\frac{m\pi x}{2a}\, e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{4a^2}},$$

$$(|x| \leqq a;\ t > 0).$$

This series therefore converges in the ordinary sense to the function $U(x,t)$ which satisfies all the conditions of the temperature problem.

The solution of the above problem when the surface $x = a$, instead of being insulated, is held at temperature $U = 0$ has already been established with the aid of the Laplace transformation [9]). The methods used for the steps of inversion and verification of the solution were quite different from those used above. These steps can be taken in the same way as in the above problem however. The temperature function is

$$(10)\qquad \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s\sinh a\sqrt{s}}\right\} = \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}} \quad (t > 0).$$

The validity of this inversion formula when $|x| \leqq a$ follows from Lemma 2 and Theorem 1 ($k = 1$) with the parabolas for which $l_n = (2n-1)^2\pi^2(2a)^{-2}$.

The two known inversion formulas

$$(11)\ \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh a\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{a}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}},\ (|x| \leqq a;\ t > 0),$$

$$(12)\ \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}\right\} = \frac{2}{a}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin\frac{m\pi x}{2a}\, e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{4a^2}},\ (|x| \leqq a;\ t > 0),$$

established originally [10]) by finding the direct transform of the theta functions represented by their right-hand members, are easily established by the above process. They are given formally by differentiating (10) and (9) with respect to x.

---

[9]) Parts I and II of the series of papers by G. Doetsch (Part I with F. Bernstein), Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 285—292; 293—306. The solution is established there for variable surface temperatures, and in a later part for a non-uniform initial temperature.

[10]) G. Doetsch, Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus. Math. Annalen **90** (1923), S. 19—25. Applications of these inversions appear in the papers cited under [9]) and in G. Doetsch, Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 613—628.

(Eingegangen am 5. November 1937.)

Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen.

Von

H. Hopf und H. Samelson in Zürich.

Der Kongruenzsatz für Eiflächen lautet:

Jede Isometrie zwischen zwei analytischen Eiflächen ist eine Kongruenz.[1])

Er ist von Cohn-Vossen im Jahre 1927 bewiesen worden.[2])

Die vorliegende Arbeit besteht in einer neuen Darstellung des Cohn-Vossenschen Beweises; unsere Absicht ist, diesen Beweis leichter verständlich zu machen. Die Abweichungen von seiner ursprünglichen Fassung bestehen nicht nur in größerer Ausführlichkeit — in der kurzen Note von Cohn-Vossen sind manche Schritte nur angedeutet —, sondern besonders auch in einigen inhaltlichen Änderungen. Jedoch ändern wir nichts an dem eigentlichen Gedankengang — dieser ist so natürlich und durchsichtig, daß wir ihn einer Verbesserung weder für bedürftig noch für fähig halten[3]); wir geben ihn in den Nummern 12 und 16 (§ 4) wieder. Aber zwei Hilfssätze — die Hilfssätze A und B des § 4 — begründen wir auf neue Weisen, und dadurch werden, besonders für den Hilfssatz B, wesentliche Vereinfachungen erzielt; und zwar werden diese Hilfssätze leicht auf die §§ 1, 2, 3 zurückgeführt, die uns auch an sich, ohne die Anwendung auf Eiflächen, Interesse zu verdienen scheinen.

Auch von den Sätzen dieser drei ersten Paragraphen sind neu höchstens die des § 2. Der § 1 enthält neben einem Bericht über die Grundbegriffe aus der Poincaré-Bendixsonschen Theorie des „Index" lediglich einen Satz, der vor kurzem von Schilt, in engem Anschluß an die Cohn-Vossensche Arbeit, hergeleitet worden ist (Nr. 6), und die Sätze des § 3 stammen schon von Weingarten; jedoch geben wir in beiden Fällen Beweise an, die wohl elementarer sind als die ursprünglichen[4]). Übrigens sind die drei ersten Paragraphen von-

[1]) Eine „Eifläche" ist eine im Raum gelegene, geschlossene Fläche vom Geschlecht 0 mit überall stetiger und positiver Krümmung. Eine „Isometrie" zwischen zwei Flächen ist eine längentreue Abbildung; sie heißt eine „Kongruenz", falls man durch eine — eigentliche oder uneigentliche — Bewegung die eine Fläche so mit der anderen zur Deckung bringen kann, daß jeder Punkt mit seinem Bildpunkt zusammenfällt.

[2]) S. Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1927, S. 125.

[3]) Solange man sich auf *analytische* Flächen beschränkt.

[4]) Genauere historische Angaben werden unten an den betreffenden Stellen gemacht.

einander unabhängig; daher ist zum Beispiel für die Lektüre der §§ 2 und 3 die Kenntnis des ziemlich langen § 1 nicht nötig.

§ 1.

Bericht über die Theorie des Index; der Index eines Flachpunktes im Netz der Asymptotenlinien.

Die Nummern 1 bis 4 dieses Paragraphen haben hauptsächlich referierenden Charakter[5]); erst in Nr. 5 und 6 wird etwas bewiesen. Angewandt werden später der Poincarésche Satz aus Nr. 3 und der Satz über Asymptotenlinien aus Nr. 6.

1. In einem Gebiet G der Ebene sei ein eindeutiges und stetiges Feld von Linienelementen — d. h. unorientierten Geradenrichtungen — gegeben. Bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges[5a]) W in G macht das Element des Feldes eine Drehung um einen Winkel $j_W\,\pi$, wobei die Zahl j_W ganz ist; sie heißt der „Index" des Feldes auf W. Es ist also, wenn wir den Winkel α zwischen der Feldrichtung und einer festen Richtung als stetige Funktion des Wegparameters t auffassen und die Änderung einer stetigen Funktion f von t bei Durchlaufung von W mit $\delta_W(f)$ bezeichnen,

$$j_W = \frac{1}{\pi}\,\delta_W(\alpha). \tag{1}$$

Man zeigt erstens leicht: *Bei stetiger Abänderung des Feldes bleibt j_W ungeändert*; und zweitens: bei stetiger Deformation von W innerhalb des Gebietes G bleibt j_W ungeändert. Aus der zweiten Eigenschaft folgt: ist o eine isolierte singuläre Stelle des Feldes[5b]), so hat j_W für alle hinreichend kleinen Wege W, die o einmal positiv umlaufen, denselben Wert; dieser heißt der Index von o.

Wir setzen nun weiter voraus: das Feld sei so weit regulär (Lipschitz-Bedingung), daß es sich eindeutig integrieren läßt, also als Tangentenfeld einer regulären Kurvenschar aufgefaßt werden kann. W sei jetzt ein einfach ge-

---

[5]) Literatur: H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, Journ. de Math. (3), t. 7 (1881), p. 375 (besonders Chap. III); (4), t. 1 (1885), p. 167 (besonders Chap. XIII). — I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math. 24 (1901), p. 1 (besonders p. 38ff.). — Ferner: H. Schilt, Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze, Compos. Math. 5 (1938), S. 239.

[5a]) Ein geschlossener Weg ist das eindeutige stetige Bild einer orientierten Kreislinie; ist die Abbildung eineindeutig, so heißt er einfach geschlossen; für einen einfach geschlossenen Weg W soll im folgenden immer diejenige Orientierung gewählt sein, für welche das Innengebiet von W links liegt.

[5b]) D. h.: eine Umgebung von o, mit Ausnahme von o selbst, gehört zu G.

schlossener Weg[5a]) mit stetiger Tangente, der nur endlich viele Berührungen mit Scharkurven besitzt; und zwar werde er i-mal von innen, a-mal von außen berührt; durchsetzende Berührungen zählen wir nicht[5c]). Bezeichnet τ den Tangentenrichtungswinkel von W, so geht bei Durchlaufung von W der Winkel $\alpha - \tau$, wie ein Blick auf eine Figur lehrt, bei jeder inneren Berührung im wachsenden, bei jeder äußeren im fallenden Sinne durch ein ganzes Vielfaches von π hindurch, während an keiner anderen Stelle ein solcher Durchgang stattfindet; daher ist $\delta_W(\alpha - \tau) = (i - a)\,\pi$, und folglich, da $\delta_W(\tau) = 2\,\pi$ ist,

$$j_W = i - a + 2. \tag{2}$$

Eine isolierte Singularität läßt sich immer, wie man leicht zeigt, auf beliebig kleinen Wegen umlaufen, welche die soeben an W gestellten Forderungen erfüllen; daher ist die Formel (2) zur Bestimmung des Index von o brauchbar.

Aus der Deutung (2) von j_W ist ersichtlich: *der Index einer isolierten Singularität o ist invariant gegenüber regulärer Koordinatentransformation mit von 0 verschiedener Funktionaldeterminante in einer Umgebung von o.* Infolgedessen hat die Definition des Index auch für Felder auf krummen Flächen einen Sinn, der unabhängig von den zugrundegelegten speziellen Flächenparametern ist.

2. Jetzt seien den Punkten eines ebenen Gebietes G in eindeutiger und stetiger Weise (ungeordnete) *Paare* von Linienelementen zugeordnet; dabei setzen wir voraus, daß die beiden Elemente eines Paares niemals zusammenfallen[6]); dann sprechen wir von einem „Netz" von Linienelementen. Um den Index zu definieren, betrachten wir die winkelhalbierenden Linienelemente eines Paares; sie bilden ein rechtwinkliges Kreuz; bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges W dreht sich dieses Kreuz um einen Winkel $j_W\,\pi$, der ein ganzes Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist (so daß also $2\,j_W$ ganz ist); j_W nennen wir den Index des Netzes auf W. Definieren wir stetige Funktionen $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$ des Wegpara-

---

5c) Ist p ein Punkt von W, so wird jeder hinreichend kleine, p enthaltende Teilbogen der durch p gehenden Scharkurve C durch p in zwei Bögen C_1, C_2 zerlegt, von denen jeder ganz auf einer Seite von W liegt; denn andernfalls gäbe es einen beliebig kleinen Teilbogen von C, der W in unendlich vielen Punkten p_i träfe, und dies ist unmöglich, da es dann, wie man leicht zeigt, auf W zwischen je zwei Punkten p_i eine Berührung mit dem Felde geben müßte — entgegen der vorausgesetzten endlichen Anzahl der Berührungen. Infolge der Existenz der Bögen C_1, C_2 wird W im Punkte p durch C entweder glatt durchsetzt oder von einer Seite her (also von innen oder von außen) berührt.

6) Diese Voraussetzung ist übrigens meistens entbehrlich.

meters t so, daß sie in jedem Punkt Richtungswinkel der Linienelemente des Netzes angeben, so ist demnach

$$j_W = \frac{1}{\pi} \cdot \delta_W \left(\frac{\alpha' + \alpha''}{2} \right). \tag{3}$$

Analog wie in Nr. 1 ergibt sich die Invarianz des Index bei stetigen Abänderungen des Netzes oder des Weges, und analog wie dort erklärt man den Index einer isolierten Singularität.

Für das weitere ist die Feststellung nützlich, daß für ein Netz längs eines Weges W die folgenden beiden Fälle möglich sind. Fall (a): das Netz ist die Zusammensetzung zweier Felder; bezeichnen dann α', α'' deren Richtungswinkel, so wird, da in keinem Punkt die beiden Linienelemente zusammenfallen, die Differenz $\alpha' - \alpha''$ niemals ein ganzes Vielfaches von π, und daher sind die, nach (1) zu bestimmenden Indizes j'_W, j''_W der beiden Felder einander gleich; hieraus und aus (3) folgt:

$$j_W = j'_W = j''_W \qquad \text{im Falle (a).} \tag{3a}$$

Fall (b): das Netz zerfällt bei Durchlaufung von W nicht in zwei Felder; wenn man in diesem Falle ein Linienelement des Netzes längs des geschlossenen Weges stetig innerhalb des Netzes fortsetzt, so kommt man nach einmaligem Umlauf nicht in das Ausgangselement, sondern in das andere Element des Ausgangspaares zurück, und erst nach zweimaligem Umlauf wieder in das Ausgangselement; definiert man die stetige Funktion $\alpha\,(t)$ des Wegparameters t so, daß sie immer einen Richtungswinkel eines Netzelementes bezeichnet, und versteht man unter δ_{2W} die Änderung einer Funktion bei zweimaliger Durchlaufung von W, so erhält die Formel (3), die sich ja als

$$j_W = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[\delta_W(\alpha') + \delta_W(\alpha'') \right]$$

schreiben läßt, die Gestalt:

$$j_W = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \delta_{2W}(\alpha) \qquad \text{im Falle (b).} \tag{3b}$$

Wir setzen jetzt, ähnlich wie in Nr. 1, voraus, daß sich das Netz integrieren läßt, d. h. daß ein Netz regulärer Kurven existiert, deren Tangenten die Richtungen des gegebenen Netzes haben. W sei ein einfach geschlossener Weg mit stetiger Tangente, der nur endlich viele Berührungen mit Netzkurven hat, und die Anzahlen der inneren und der äußeren Berührungen seien wieder i bzw. a. Wir behaupten:

$$j_W = \frac{i - a}{2} + 2. \tag{4}$$

Dies ergibt sich im Falle (a), indem man die für die beiden Felder gültigen Formeln (2) addiert und (3a) anwendet; im Falle (b) verfahre man wie beim

Beweise von (2), durchlaufe aber W zweimal, beachte, daß $\delta_{2W}(\tau) = 4\pi$ ist, und wende (3b) an.

Auch für Netze hat die Bemerkung, die im Anschluß an (2) gemacht wurde, Gültigkeit, und man kann daher die Formel (4) zur Indexbestimmung für isolierte Singularitäten verwenden[7]). Ferner ergibt sich, wie am Schluß von Nr. 1, die Invarianz des Index gegenüber Koordinatentransformationen, so daß wir die Indizes auch in Netzen auf krummen Flächen betrachten können.

3. Sowohl für Felder wie für Netze haben die Indizes die folgende additive Eigenschaft, die sich in bekannter Weise aus (1) und (3) ergibt: Es sei W ein einfach geschlossener Weg, in dessen Innerem nur punktförmige Singularitäten, und diese nur in endlicher Anzahl, liegen; dann ist j_W gleich der Summe der Indizes dieser Singularitäten.

Eine wichtige Anwendung hiervon ist die folgende. Auf einer geschlossenen Fläche, die sich eineindeutig und regulär auf eine Kugel abbilden läßt — also z. B. auf einer regulären Eifläche — sei ein Feld oder ein Netz gegeben, das in höchstens endlich vielen Punkten singulär wird. Wir zerlegen die Fläche durch einen differenzierbaren, einfach geschlossenen Weg W, der das Feld oder Netz höchstens endlich oft berührt, in zwei Hälften; jede von ihnen läßt sich als ebener Bereich auffassen (nach einer stetig differenzierbaren, eineindeutigen Abbildung); dann kann man auf die Ränder dieser Bereiche die eben formulierte Summenregel anwenden; die Indizes der Randkurven deuten wir nach (2) bzw. (4); dann ergibt sich durch Addition, da sich für die beiden Hälften die Begriffe „innen" und „außen" miteinander vertauschen, der Satz von Poincaré: Liegt auf einer Fläche vom Typus der Kugel ein Feld oder Netz mit endlich vielen Singularitäten vor, so ist deren Indexsumme gleich 4.

Wir werden hiervon nur den folgenden Teil brauchen: *Besitzt ein Netz auf einer Eifläche höchstens endlich viele Singularitäten, so besitzt es wenigstens eine Singularität mit positivem Index.*

4. Wir betrachten Singularitäten *spezieller Felder.* Es sei $f(x, y)$ eine Funktion, die in einem Gebiet der (xy)-Ebene stetig differenzierbar ist; die „kritischen Stellen" von f sind die Nullstellen des Gradienten (f_x, f_y); sie sind singuläre Punkte des Feldes der Niveaurichtungen $f = \text{const.}$. Es ist leicht, den Verlauf der Niveaulinien in der Umgebung einer isolierten kritischen Stelle o so weit zu diskutieren, daß sich der Index von o bestimmen läßt[8]):

Hat f in o ein Extremum, so sind in der Nähe von o die Niveaulinien von f einfach geschlossene Kurven, die o im Inneren enthalten; da längs einer solchen Linie die Änderung der Niveaurichtung 2π beträgt, ist in diesem Fall $j = 2$.

---

[7]) So bei Cohn-Vossen, a. a. O.

[8]) Man vgl. Schilt, a. a. O., 1. Teil, Abschn. 1.

f habe in o kein Extremum; es sei etwa $f(o) = 0$, und f nehme also in der Nähe von o sowohl positive wie negative Werte an. Dann stellt man leicht fest: die Umgebung von o zerfällt in eine Anzahl von Sektoren, in denen f wechselndes Vorzeichen hat; die Anzahl der Sektoren ist daher gerade, etwa $2n$; es ist also $2n \geqq 2$; es gibt genau $2n$ Niveaulinien $f = 0$, die in o enden; sie trennen die Sektoren voneinander. Bei näherer Betrachtung erhält man ohne große Mühe die folgende Formel, die in einer allgemeineren Formel von Bendixson enthalten ist[9]): $j = 2 - 2n$.

Wir werden nur das folgende Korollar dieser Formel brauchen: *Die Funktion f habe an der isolierten kritischen Stelle o kein Extremum; dann ist der Index, den o in bezug auf die Niveaulinien hat, $\leqq 0$.*

5. Netze sind, besonders in der Differentialgeometrie, häufig durch Differentialgleichungen

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 = 0 \tag{5}$$

mit

$$AC - B^2 < 0 \tag{6}$$

gegeben, wobei A, B, C Funktionen von x und y sind. Ist o eine gemeinsame Nullstelle von A, B, C, in deren Umgebung sonst nirgends $A = B = C = 0$ wird (sondern (6) gilt), so ist o eine isolierte Singularität des Netzes. Zur Bestimmung des zugehörigen Index ist das folgende Verfahren praktisch.

Wir führen einen Parameter t ein, $0 \leqq t \leqq 1$, und betrachten neben (5) die Differentialgleichungen

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + (C - t(A + C))\,dy^2 = 0; \tag{5_t}$$

ihre Diskriminanten sind

$$D_t = A(C - t(A + C)) - B^2 = (1 - t)(AC - B^2) - t(A^2 + B^2),$$

also ist wegen (6)

$$D_t < 0 \tag{6_t}$$

für alle von o verschiedenen Punkte. Daher gehört zu jedem t ein Netz, in dem o isolierte Singularität ist. Da die Netze sich mit t stetig ändern, bleibt der Index von o fest (Nr. 2); insbesondere ist der zu bestimmende Index j in bezug auf das zu $t = 0$ gehörige Netz (5) zugleich der Index von o in bezug auf dasjenige Netz, das zu $t = 1$ gehört, also durch

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy - A\,dy^2 = 0 \tag{5_1}$$

gegeben ist.

---

[9]) A. a. O. [5]), Théorème XI; im Falle der Niveaulinien ist die dortige Zahl $n_f = 0$; der Bendixsonsche Index i steht zu unserem j in der Beziehung $j = -2i$.

Ein Linienelement des Netzes (5_1) besitze den Richtungswinkel α; nach (5_1) ist

$$A \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha = 0. \tag{7}$$

Nun betrachte man neben den Netzen noch das Feld, das durch

$$A\,dx + B\,dy = 0 \tag{8}$$

gegeben ist; die Singularität, die es in o besitzt, ist infolge (6) isoliert; der Index sei k. Bezeichnet β den Richtungswinkel, der zu einem Linienelement des Feldes (8) gehört, so sieht man aus (7) und (8): es ist $2\alpha \equiv \beta \bmod \pi$; die Richtungswinkel α', α'' der beiden Elemente eines Paares des Netzes (5_1) stehen also mit β in folgendem Zusammenhang:

$$\alpha' \equiv \frac{\beta}{2}, \quad \alpha'' \equiv \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Aus (1) und (3) ergibt sich daher

$$2j = k.^{10}) \tag{9}$$

Unser Ergebnis ist: *Zwischen dem Index j, den o in bezug auf das Netz* (5), *und dem Index k, den o in bezug auf das Feld* (8) *hat, besteht die Beziehung* (9).

6. Auf einer regulären Fläche sei o ein Flachpunkt, d. h. ein Punkt, in dem die zweite Fundamentalform identisch verschwindet; dann ist in o die Krümmung $K = 0$; sonst sei in der Umgebung von o immer $K < 0$. Macht man die Tangentialebene in o zur (xy)-Ebene des (xyz)-Koordinatensystems und stellt man die Fläche durch $z = z(x, y)$ dar, so haben daher z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} in o eine isolierte gemeinsame Nullstelle, während sonst überall

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 < 0 \tag{10}$$

ist. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien lautet

$$z_{xx}\,dx^2 + 2\,z_{xy}\,dx\,dy + z_{yy}\,dy^2 = 0. \tag{11}$$

o ist also eine isolierte Singularität des Asymptotennetzes, und der Index ist definiert.

---

[10]) Das Linienelement $dx : dy$, das durch (8) gegeben ist, steht senkrecht auf dem Vektor (A, B); daher ist k auch der Index in bezug auf dieses Vektorfeld; die Drehung eines Vektors bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges ist immer ein ganzes Vielfaches von 2π; folglich ist k gerade. Nach (9) ist daher j ganz; dies folgt auch daraus, daß das Netz (5) infolge (6) in zwei Scharen zerfällt.

Satz[11]). *Der Index eines isolierten Flachpunktes auf einer sonst negativ gekrümmten Fläche in bezug auf das Asymptotennetz ist stets* $\leqq 0$.

Beweis. Der fragliche Index j steht nach Nr. 5 mit dem Index k, den o in bezug auf das Feld

$$z_{xx}\,dx + z_{xy}\,dy = 0 \tag{12}$$

hat, in der Beziehung (9); unsere Behauptung ist daher gleichbedeutend mit: $k \leqq 0$. Die Gleichung (12) ist die Differentialgleichung der Niveaulinien $z_x(x, y) = \text{const.}$; nach Nr. 4 genügt es daher, zu zeigen, daß z_x in o kein Extremum besitzt. Diese Behauptung ist mit Rücksicht auf (10) in dem folgenden Hilfssatz enthalten:

Hilfssatz. *Die Funktion* $f(x, y)$ *habe in* o *eine isolierte kritische Stelle; es gebe eine solche Funktion* $g(x, y)$, *daß in allen von* o *verschiedenen Punkten die Funktionaldeterminante*

$$f_x\, g_y - f_y\, g_x \neq 0 \tag{13}$$

ist. Dann hat f *in* o *kein Extremum.*

Beweis. Durch $f(x, y) = x'$, $g(x, y) = y'$ ist eine stetige Abbildung F einer Umgebung U des Punktes o der (xy)-Ebene in eine $(x'y')$-Ebene bestimmt; dabei sei $F(o) = o'$. Hätte f in o ein Extremum, so läge — bei hinreichend kleinem U — das Bild $F(U)$ in einer Halbebene, deren Grenze durch o' liefe. Daher ist die Behauptung bewiesen, wenn gezeigt ist: o' ist innerer Punkt von $F(U)$.[12])

Jeder von o verschiedene Punkt p von U besitzt eine Umgebung, die durch F eineindeutig abgebildet wird, da nach (13) die Funktionaldeterminante in p nicht verschwindet; daher kann ein Punkt $p \neq o$ nicht Häufungspunkt der Urbildmenge $F^{-1}(o')$ von o' sein; folglich ist diese Menge höchstens abzählbar[13]). Es gibt daher eine Kreislinie K um o, auf der kein Punkt von $F^{-1}(o')$ liegt; E sei die von K berandete Kreisscheibe. Die Entfernung $\varrho(o', F(K)) = r$ ist > 0; es sei $0 < r' < r$ und V' eine Kreisscheibe mit dem Radius r' und dem Mittelpunkt o'. Das Bild eines beliebigen Radius

---

[11]) Der Satz ist in dem folgenden schärferen Satz von Schilt (a. a. O., Nr. 18) enthalten: „Ist s die „Sattelordnung" von o, d. h. laufen dort $s + 1$ „Täler" und $s + 1$ „Berge" der Fläche zusammen, so ist $j = 1 - s$." Der Beweis von Schilt beruht auf einem Satz über die „Isoklinen" von Cohn-Vossen (a. a. O.), der von Schilt neu dargestellt wird (a. a. O., Nr. 11) und dessen Anwendbarkeit auf Krümmungslinien, und damit auch auf Asymptotenlinien, von Cohn-Vossen hervorgehoben wurde (a. a. O., § 4, 1). — Unser obiger Beweis erscheint uns als elementarer, allerdings weniger tief gehend.

[12]) In dem Fall $f = z_x$, $g = z_y$, auf den wir den Hilfssatz anwenden, ist F im wesentlichen die sphärische Abbildung der Fläche $z = z(x, y)$.

[13]) Sie ist sogar endlich; cf. Schilt, a. a. O., Nr. 9.

von E ist eine stetige Kurve, die o' mit $F(K)$ verbindet; daher gibt es in V' gewiß Punkte $q' \neq o'$, die zu $F(E)$ gehören; wir behaupten sogar: $V' \subset F(E)$. Gäbe es in V' einen Punkt, der nicht zu $F(E)$ gehörte, so ließe er sich in $V' - o'$ mit einem der genannten Punkte q' durch einen stetigen Weg verbinden, und auf diesem gäbe es einen Randpunkt q^* der Menge $F(E)$; ein solcher Punkt $q^* = F(p^*)$, $p^* \subset E$, existiert aber in $V' - o'$ nicht: denn $F(K)$ liegt außerhalb von V', und für jeden Punkt $p \subset E - K - o$ ist wegen des Nichtverschwindens der Funktionaldeterminante (13) das Bild $F(p)$ innerer Punkt von $F(E)$. Folglich ist $V' \subset F(E)$, also o' innerer Punkt von $F(E)$.

Damit sind der Hilfssatz und der Satz über die Asymptotenlinien bewiesen.

§ 2.

Die zweite Fundamentalform der Mittelfläche isometrischer Flächen.

7. Die „Mittelfläche" zweier Flächen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ ist durch $\mathfrak{x}(u, v) = \frac{1}{2}[\mathfrak{p}(u, v) + \mathfrak{q}(u, v)]$ erklärt[13a]). Sie ist regulär, falls die Flächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sich in folgender „allgemeinen Lage" befinden: Tangentialrichtungen $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, die sich bei der durch u, v vermittelten Beziehung entsprechen, sind niemals entgegengesetzt. Denn $\mathfrak{x}$ ist regulär, solange die Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v$ linear unabhängig sind, und $a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v = 0$ bedeutet: $a\mathfrak{p}_u + b\mathfrak{p}_v = -(a\mathfrak{q}_u + b\mathfrak{q}_v)$; dies ist bei allgemeiner Lage von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nur möglich, wenn $a = b = 0$ ist. Man kann stets durch eine (eigentliche) Bewegung von $\mathfrak{q}$ allgemeine Lage für die Umgebungen eines Paares entsprechender Punkte herstellen: man bringe die Flächen in diesen Punkten so zur Berührung, daß ein Paar entsprechender Richtungen zusammenfällt und daß die Richtungsbüschel in diesen Punkten gleichsinnig aufeinander bezogen sind.

Für den Rest dieses Paragraphen wird allgemeine Lage von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ vorausgesetzt. Die durch u, v zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ hergestellte Beziehung wird immer eine *Isometrie* sein.

8. Satz. *Der Normalenvektor $\bar{\mathfrak{x}}$ der Mittelfläche $\mathfrak{x}$ zweier isometrischer Flächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bildet mit den Normalenvektoren $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ in den entsprechenden Punkten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ den gleichen Winkel γ, und dieser ist stets $\neq \frac{\pi}{2}$; mit anderen Worten:*

$$\bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{q}} = \cos\gamma \neq 0. \tag{14}$$

13a) Die Mittelfläche ist ein altes Hilfsmittel zur Untersuchung isometrischer Flächenpaare; man vergl. die unter [14]) zitierten Stellen.

Beweis. Die den isometrischen Flächen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ gemeinsamen ersten Fundamentalgrößen in bezug auf u, v heißen E, F, G; insbesondere ist daher $|\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_v| = |\mathfrak{q}_u \times \mathfrak{q}_v| = \sqrt{EG - F^2}$. Es ist

$$\bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{p}} = \frac{1}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{1}{4} ((\mathfrak{p}_u + \mathfrak{q}_u) \times (\mathfrak{p}_v + \mathfrak{q}_v)) \cdot (\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_v),$$

also nach der Identität von Lagrange

$$\bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{p}} = \frac{1}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|} \cdot \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} E + \mathfrak{p}_u \cdot \mathfrak{q}_u & F + \mathfrak{p}_u \cdot \mathfrak{q}_v \\ F + \mathfrak{p}_v \cdot \mathfrak{q}_u & G + \mathfrak{p}_v \cdot \mathfrak{q}_v \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite ist symmetrisch in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$; folglich ist

$$\bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{x}} \cdot \bar{\mathfrak{q}} = \cos \gamma.$$

Wäre an einer Stelle $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so wäre dort $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{p}'$, wobei $\mathfrak{p}'$ einen Tangentialvektor von $\mathfrak{p}$ bezeichnet, und daher, wenn $\mathfrak{x}'$ den entsprechenden Tangentialvektor von $\mathfrak{x}$ bezeichnet, $\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{p}' = 0$. Dies ist unmöglich, denn für entsprechende Tangentialvektoren $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{x}' = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}')$ gilt immer, da $\mathfrak{p}'^2 = \mathfrak{q}'^2$ ist:

$$\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{p}' = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{q}') = \tfrac{1}{4} \cdot (\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2 + 2\,\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{q}') = \mathfrak{x}'^2 > 0.$$

Folglich ist immer $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.

9. Satz. *Die zweite Fundamentalform der Mittelfläche $\mathfrak{x}$ der isometrischen Flächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor (der nur von dem Punkt, nicht von den Richtungen abhängt) gleich dem arithmetischen Mittel der zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{p}$ und von $\mathfrak{q}$; und zwar ist der Faktor gleich $\cos \gamma$, wobei γ der in Nr. 8 betrachtete Winkel ist.*

Bezeichnen wir die zweiten Fundamentalgrößen von $\mathfrak{p}$ statt mit L, M, N mit $P_{11}, P_{12} = P_{21}, P_{22}$, und analog die zweiten Fundamentalgrößen von $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{x}$ mit Q_{ik} bzw. X_{ik}, so lautet also die Behauptung:

$$X_{ik} = \cos \gamma \cdot \tfrac{1}{2}(P_{ik} + Q_{ik}); \quad i = 1, 2;\ k = 1, 2. \tag{15}$$

Beweis. Bei Bildung der zweiten Ableitungen von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}$ deuten wir die Differentiationen nach u bzw. v durch die Indizes 1 bzw. 2 an. Dann lauten die Gaußschen Ableitungsformeln für $\mathfrak{p}$ und für $\mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{ik} &= A_{ik}\mathfrak{p}_u + B_{ik}\mathfrak{p}_v + P_{ik}\bar{\mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{q}_{ik} &= A_{ik}\mathfrak{q}_u + B_{ik}\mathfrak{q}_v + Q_{ik}\bar{\mathfrak{q}}, \end{aligned} \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2;$$

dabei sind A_{ik}, B_{ik} die — infolge der Isometrie für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ übereinstimmenden — Christoffelschen Ausdrücke. Addition liefert

$$2\mathfrak{x}_{ik} = 2A_{ik}\mathfrak{x}_u + 2B_{ik}\mathfrak{x}_v + P_{ik}\bar{\mathfrak{p}} + Q_{ik}\bar{\mathfrak{q}}. \tag{16}$$

Es ist

$$X_{ik} = \frac{1}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|}(\mathfrak{x}_{ik}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v),$$

also nach (16):

$$X_{ik} = \frac{1}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|} \cdot \frac{1}{2} [P_{ik}(\bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) + Q_{ik}(\bar{\mathfrak{q}}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)]$$
$$= \frac{1}{2} (P_{ik}\bar{\mathfrak{p}} \cdot \bar{\mathfrak{x}} + Q_{ik}\bar{\mathfrak{q}} \cdot \bar{\mathfrak{x}});$$

dies ist nach (14) die behauptete Formel (15).

§ 3.

Über die Berührung isometrischer Flächen längs einer Kurve.

In diesem Paragraphen sind alle vorkommenden Flächen analytisch in bezug auf die Parameter u, v.

10. Unter einem (infinitesimalen) „Verbiegungsvektor" der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ versteht man bekanntlich[14]) eine (analytische) Vektorfunktion $\mathfrak{z}(u, v)$, die mit $\mathfrak{x}$ in der Beziehung steht:

$$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = 0,$$

d. h. ausführlich:

(17a) $$\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{z}_u = 0,$$

(17b) $$\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{z}_v + \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{z}_u = 0,$$

(17c) $$\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{z}_v = 0.$$

Satz[15]). *Der Verbiegungsvektor $\mathfrak{z}$ der Fläche $\mathfrak{x}$ sei nicht identisch* 0, *er verschwinde aber längs der (analytischen) Kurve C von $\mathfrak{x}$. Dann ist C eine Asymptotenlinie von $\mathfrak{x}$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß C durch $v = 0$ gegeben ist; dann lautet die Entwicklung von $\mathfrak{z}$ nach v:

$$\mathfrak{z}(u, v) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n}\right)_{v=0} \cdot v^n + \ldots$$

mit

(18′) $$n \geqq 1,$$

(18″) $$\left(\frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n}\right)_{v=0} \neq 0.$$

---

[14]) Man vgl. etwa G. Darboux, Théorie générale des surfaces, 4. partie, livre 8; J. Weingarten, Über die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Crelles Journal **100** (1887), S. 296; H. Liebmann, Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (1919), S. 267.

[15]) Die Sätze aus diesem Paragraphen — der aus Nr. 10 allerdings nicht explizit — stammen von Weingarten (a. a. O.[14])); das „Korollar" am Schluß des Paragraphen ist bereits 1853 von Jellet ausgesprochen worden, allerdings ohne ausreichenden Beweis. Unsere Beweise sind mit dem Weingartenschen wohl verwandt, aber kürzer. — Man kann diese Sätze auch auf die Tatsache zurückführen, daß die Asymptotenlinien die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung sind, welche bei der Aufgabe, die zu einer gegebenen Fläche isometrischen Flächen zu bestimmen, auftritt. Hierzu vgl. man Darboux, wie unter [14]), sowie 3. partie, livre 7, chap. IV, V.

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\mathfrak{z}_u(u,v) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^{n+1}\mathfrak{z}}{\partial u\,\partial v^n}\right)_{v=0} \cdot v^n + \ldots,$$

$$\mathfrak{z}_v(u,v) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n}\right)_{v=0} \cdot v^{n-1} + \ldots.$$

Ferner hat man

$$\mathfrak{x}_u(u,v) = \mathfrak{x}_u(u,0) + \mathfrak{x}_{uv}(u,0)\,v + \ldots,$$
$$\mathfrak{x}_v(u,v) = \mathfrak{x}_v(u,0) + \mathfrak{x}_{vv}(u,0)\,v + \ldots.$$

Man setze diese Reihen in die linken Seiten der Gleichungen (17a), (17b), (17c) ein und beachte, daß dann auf Grund dieser Gleichungen der Koeffizient jeder einzelnen Potenz von v verschwinden muß; und zwar beachte man dies in (17a) für v^n, in (17b) und (17c) — unter Berücksichtigung von (18′) — für v^{n-1}; dann erkennt man:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(19a)} && \mathfrak{x}_u \cdot \frac{\partial^{n+1}\mathfrak{z}}{\partial u\,\partial v^n} = 0 \\ &\text{(19b)} && \mathfrak{x}_u \cdot \frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n} = 0 \\ &\text{(19c)} && \mathfrak{x}_v \cdot \frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad v = 0.$$

Aus (19b) und (19c) folgt

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial^n \mathfrak{z}}{\partial v^n} = \varrho\,\bar{\mathfrak{x}} \quad \text{für} \quad v = 0,$$

wobei $\bar{\mathfrak{x}}$ den Normalenvektor von $\mathfrak{x}$, ϱ einen Skalar bezeichnet; infolge (18″) ist dabei

$$\text{(20′)} \qquad \varrho \neq 0.$$

Durch Differentiation nach u folgt aus (20)

$$\frac{\partial^{n+1}\mathfrak{z}}{\partial u\,\partial v^n} = \varrho_u\,\bar{\mathfrak{x}} + \varrho\,\bar{\mathfrak{x}}_u \quad \text{für} \quad v = 0,$$

also nach (19a), da $\mathfrak{x}_u\,\bar{\mathfrak{x}} = 0$ ist,

$$\varrho\,\mathfrak{x}_u \cdot \bar{\mathfrak{x}}_u = 0 \qquad \text{für} \quad v = 0$$

und wegen (20′)

$$\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_u = 0 \qquad \text{für} \quad v = 0.$$

Dies bedeutet, daß die durch $v = 0$ gegebene Kurve C Asymptotenlinie ist.

---

[16]) Verlangt man nur, daß jeder Punkt der Berührungskurve C sich selbst entspricht, so besteht für die Richtungen des Flächenstreifens außer der oben vorausgesetzten Möglichkeit noch eine zweite: jedes Tangentenbüschel wird an der Tangente von C gespiegelt.

11. Satz[15]. *$\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien zwei Flächen, die sich längs einer (analytischen) Kurve C berühren und zwischen denen eine solche Isometrie J besteht, daß dabei jeder Punkt von C und jede Richtung des gemeinsamen Flächenstreifens durch C sich selbst entspricht*[16]. *Dann ist entweder J die Identität und daher $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}$ identisch, oder C ist Asymptotenlinie auf jeder der beiden Flächen.*

Beweis. Die Isometrie J werde durch die, den beiden Flächen gemeinsamen Parameter u, v vermittelt. Die Voraussetzung über C besagt, daß längs C

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}_u = \mathfrak{q}_u, \quad \mathfrak{p}_v = \mathfrak{q}_v \tag{21}$$

ist. Man konstruiere die Mittelfläche

$$\mathfrak{x}(u, v) = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{p}(u, v) + \mathfrak{q}(u, v)].$$

Auf Grund von (21) bestätigt man leicht, daß sie längs C regulär ist (Nr. 7) und die Flächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ längs C berührt. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ isometrisch aufeinander bezogen sind, ist

$$(d\mathfrak{p})^2 = (d\mathfrak{q})^2,$$

also

$$d(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) \cdot d(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}) = 0;$$

dies bedeutet: $\mathfrak{z} = \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ ist ein Verbiegungsvektor von $\mathfrak{x}$. Wegen der ersten Gleichung (21) verschwindet $\mathfrak{z}$ längs C. Nach Nr. 10 verschwindet daher entweder $\mathfrak{z}$ identisch, oder C ist Asymptotenlinie auf $\mathfrak{x}$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{p}(u, v) \equiv \mathfrak{q}(u, v)$, also J die Identität; im zweiten Fall fallen die Schmiegungsebenen von C mit den Tangentialebenen von $\mathfrak{x}$, also auch mit den Tangentialebenen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, zusammen; folglich ist in diesem Fall C auch Asymptotenlinie auf $\mathfrak{p}$ und auf $\mathfrak{q}$.

Korollar. *Wenn die soeben betrachteten Flächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ positiv gekrümmt sind, so ist die Isometrie J die Identität.*

§ 4.

Der Beweis des Kongruenzsatzes.

12. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien Flächen *positiver Krümmung*, zwischen denen eine Isometrie J besteht; es ist gleichgültig, ob $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ offene Flächenstücke oder Eiflächen sind.

Jeder Flächenrichtung $\mathfrak{p}'$ auf $\mathfrak{p}$ entspricht eine Richtung $\mathfrak{q}' = J(\mathfrak{p}')$ auf $\mathfrak{q}$. Wir nennen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ „*Kongruenzrichtungen*“, falls in ihnen die Normalkrümmungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ miteinander übereinstimmen; ein Punkt, in dem sämtliche Richtungen Kongruenzrichtungen sind, heißt „*Kongruenzpunkt*“.[16a])

16a) Diese Begriffe sowie der Satz (Nr. 12) und die Hilfssätze A und B (Nr. 14, 15) stammen von Cohn-Vossen (a. a. O.).

Satz. *Jeder Punkt ist entweder Kongruenzpunkt, oder es gibt in ihm genau zwei, voneinander verschiedene Kongruenzrichtungen.*

Beweis[17]). Trägt man in der Tangentialebene des Flächenpunktes p in jeder Richtung von p aus die Strecke $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ab, wobei k die zu dieser Richtung gehörige Normalkrümmung ist, so entsteht der Dupinsche Kegelschnitt d_p, der bei positiver Gaußscher Krümmung eine Ellipse ist. Daher sind die Kongruenzrichtungen folgendermaßen zu bestimmen: p und q seien entsprechende Punkte von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$; man lege d_p und d_q mit ihren Mittelpunkten so aufeinander, daß entsprechende Flächenrichtungen zusammenfallen; dies ist wegen der Winkeltreue von J möglich; dann sind die Kongruenzrichtungen durch die Verbindungsgeraden des Mittelpunktes mit den Schnittpunkten von d_p und d_q gegeben. Nun hat d_p den Flächeninhalt $\sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_2} \cdot \pi = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, wenn R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien und K die Gaußsche Krümmung bezeichnen; da das Analoge für d_q gilt und da bei der Isometrie J die Krümmung K erhalten bleibt, sind daher d_p und d_q flächengleich. Daraus folgt für die aufeinander gelegten Ellipsen: entweder fallen sie zusammen, oder sie haben genau vier Schnittpunkte, die in zwei Paare zusammenzufassen sind, von denen jedes symmetrisch zum Mittelpunkt liegt. Damit ist der Satz bewiesen.

13. Jetzt seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ wieder — wie in den §§ 2 und 3 — Flächen*stücke*, die auf gemeinsame Parameter u, v bezogen sind; im übrigen seien die Voraussetzungen der vorigen Nummer erfüllt; J werde durch u, v vermittelt. Wir fragen nach der *analytischen* Charakterisierung der Kongruenzrichtungen und Kongruenzpunkte.

Die zweiten Fundamentalformen der Flächen seien — wie im § 2 — $P_{11}\,du^2 + 2\,P_{12}\,du\,dv + P_{22}\,dv^2$ bzw. $Q_{11}\,du^2 + 2\,Q_{12}\,du\,dv + Q_{22}\,dv^2$. Da die Krümmungen positiv sind, sind beide Formen definit; zwei Fälle sind möglich: die Formen sind gleichartig definit — also beide positiv oder beide negativ —, oder sie sind ungleichartig definit — also eine positiv, die andere negativ. Da die zweite Fundamentalform bei einer Spiegelung der Fläche das Vorzeichen wechselt, kann man, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gegeben sind, durch Spiegelung von $\mathfrak{q}$ immer erreichen, daß je nach Wunsch ein beliebiger der beiden Fälle vorliegt.

---

[17]) Wie bei Cohn-Vossen; die algebraische Formulierung des Satzes, die sich natürlich auch algebraisch beweisen läßt, ist die folgende: Die quadratischen Formen $P_{11}\,x^2 + 2\,P_{12}\,xy + P_{22}\,y^2$ und $Q_{11}\,x^2 + 2\,Q_{12}\,xy + Q_{22}\,y^2$ seien positiv definit und es sei $P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = Q_{11}\,Q_{22} - Q_{12}^2$; dann ist, falls die Formen nicht identisch sind,

$$(P_{11} - Q_{11})\,(P_{22} - Q_{22}) - (P_{12} - Q_{12})^2 < 0.$$

Die Normalkrümmungen k sind in Nr. 12 und im folgendem immer positiv zu nehmen; es ist also, wenn E, F, G die ersten Fundamentalgrößen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bezeichnen, für die Fläche $\mathfrak{p}$:

$$k = \frac{P_{11}du^2 + 2P_{12}du\,dv + P_{22}dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

oder

$$k = \frac{-P_{11}du^2 - 2P_{12}du\,dv - P_{22}dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

je nachdem die zweite Fundamentalform von $\mathfrak{p}$ positiv oder negativ definit ist; analog für $\mathfrak{q}$. Mithin gilt:

Die Kongruenzrichtungen (du, dv) *sind durch die Differentialgleichung*

$$(P_{11} - Q_{11})\,du^2 + 2(P_{12} - Q_{12})\,du\,dv + (P_{22} - Q_{22})\,dv^2 = 0 \tag{22}$$

oder durch

$$(P_{11} + Q_{11})\,du^2 + 2(P_{12} + Q_{12})\,du\,dv + (P_{22} + Q_{22})\,dv^2 = 0, \tag{22'}$$

die Kongruenzpunkte durch die Gleichungen

$$P_{11} - Q_{11} = P_{12} - Q_{12} = P_{22} - Q_{22} = 0, \tag{23}$$

oder durch

$$P_{11} + Q_{11} = P_{12} + Q_{12} = P_{22} + Q_{22} = 0 \tag{23'}$$

charakterisiert; und zwar gelten (22) *und* (23), *wenn die zweiten Fundamentalformen gleichartig, aber* (22') *und* (23'), *wenn diese Formen ungleichartig definit sind.*

14. In dieser und in der nächsten Nummer beweisen wir zwei Hilfssätze, von denen sich der eine auf Häufungsstellen von Kongruenzpunkten, der andere auf isolierte Kongruenzpunkte bezieht. $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ haben dabei immer dieselbe Bedeutung wie in Nr. 13.

Hilfssatz A. *Die (isometrischen, positiv gekrümmten) Flächen* $\mathfrak{p}(u, v)$ *und* $\mathfrak{q}(u, v)$ *seien analytisch; es gebe eine Häufungsstelle von Kongruenzpunkten. Dann ist die Isometrie* J *eine Kongruenz.*

Beweis. Nach dem „Korollar" in § 3, Nr. 11, ist der Hilfssatz A bewiesen, sobald es gelungen ist, durch eine (eigentliche oder uneigentliche) Bewegung von $\mathfrak{q}$ folgendes zu erreichen: die beiden Flächen berühren sich längs einer Kurve derart, daß jeder Punkt der Kurve sowie jede Flächenrichtung des gemeinsamen Flächenstreifens durch die Kurve bei J sich selbst entspricht.

Wir dürfen, nach allfälliger Spiegelung von $\mathfrak{q}$, annehmen, daß die Kongruenzpunkte durch die Gleichungen (23) bestimmt sind; bei Vornahme weiterer *eigentlicher* Bewegungen bleiben dann diese Gleichungen für die Kongruenzpunkte charakteristisch.

Die Lösungen (u, v) der Gleichungen (23) haben nach Voraussetzung einen Häufungspunkt; da die Flächen als analytisch vorausgesetzt sind, gibt es daher jedenfalls — ob die Gleichungen (23) nun identisch gelten mögen oder nicht — eine (analytische) Kurve C in der (uv)-Ebene, längs welcher diese Gleichungen gelten[17a]). Es seien p und q Punkte von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$, die demselben Punkt von C entsprechen. Durch eine eigentliche Bewegung von $\mathfrak{q}$ bringen wir q mit p derart zur Deckung, daß sich die Flächen in diesen Punkten berühren, und daß dabei je zwei entsprechende Flächenrichtungen in diesen Punkten zur Deckung kommen; dies ist infolge der Winkeltreue der Isometrie möglich. Wir behaupten, daß dann von selbst längs den Kurven C_p und C_q, welche C entsprechen, eine Berührung der gewünschten Art stattfindet.

Im Punkte $p = q$ gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}_u = \mathfrak{q}_u, \quad \mathfrak{p}_v = \mathfrak{q}_v; \tag{21}$$

wir haben zu zeigen, daß sie längs C gelten.

Es sei $u = u(t), v = v(t)$ eine Parameterdarstellung von C; Differentiation nach t deuten wir durch einen Strich an. In den Gleichungen

$$\mathfrak{p}'_u = \mathfrak{p}_{uu}\, u' + \mathfrak{p}_{uv}\, v',$$
$$\mathfrak{p}'_v = \mathfrak{p}_{vu}\, u' + \mathfrak{p}_{vv} v'$$

ersetzen wir die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{p}$ aus den Gaußschen Ableitungsformeln

$$\mathfrak{p}_{ik} = A_{ik}\mathfrak{p}_u + B_{ik}\mathfrak{p}_v + P_{ik}\frac{\mathfrak{p}_u \times \mathfrak{p}_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

bei denen wir dieselben Bezeichnungen benutzen wie in § 2, Nr. 9; nehmen wir noch die Gleichung

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_u u' + \mathfrak{p}_v v'$$

hinzu, so erhalten wir ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' &= R(\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, t), \\ \mathfrak{p}'_u &= S(\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, t), \\ \mathfrak{p}'_v &= T(\mathfrak{p}_u, \mathfrak{p}_v, t). \end{aligned} \tag{24}$$

Dabei ist die Funktion R allein durch die Kurve C bestimmt; in die Funktionen S und T gehen außer den Gleichungen für C noch die ersten und die zweiten Fundamentalgrößen der Fläche ein. Alle diese Größen haben längs C mit Rücksicht auf die Isometrie und auf das Bestehen von (23) für die Fläche $\mathfrak{q}$ die gleichen Werte wie für $\mathfrak{p}$; folglich ergeben sich, wenn man dieselbe Be-

17a) Dies folgt bekanntlich aus dem Vorbereitungssatz von Weierstraß.

trachtung für $\mathfrak{q}$ anstellt, dieselben Differentialgleichungen, die wir für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_u$, $\mathfrak{p}_v$ erhalten haben, auch für $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_u$, $\mathfrak{q}_v$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}' &= R(\mathfrak{q}_u, \mathfrak{q}_v, t), \\ \mathfrak{q}_u' &= S(\mathfrak{q}_u, \mathfrak{q}_v, t), \\ \mathfrak{q}_v' &= T(\mathfrak{q}_u, \mathfrak{q}_v, t). \end{aligned} \tag{24}$$

Da nun die Gleichungen (21) für *einen* Wert von t gelten, gelten sie auf Grund des Satzes von der Einzigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, angewandt auf das System (24), für alle t. Damit ist der Hilfssatz A bewiesen.[18])

15. Hilfssatz B. *Der Index, welchen ein isolierter Kongruenzpunkt in bezug auf das Netz der Kongruenzrichtungen besitzt, ist immer* $\leqq 0$.

Beweis. Wir dürfen, nach allfälliger Spiegelung von $\mathfrak{q}$, annehmen, daß die Kongruenzrichtungen und Kongruenzpunkte durch (22′) und (23′) bestimmt sind; bei Vornahme weiterer *eigentlicher* Bewegungen behalten dann diese Gleichungen ihre Bedeutung.

p und q seien einander entsprechende isolierte Kongruenzpunkte auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Durch eine eigentliche Bewegung von $\mathfrak{q}$ stellen wir „allgemeine Lage" im Sinne von § 2, Nr. 7, für Umgebungen dieser Punkte her — etwa indem wir die Flächen in den Punkten p und q so zur Berührung bringen, daß sich entsprechende Richtungen decken. Dann ist für die Umgebungen von p und q die Mittelfläche $\mathfrak{x}(u, v)$ regulär (Nr. 7).

Aus dem Satz in § 2, Nr. 9, einerseits, der Bedeutung der Gleichungen (23′) und (22′) andererseits ist ersichtlich: der Punkt o von $\mathfrak{x}$, der den Punkten p und q entspricht, ist ein Flachpunkt von $\mathfrak{x}$; die Richtungen auf $\mathfrak{x}$, die den Kongruenzrichtungen auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entsprechen, sind die Asymptotenrichtungen von $\mathfrak{x}$ (da es in jedem von o verschiedenen Punkt demnach genau zwei Asymptotenrichtungen gibt, ist die Krümmung von $\mathfrak{x}$ dort stets negativ).

Das Netz in der (uv)-Ebene, welches durch die Kongruenzrichtungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ bestimmt ist, kann also als das Asymptotennetz von $\mathfrak{x}$ gedeutet werden. Nach § 1, Nr. 6, ist daher der fragliche Index $\leqq 0$.[19])

---

[18]) Cohn-Vossen begründet diesen Hilfssatz durch Berufung auf den Eindeutigkeitssatz für partielle Differentialgleichungen, also auf die unter [15]) erwähnte Charakteristikeneigenschaft der Asymptotenlinien.

[19]) In dem Beweis dieses Hilfssatzes weichen wir am stärksten von der Cohn-Vossenschen Arbeit ab. Dort wird neben der Mittelfläche noch eine zweite Hilfsfläche herangezogen — der „Drehriß" einer infinitesimalen Verbiegung der Mittelfläche —, aber diese Hilfsfläche hat, im Gegensatz zu der Mittelfläche, in dem zu untersuchenden Punkt o eine Singularität; ferner muß das Netz, das dem Netz der Kongruenzrichtungen entspricht, ad hoc konstruiert werden, während wir mit dem gewöhnlichen

16. Jetzt kommen wir zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen, wie er am Anfang formuliert worden ist.

J sei eine Isometrie zwischen den analytischen Eiflächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Gemäß Nr. 12 sind die Kongruenzrichtungen und Kongruenzpunkte bestimmt. Gäbe es höchstens endlich viele Kongruenzpunkte, so würden die Kongruenzrichtungen auf $\mathfrak{p}$ ein Netz mit höchstens endlich vielen singulären Stellen bilden, und nach § 1, Nr. 3, gäbe es eine Singularität, also einen isolierten Kongruenzpunkt, mit positivem Index; das ist nach Hilfssatz B unmöglich. Folglich gibt es unendlich viele Kongruenzpunkte und daher eine Häufungsstelle von Kongruenzpunkten; dann gibt es nach Hilfssatz A auf $\mathfrak{p}$ ein Gebiet (in der Umgebung einer solchen Häufungsstelle), in welchem J eine Kongruenz ist, und wegen des analytischen Charakters der Flächen folgt hieraus, daß J auch im Großen eine Kongruenz ist.[20]) [21])

Asymptotennetz auskommen. — Die Möglichkeit unserer Vereinfachungen beruht wohl auf dem Kunstgriff, daß wir die Flächen in einer Lage annehmen, in der die Kongruenzrichtungen und Kongruenzpunkte durch (22′), (23′), und nicht durch (22), (23), gegeben sind.

[20]) Also ist *jeder* Punkt Kongruenzpunkt.

[21]) Während des Druckes dieser Arbeit lernten wir die gleichzeitig im Druck befindliche Schrift von W. Blaschke „Über eine geometrische Frage von Euklid bis heute" (Leipzig-Berlin 1938) kennen. In ihr wird ein Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen angedeutet, der von dem Cohn-Vossenschen Beweis völlig verschieden und auch für nicht-analytische Flächen gültig ist.

(Eingegangen am 2. Dezember 1937.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. IIIa.

Eine Ergänzung von Beitrag III[1]).

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Satz 16 von Beitrag III lautete: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von endlichem Dimensionsdefekt μ, a ein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element aus dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring $\mathfrak{R}$, so haben alle minimalen Primoberideale von $\mathfrak{p}+(a)$ in $\mathfrak{R}$ den Dimensionsdefekt $\mu+1$. — Dieser Satz läßt sich verallgemeinern zu

Satz 16*. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von endlichem Dimensionsdefekt* μ *aus dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$. *Dann hat bei beliebiger Wahl der* a_i *jedes minimale Primoberideal* $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{p}+(a_1, \ldots, a_m)$ *einen endlichen Dimensionsdefekt* $\nu \leqq \mu + m$.

In der Tat, die Behauptung ist richtig für $m=1$ (Satz 16!). Beim Beweise für $m>1$ darf daher ihre Richtigkeit für $m-1$ vorausgesetzt werden. Wegen $(\mathfrak{p}+(a_1, \ldots, a_{m-1})) \leqq \mathfrak{q}$ enthält nun $\mathfrak{q}$ mindestens ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}+(a_1, \ldots, a_{m-1})$, und wegen $\mathfrak{p}+(a_1, \ldots, a_m) \subseteqq \mathfrak{p}'+(a_m)$ ist $\mathfrak{q}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}'+(a_m)$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\mathfrak{p}'$ einen endlichen Dimensionsdefekt $\mu' \leqq \mu + m - 1$, und durch Anwendung des ursprünglichen Satzes 16 ergibt sich sofort: Entweder es ist $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'+(a_m) = \mathfrak{q}$, dann hat $\mathfrak{q}$ den Dimensionsdefekt $\nu = \mu'$; oder es ist $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'+(a_m)$, dann hat $\mathfrak{q}$ den Dimensionsdefekt $\nu = \mu'+1$. In jedem Falle wird also $\nu \leqq \mu + m$.

Für einen Funktionenring vom endlichen Transzendenzgrad n, in dem bei jedem Primideal die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt gleich n ist, kann man Satz 16 auch folgendermaßen aussprechen:

Hat das Primideal $\mathfrak{p}$ *die Dimension* λ, *so haben alle minimalen Primoberideale von* $\mathfrak{p}+(a_1, \ldots, a_m)$ *mindestens die Dimension* $\lambda - \mu$.

Es sei noch besonders betont, daß Satz 16* natürlich auch für $\mathfrak{p}=(0)$, d. h. $\mu = 0$ bzw. $\lambda = n$ gilt.

---

[1]) Vgl. Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 745—766.

(Eingegangen am 8. Dezember 1937.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche[1]).

V. Potenzreihenringe.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Bekanntlich gilt nicht nur für den Ring aller Polynome, sondern auch für den Ring aller formalen Potenzreihen in endlich vielen Variabeln mit Körperkoeffizienten der „*Z. P. E.*", d. h. es läßt sich in den genannten Ringen jedes Element eindeutig in Primelementfaktoren zerlegen. Bei den Polynomen gilt der Z. P. E. auch dann noch, wenn der Koeffizientenbereich einen beliebigen „*Hauptidealring*" (Ring vom Typus der ganzen rationalen Zahlen) darstellt[2]). Will man dagegen den Z. P. E. unter den gleichen Voraussetzungen im Potenzreihenfall beweisen, so stößt man auf zunächst unüberwindliche Schwierigkeiten, weil der „Weierstraßsche Vorbereitungssatz", mit dem man bei Körperkoeffizienten von Potenzreihen zu Polynomen übergeht, bei Hauptidealringkoeffizienten nicht mehr anwendbar ist[3]). Nur *ein* wichtiger Spezialfall macht eine Ausnahme: Ist der Koeffizientenbereich $\mathfrak{P}$ ein *perfekter diskreter Bewertungsring* und ist $\mathfrak{P}$ außerdem „*restunendlich*", d. h. besitzt der Restklassenkörper von $\mathfrak{P}$ nach dem einzigen vorhandenen Primhauptideal (π) unendlich viele verschiedene Elemente, so kann man jede Potenzreihe in $x_1, \ldots, x_n$ über $\mathfrak{P}$ gewissermaßen als Potenzreihe in $x_1, \ldots, x_n, \pi$ über dem Körper $\mathfrak{P}/(\pi)$ auffassen, auf Grund dieser Auffassung den Weierstraßschen Vor-

[1]) Vgl. Beitrag I—IV (Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577 bzw. 665—679 bzw. **42** (1937), S. 745—766 bzw. 767—773. Ähnlich wie in Beitrag IV werden in Beitrag V aus der Bewertungstheorie nur die Begriffe des diskreten Bewertungsringes und der endlichen diskreten Hauptordnung benutzt. Wie in Beitrag III bedeutet „Ideal" schlechtweg stets soviel wie „ganzes Ideal".

[2]) Unter einem Hauptidealring wird im folgenden (abweichend von der Bezeichnungsweise von Beitrag I) stets ein Ring verstanden, in dem alle Ideale ausnahmslos Hauptideale sind.

[3]) Der Beweis des Z. P. E. für Potenzreihen mit Körperkoeffizienten findet sich wohl zuerst bei E. Lasker: Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Annalen **60** (1905), S. 20—116; Abschnitt III. Lasker nimmt versehentlich den Weierstraßschen Vorbereitungssatz auch für ganzzahlige Potenzreihen als gültig an, und erklärt dementsprechend irrtümlicherweise die Übertragung seiner Ergebnisse auf ganzzahlige Reihen für trivial.

bereitungssatz anwenden, und so den Z.P.E. für den Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P beweisen[4]).

Mit Hilfe dieses Teilresultats, der Bemerkung, daß jeder Hauptidealring Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen ist, und einer auf J. Schur[5]) zurückgehenden Potenzreihennormierung zeigt man weiter: Für die „nullgradigen" (d. h. mit einem von 0 verschiedenen, von den Variablen freien Glied beginnenden) Potenzreihen gilt der Z.P.E. auch dann, wenn der Koeffizientenbereich ein „restunendlicher" Hauptidealring ist, bei dem der Restklassenkörper nach einem beliebigen Primhauptideal stets unendlich viele Elemente enthält.

Die soeben zusammengestellten Sätze entsprechen dem Standpunkt, den ich bereits in einer früheren Arbeit erreicht habe[6]). In der vorliegenden Arbeit betrachten wir durchweg nebeneinander den Ring $\mathfrak{R}$ aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über einem gegebenen Integritätsbereich P und den entsprechenden Potenzreihenring $\mathfrak{S}$ über dem zu P gehörigen Quotientenkörper K. Zunächst werden für den Fall, daß P ein *restunendlicher diskreter Bewertungsring* ist, die folgenden neuen Ergebnisse gewonnen: *Der Z.P.E. gilt für $\mathfrak{R}$ auch dann, wenn P nicht perfekt ist. Ein Primelement aus $\mathfrak{R}$*, das nicht den Grad 0 hat und infolgedessen in $\mathfrak{S}$ nicht zur Einheit wird, *kann unter Umständen in $\mathfrak{S}$ in mehrere Primfaktoren zerfallen.*

Die Verhältnisse liegen also trotz des Z.P.E. nicht ganz so einfach wie bei den Polynomen, wo ja bekanntlich jedes ganzzahlig irreduzible Polynom stets auch rationalzahlig irreduzibel ist. Hier gilt nur der Satz, daß ein *Primelement aus $\mathfrak{S}$ niemals Faktor zweier wesentlich* (also nicht nur um einen Einheitsfaktor) *verschiedener Primelemente aus $\mathfrak{S}$* sein kann. — Aber auch dieses schwächere Ergebnis ist von weittragender Bedeutung. Vor allem gewinnt man mit seiner Hilfe leicht den folgenden Hauptsatz:

Ist P ein restunendlicher Hauptidealring, so läßt sich in $\mathfrak{R}$ jedes Element eindeutig als Produkt endlich vieler Primelemente und eines „primitiven" Elementes darstellen.

---

[4]) Vgl. W. Krull: Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, J. f. Math. **164** (1931), S. 12—22; § 2. Dort werden allerdings nur Reihen einer Variablen betrachtet, aber die Übertragung der Überlegungen auf den Fall beliebig vieler Variabler macht keine Schwierigkeit (vgl. auch Nr. 2 unseres Beitrages).

[5]) Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 95—113.

[6]) Nämlich in Krull [4]). Der Hauptzweck dieser Arbeit, in der nur Reihen einer Variablen betrachtet wurden, war allerdings ein anderer: Es handelte sich darum, zu zeigen, daß die Entwicklung der Teilbarkeitstheorie der Potenzreihen über einem Z. P. J.-Ring (Ring vom Typus der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers) nicht wesentlich schwieriger ist als über einem Hauptidealring (vgl. dazu Nr. 6 unseres Beitrages).

Dabei ist ein primitives Element Q aus $\mathfrak{R}$ dadurch ausgezeichnet, daß es einerseits keinen (nullgradigen) Primfaktor besitzt, der in $\mathfrak{S}$ zur Einheit wird, und daß andererseits für ein beliebiges Element A aus $\mathfrak{R}$ aus der Teilbarkeit von A durch Q in $\mathfrak{S}$ stets die Teilbarkeit von A durch Q in $\mathfrak{R}$ folgt. — Dieses Theorem, das meiner Ansicht nach die „richtige" Verallgemeinerung der bekannten Sätze über ganzzahlige Polynome auf den Potenzreihenfall darstellt, ersetzt den für ganz $\mathfrak{R}$ noch unbewiesenen und im übrigen recht zweifelhaften Z.P.E. durch den Z.P.E. für die nullgradigen Reihen von $\mathfrak{R}$ einerseits und den Z.P.E. für $\mathfrak{S}$ andererseits. So ist ein Ergebnis gewonnen, das in gewisser Hinsicht unbedenklich als abschließend bezeichnet werden darf. — Leider ist es mir bis jetzt noch nicht gelungen, die Zerlegungssätze auf den Fall auszudehnen, daß der Koeffizientenbereich P einen nicht restunendlichen Hauptidealring oder auch nur diskreten Bewertungsring bildet. Ohne die Voraussetzung der Restunendlichkeit kann ich vorerst nur in der Sprache der Bewertungstheorie befriedigende Sätze formulieren (vgl. die Ausführungen weiter unten!).

Bei den Beweisen unserer Sätze bildet die Grundlage ein einfaches, von mir an anderer Stelle in größerem Zusammenhang[7]) abgeleitetes „*Lemma*", eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein gegebenes Primideal $\mathfrak{p}$ im Potenzreihenring $\mathfrak{R}$ über einem Hauptidealring P kein echtes Primunterideal besitzt. Im übrigen arbeiten wir im wesentlichen mit bewertungstheoretischen Methoden. Ist z. B. P ein restunendlicher Hauptidealring, so definieren zunächst die nullgradigen Primelemente aus $\mathfrak{R}$ selbst eine Reihe von diskreten Bewertungen des Potenzreihenringes $\mathfrak{R}$. Diesen „*arithmetischen*" *Bewertungen* stehen die „*algebraischen*" *Bewertungen* von $\mathfrak{R}$ gegenüber, die durch die Primelemente von $\mathfrak{S}$ erzeugt werden. Zum Beweis des Hauptzerlegungssatzes für $\mathfrak{R}$ hat man nun nur zu zeigen, daß man mit Hilfe der arithmetischen und der algebraischen Bewertungen zusammengenommen die Teilbarkeitstheorie der Elemente von $\mathfrak{R}$ vollkommen beherrscht.

Die Methoden der Bewertungstheorie lassen sich aber auch in Fällen anwenden, in denen Zerlegungssätze im Sinne des Z.P.E. bis jetzt noch nicht bekannt oder der Natur der Dinge nach überhaupt ausgeschlossen sind. Ihre Brauchbarkeit bei einem nicht restunendlichen Hauptidealring P wurde oben bereits hervorgehoben. Sie versagen aber auch dann nicht, wenn der Koeffizientenbereich P eine beliebige „*endliche diskrete Hauptordnung*" darstellt, also einen Integritätsbereich, bei dem das Teilbarkeitsproblem der Elemente durch Einführung geeigneter diskreter Bewertungen gelöst werden kann, und zwar so, daß jedes einzelne Element immer nur in endlich vielen der benutzten Bewertungen positive Werte erhält. Die „algebraischen" Bewertungen von $\mathfrak{R}$

[7]) Dimensionstheorie in Stellenringen, J. f. Math. 1938, § 10.

werden auch in diesem allgemeinsten Fall durch die Primelemente von $\mathfrak{S}$ erzeugt. Zur Definition der „arithmetischen" Bewertungen hat man die nullgradigen Reihen von $\mathfrak{R}$ über geeigneten Oberringen von P in Primfaktoren zu zerlegen. Das Endergebnis lautet:

Gleichzeitig mit P *ist stets auch der Potenzreihenring* $\mathfrak{R}$ *über* P *eine endliche diskrete Hauptordnung, und man braucht zur Entwicklung der Teilbarkeitstheorie in* $\mathfrak{R}$ *nur die arithmetischen und die algebraischen Bewertungen.* — Damit ist aber gezeigt: Vom Standpunkt der Bewertungstheorie aus und abgesehen von der Gültigkeit oder Nichtgültigkeit eines Zerlegungssatzes im Sinne des Z.P.E. ist die Arithmetik des Potenzreihenringes $\mathfrak{R}$ über einer beliebigen endlichen diskreten Hauptordnung der Arithmetik des Ringes aller ganzrationalzahligen Polynome aufs engste verwandt.

Im übrigen habe ich in der vorliegenden Note (im Gegensatz zu einer früheren Skizze in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung [8]) das Hauptgewicht auf die Zerlegungssätze und nicht auf die rein bewertungstheoretischen Formulierungen gelegt.

1. Vorbemerkungen. Ein Lemma.

Unter einem Z.P.E.-Ring verstehen wir einen Integritätsbereich, in dem sich jedes Element bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt von endlich vielen Primelementen, also jedes Hauptideal eindeutig als Produkt von endlich vielen Primhauptidealen darstellen läßt. Sind im Z.P.E.-Ring $\mathfrak{R}$ *alle* Ideale Hauptideale, so sprechen wir von einem *Hauptidealring* [Ring vom Typus der ganzen rationalen Zahlen][2]).

Es sei nun $\mathfrak{R}$ der Ring aller formalen Potenzreihen in endlich vielen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ über einem beliebigen Integritätsbereich (oder Körper) P, A sei eine beliebige Reihe aus $\mathfrak{R}$. Ist dann in der Entwicklung $A = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)$ von A nach homogenen Formen steigenden Grades in $x_1, \ldots, x_n$ etwa $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{m-1} = 0$, $\varphi_m \neq 0$, so bezeichnen wir φ_m als die „*Anfangsform*", m als den „*Anfangsgrad*" (oder auch kurz als den „Grad") von A. Bei der Multiplikation zweier Reihen aus $\mathfrak{R}$ addieren sich die Anfangsgrade und multiplizieren sich die Anfangsformen.

Grundlegend für die vorliegende Arbeit ist das folgende, von mir an anderer Stelle in größerem Zusammenhang bewiesene[7]).

Lemma. Ist der Koeffizientenbereich P *des Potenzreihenringes* $\mathfrak{R}$ *ein Hauptidealring, so ist jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$, *bei dem die Anfangsformen aller*

[8]) Über die Entwicklung der Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. 46 (1936), S. 153—171; Nr. 7.

zu $\mathfrak{p}$ *gehörigen Reihen einen nichttrivialen gemeinsamen Faktor haben, in* $\mathfrak{R}$ *minimal, es besitzt also* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}$ *außer* (0) *kein echtes Primunterideal.*

Aus der Bewertungstheorie brauchen wir im folgenden den Begriff der diskreten Bewertung und des diskreten (insbesondere des perfekten diskreten) Bewertungsringes [9]). Erinnert sei an die Tatsache, daß zwei Bewertungen, die sich nur durch die Normierung (also nur durch einen festen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor aller Werte) unterscheiden, als nicht verschieden angesehen werden. Für die Zwecke unserer Arbeit ist die folgende Begriffsbildung nützlich:

Ist $\mathfrak{S}$ ein echter oder unechter Oberring des Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$, p ein Primelement aus $\mathfrak{S}$, so soll unter $B_p(\mathfrak{R})$ diejenige diskrete Bewertung von $\mathfrak{R}$ verstanden werden, die man erhält, wenn man jedem Element a aus $\mathfrak{R}$ als Wert den Exponenten σ zuordnet, mit dem p in $\mathfrak{S}$ in a aufgeht[10]). — Zwei äquivalente, also nur um einen Einheitsfaktor verschiedene Primelemente aus $\mathfrak{S}$ definieren offenbar stets dieselbe Bewertung von $\mathfrak{R}$, es hängt also $B_p(\mathfrak{R})$ nur vom Primhauptideal $(p) \cdot \mathfrak{S}$ ab. Doch kann, falls $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{R}$, auch bei zwei nichtäquivalenten Primelementen p und q aus $\mathfrak{S}$ unter Umständen $B_p(\mathfrak{R}) = B_q(\mathfrak{R})$ werden. — Hervorgehoben seien noch die folgenden, fast selbstverständlichen Tatsachen: Hat das Primhauptideal $(p) \cdot \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{R}$ ein Primhauptideal $(q) \cdot \mathfrak{R}$ zum Durchschnitt, so ist $B_p(\mathfrak{R}) = B_q(\mathfrak{R})$. Ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, und wird $B_p(\mathfrak{T}) = B_q(\mathfrak{T})$, so wird auch $B_p(\mathfrak{R}) = B_q(\mathfrak{R})$.

Der allgemeinste Ringtypus, den wir im folgenden als Koeffizientenbereich unserer Potenzreihenringe zulassen werden, ist die *endliche diskrete Hauptordnung*[11]). Der Einfachheit halber seien die Grundeigenschaften dieser Ringklasse noch einmal kurz zusammengestellt. Der Integritätsbereich $\mathfrak{P}$ heißt „endliche diskrete Hauptordnung", wenn sich eine Menge M von diskreten Bewertungen $B_1, \ldots, B_\tau, \ldots$ von $\mathfrak{P}$ so bestimmen läßt, daß 1. kein Element aus $\mathfrak{P}$ in unendlich vielen B_τ Nichteinheit ist und daß 2. in $\mathfrak{P}$ das

---

[9]) Ist B eine Bewertung des Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, so kann man B unbedenklich auch als eine „Bewertung von $\mathfrak{R}$" bezeichnen, da sich aus den Werten der Elemente von $\mathfrak{R}$ die Werte aller übrigen Körperelemente eindeutig berechnen lassen, wobei die alleinige Gültigkeit der Bewertungsaxiome für $\mathfrak{R}$ bereits die Gültigkeit dieser Axiome für ganz $\mathfrak{K}$ nach sich zieht. — Wir werden dementsprechend im folgenden fast immer von den Bewertungen der zu untersuchenden Integritätsbereiche reden, ohne ihre für uns nebensächlichen Quotientenkörper überhaupt einzuführen.

[10]) Die (an und für sich durchaus vorhandene) Möglichkeit, daß es außer 0 kein in $\mathfrak{S}$ durch p teilbares $\mathfrak{R}$-Element gibt, daß also $B_p(\mathfrak{R})$ die „triviale Bewertung" wird, bei der alle Ringelemente den Wert 0 haben, schließen wir stillschweigend von der Betrachtung aus.

[11]) Zum Begriff der endlichen diskreten Hauptordnung vgl. Beitrag IV, Nr. 1 sowie die dort in Anmerkung [2]) angegebene Literatur.

Element α dann und nur dann durch das Element β teilbar ist, wenn in keiner der Bewertungen B_τ der Wert von α kleiner ist als der Wert von β. — Läßt man aus der Menge M alle überflüssigen Bewertungen fort, so entsteht eine eindeutig bestimmte Bewertungsringmenge M^*, die gleichfalls den Bedingungen 1. und 2. genügt, und die im übrigen dadurch charakterisiert werden kann, daß die diskreten Bewertungsringe $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_\sigma, \ldots$, die im Quotientenkörper K von P zu den Bewertungen $B_1^*, \ldots, B_\sigma^*, \ldots$ aus M^* gehören, nichts anderes sind als die Quotientenringe der in P minimalen Primideale[12]). Es entspricht also jeder Bewertung B_σ^* aus M^* eindeutig umkehrbar ein minimales Primideal $\mathfrak{p}_\sigma$ aus P mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}_\sigma$ gerade alle und nur die Ringelemente enthält, die in B_σ^* positive Werte haben. — Wir wollen die B_σ^* aus M^* als die „*Normalbewertungen*" von P bezeichnen. Für die zugehörigen Bewertungsringe P_σ folgt aus Bedingung 2. sofort $\mathsf{P} = \bigcap_\sigma \mathsf{P}_\sigma$.

2. Perfekter diskreter Bewertungsring als Koeffizientenbereich.

Es sei P ein perfekter, diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K; $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ sei der Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P bzw. K. π sei ein Primelement aus P, der Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi)$ möge unendlich viele verschiedene Elemente enthalten. Durch triviale, wohlbekannte Rechnungen ohne Benutzung der Perfektheit von P beweist man:

Satz 1. *Eine Reihe P aus $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$ Einheit, wenn sie den Anfangsgrad 0 hat, und wenn außerdem im Falle $\mathfrak{R}$ das Anfangsglied durch π unteilbar ist.*

Satz 2. *Ist P eine von 0 verschiedene bzw. durch π unteilbare Reihe aus $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$, so kann man stets eine in K bzw. P umkehrbare lineare homogene Variablentransformation $x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k$ $(i = 1, \ldots, n)$, so bestimmen, daß P in y_n regulär ist, d. h. daß in P eine Potenz von y_n mit einem Einheitskoeffizienten aus K bzw. P vorkommt.*

Für Satz 2 ist es wesentlich, daß K und $\mathsf{P}/(\pi)$ unendlich viele verschiedene Elemente enthalten[13]).

---

[12]) Der zum $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ besteht aus allen Quotienten $\frac{a}{b}$ (a und b in $\mathfrak{R}$, b nicht in $\mathfrak{p}$)!

[13]) Ist z. B. P der Ring aller rationalen Zahlen mit ungeradem Nenner (oder auch die zugehörige perfekte Hülle, also der Ring aller ganzen rationalen 2-adischen Zahlen), so stellt für $n = 2$ sicher $P = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^3 + 2(x_1^4 + x_2^4)$ eine (in $\mathfrak{R}$ unzerlegbare) Reihe dar, die durch keine einzige Variablentransformation der angegebenen Art regulär gemacht werden kann.

Satz 3 (Weierstraßscher Vorbereitungssatz). *Ist P in y_n regulär, so kann man auf eine und nur eine Art die Einheit E in $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$ so bestimmen, daß $E \cdot P = y_n^r + Q_1 y_n^{r-1} + \ldots + Q_r$ wird, wobei die Q_i von y_n unabhängige Nichteinheiten aus $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$ darstellen.*

Für $\mathfrak{S}$ (Fall der Körperkoeffizienten) ist der Satz wohlbekannt. Die Übertragungsmöglichkeit auf $\mathfrak{R}$ beruht auf dem Umstand, daß $\mathfrak{R}$ wegen der Perfektheit von P als Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n, \pi$ über einem vollen Restsystem von P nach π aufgefaßt werden kann. Eine ausführliche Ableitung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für $\mathfrak{R}$ habe ich in Krull[4]) durchgeführt. Allerdings wird dort nur der Fall *einer* Variablen behandelt, aber die Beweisanordnung ist so, daß sie unmittelbar auf den Fall beliebig vieler Variabler ausgedehnt werden kann. — Mit Hilfe des Vorbereitungssatzes beweist man durch einen wohlbekannten, schon in Lasker[3]) zu findenden Induktionsschluß nach wachsender Variablenzahl ohne jede Schwierigkeit:

Satz 4. *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ sind Z.P.E.-Ringe.*

(Bei $\mathfrak{R}$ hat man zu beachten, daß π sicher auch in $\mathfrak{R}$ Primelement ist, und daß man sich infolgedessen beim Beweis des Z.P.E. auf durch π unteilbare Reihen beschränken darf.) — Es handelt sich nun darum, und das ist für uns das wichtigste, die Primfaktorzerlegungen eines Elementes P aus $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ selbst und in $\mathfrak{S}$ miteinander zu vergleichen.

Satz 5. *Zwei Primelemente P und Q aus $\mathfrak{R}$, die in $\mathfrak{S}$ einen gemeinsamen Primfaktor S besitzen, sind äquivalent: $(P) = (Q)$.*

In der Tat, die Menge aller der Reihen aus $\mathfrak{R}$, die in $\mathfrak{S}$ durch S teilbar sind, bildet in $\mathfrak{R}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$, und es besitzen die Anfangsformen aller Reihen von $\mathfrak{p}$ einen nichttrivialen gemeinsamen Faktor, nämlich die geeignet normierte Anfangsform von S, die nach Satz 1 sicher positiven Grad hat. Nach dem am Schluß von 1. formulierten Lemma muß daher $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ minimal sein, und aus $(P) + (Q) \subset \mathfrak{p}$ ergibt sich sofort $(P) = (Q) = \mathfrak{p}$. — Aus Satz 5 folgt ohne Schwierigkeit:

Ist R in $\mathfrak{R}$ ein größter gemeinsamer Faktor der Reihen A und B, so ist R auch in $\mathfrak{S}$ größter gemeinschaftlicher Faktor von A und B.

Andererseits zeigt der Beweis von Satz 5, wenn wir die Begriffsbildungen von 1. heranziehen, offenbar:

Jede durch ein Primelement S von $\mathfrak{S}$ definierte Bewertung $B_S(\mathfrak{R})$ kann auch mit Hilfe eines Primelementes P aus $\mathfrak{R}$ selbst definiert werden: $B_S(\mathfrak{R}) = B_P(\mathfrak{R})$. — Nennen wir schließlich eine Reihe Q aus $\mathfrak{R}$ „*primitiv*", wenn sie keinen Primfaktor vom Anfangsgrad 0 besitzt, so erhalten wir auf Grund von Satz 5 fast unmittelbar:

Satz 6. *Die Reihe A ist in $\mathfrak{R}$ dann und nur dann durch die primitive Reihe Q teilbar, wenn A in $\mathfrak{S}$ durch Q teilbar ist.*

In der Tat, es sei R in $\mathfrak{R}$ ein größter gemeinschaftlicher Faktor von A und Q, $A = B \cdot R$, $Q = C \cdot R$. Ist dann Q in $\mathfrak{S}$ Teiler von A, also größter gemeinsamer Faktor von A und Q, so müssen Q und R in $\mathfrak{S}$ äquivalent sein, es muß also C eine Einheit aus $\mathfrak{S}$ darstellen und somit den Anfangsgrad 0 haben. Wegen der Primitivität von Q ist nun C auch in $\mathfrak{R}$ Einheit, es wird also $A = D \cdot Q$ mit zu $\mathfrak{R}$ gehörigem $D = B \cdot C^{-1}$. — Satz 6 läßt eine *genauere Charakterisierung der primitiven Reihen aus* $\mathfrak{R}$ sehr wünschenswert erscheinen. Doch dürfte die Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Primitivitätsbedingungen kaum möglich sein. Hinreichende, aber nicht notwendige Kriterien dagegen kann man leicht angeben. Z. B.:

a) *Eine Reihe* P *aus* $\mathfrak{R}$ *mit durch* π *unteilbarer Anfangsform ist stets primitiv.*

b) *Eine Reihe* P *aus* $\mathfrak{R}$ *vom Anfangsgrad* m *mit der Anfangsform* $\pi^r \cdot \varphi_m$ $(\varphi_m \not\equiv 0\ (\pi))$ *ist sicher primitiv, wenn die in der Entwicklung von* P *auftretende Form* $(m+1)$*-ten Grades* φ_{m+1} *modulo* π *durch* φ_m *unteilbar ist.*

Kriterium a) folgt aus der Tatsache, daß die Anfangsform des Produktes stets gleich dem Produkt der Anfangsformen der Faktoren ist. Zum Beweis von b) bedenke man: Ist $P = A \cdot Q$, wobei A mit π^s $(0 < s \leqq r)$ beginnt, so muß Q mit $\pi^{r-s} \cdot \varphi_m$ beginnen, und man erhält für φ_{m+1} eine Darstellung $\varphi_{m+1} = \pi^s \cdot \psi_{m+1} + \pi^{r-s} \cdot \chi_1 \cdot \varphi_m$.

Satz 7. *Es gibt bei* $n \geqq 2$ *Variabeln stets in* $\mathfrak{R}$ *Primelemente, die in* $\mathfrak{S}$ *in mehrere Primfaktoren zerfallen.*

Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels. Dabei beschränken wir uns der Bequemlichkeit halber auf den Fall, daß P eine von 2 verschiedene Charakteristik besitzt. Unter dieser Voraussetzung ist stets $\pi\,(x_2^2 - x_1^2) - x_1^3$ ein Primelement aus $\mathfrak{R}$, das in $\mathfrak{S}$ in zwei Primfaktoren zerfällt. — In der Tat, daß $\pi\,(x_2^2 - x_1^2) - x_1^3$ in $\mathfrak{R}$ Primelement sein muß, folgt aus dem Umstand, daß x_1^3 modulo π weder durch $x_2 + x_1$ noch durch $x_2 - x_1$ (also durch keinen der Primfaktoren von $x_2^2 - x_1^2$) teilbar ist. Andererseits wird unter unserer Voraussetzung in $\mathfrak{S}$ stets $1 + \frac{x_1}{\pi} = S^2$ für $S = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \frac{x_1^\nu}{\pi^\nu}$ und dementsprechend $\pi\,(x_2^2 - x_1^2) - x_1^3 = \pi\ (x_2 + x_1 \cdot S)\,(x_2 - x_1 \cdot S)$. — Satz 7 zeigt, daß die Verhältnisse bei unseren Potenzreihen keineswegs so einfach liegen wie bei ganzzahligen Polynomen, wo bekanntlich der Satz gilt, daß jedes ganzzahlig irreduzible Polynom auch rationalzahlig irreduzibel ist[14]).

[14]) In einer früheren Note (Eine Bemerkung über rationalzahlige Potenzreihen, J. f. Math. **164** (1931), S. 23—26) habe ich durch ziemlich umständliche Rechnungen gezeigt, daß in $\mathfrak{S}$ für $n \geqq 2$ stets Primelemente existieren, die kein einziges von 0 verschiedenes $\mathfrak{R}$-Element teilen. Es liegen also auch in dieser Hinsicht die Verhältnisse bei den Potenzreihenringen ganz anders als bei den Polynomringen.

3. Beliebiger diskreter Bewertungsring als Koeffizientenbereich.

Es sei jetzt P ein beliebiger diskreter Bewertungsring mit dem Primelement π und mit unendlichem Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi)$. P^* sei die perfekte Hülle von P, K^* bzw. K bedeute den Quotientenkörper von P^* bzw. P. Unter $\mathfrak{R}^*$ bzw. $\mathfrak{S}^*$ bzw. $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ möge der Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P^* bzw. K^* bzw. P bzw. K verstanden werden. Wesentlich für die folgenden Überlegungen ist ein im Grundgedanken von J. Schur [5]) stammender, in Krull [4]) für den Fall einer Variablen bewiesener

Hilfssatz. *Es sei N eine Reihe vom Anfangsgrad 0 mit dem Anfangsglied α über dem Quotientenkörper A eines beliebigen Integritätsbereiches T; ε sei eine Einheit aus T, S ein volles Restsystem von A nach $(\alpha)\cdot\mathsf{T}$. Dann läßt sich stets eine mit ε beginnende Einheitsreihe aus T so bestimmen, daß in $N^* = E\cdot N$ bis auf das Anfangsglied $\alpha\cdot\varepsilon$ alle Koeffizienten zu S gehören.*

Ein neuer Beweis des Hilfssatzes ist nicht nötig, da der Beweis von Krull [4]) mühelos auf den Fall beliebig vieler Variabler ausgedehnt werden kann. Die Anwendung des Hilfssatzes auf $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{S}^*$ liefert sofort:

Satz 8. *Zu jeder nullgradigen Reihe aus $\mathfrak{R}^*$ gibt es in $\mathfrak{R}^*$ eine äquivalente, zu $\mathfrak{R}$ gehörige Reihe. — Jede nullgradige Reihe aus $\mathfrak{S}^*$ kann durch Multiplikation mit einer Einheit aus $\mathfrak{R}^*$ in eine zu $\mathfrak{S}$ gehörige Reihe verwandelt werden.*

In der Tat, zu jedem α aus K^* gibt es eine Einheit ε aus P^*, derart, daß $\alpha\cdot\varepsilon$ ein Element aus K (z. B. eine positive oder negative Potenz von π) wird; außerdem existiert stets ein ganz zu K gehöriges volles Restsystem von K^* nach $(\alpha)\cdot\mathsf{P}^*$.

Es sei jetzt A eine Reihe aus $\mathfrak{R}$, die in $\mathfrak{R}^*$ nichtprimitiv ist, also dort einen nullgradigen Primfaktor N besitzt, $A = N\cdot B$. Nach Satz 8 dürfen wir annehmen, daß N zu $\mathfrak{R}$ gehört; dann aber liegen alle Koeffizienten von B in $\mathsf{P}^*\cap\mathsf{K} = \mathsf{P}$, d. h. es ist auch $B\subset\mathfrak{R}$[15]). Aus der (am Beispiel von A festgestellten) Tatsache, daß jedes in $\mathfrak{R}^*$ durch N teilbare $\mathfrak{R}$-Element schon in $\mathfrak{R}$ selbst durch N teilbar ist, folgt sofort, daß N nicht nur in $\mathfrak{R}^*$, sondern auch in $\mathfrak{R}$ ein Primelement darstellt, d. h.: Jedes in $\mathfrak{R}^*$ nichtprimitive Element A von $\mathfrak{R}$ besitzt in $\mathfrak{R}$ mindestens einen nullgradigen Primfaktor N. Auf Grund dieser Bemerkung zeigt man mühelos:

Satz 9. *Jedes Element aus $\mathfrak{R}$ läßt sich in $\mathfrak{R}$ bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt endlich vieler nullgradiger Primelemente und eines in $\mathfrak{R}^*$ (und damit erst recht in $\mathfrak{R}$) primitiven Elementes darstellen.*

---

[15]) Daß die Koeffizienten der Reihe B dem Koeffizientenkörper der Reihen A und N angehören, falls die Gleichung $A = B\cdot N$ gilt, folgt mühelos aus der Tatsache, daß der zu beweisende Satz sicher richtig ist, wenn man an Stelle der Reihen homogene Formen setzt.

In $\mathfrak{S}$ gilt offenbar ebenso wie in $\mathfrak{S}^*$ der Z.P.E.; auch kann auf $\mathfrak{S}$ das „Lemma" von 1. angewandt werden. Aus den gleichen Schlüssen, wie sie in 2. zum Beweise von Satz 5 dienten, ergibt sich daher:

Satz 10. *Zwei Primelemente aus $\mathfrak{S}$, die in $\mathfrak{S}^*$ einen Primfaktor gemeinsam haben, sind äquivalent. Haben die Reihen $Q_1, \ldots, Q_m$ in $\mathfrak{S}$ den größten gemeinschaftlichen Faktor Q, so ist Q auch in $\mathfrak{S}^*$ größter gemeinschaftlicher Faktor von $Q_1, \ldots, Q_m$.*

Auf Satz 10 stützt sich

Satz 11. *Ist S ein Primelement aus $\mathfrak{S}$, so ist stets $\mathfrak{p} = (S) \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ ein Primhauptideal.*

Es sei R ein größter gemeinschaftlicher Faktor aller Elemente von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$, und es seien, was stets möglich ist, $Q_1, \ldots, Q_m$ in $\mathfrak{p}$ so gewählt, daß R bereits größter gemeinschaftlicher Faktor von $Q_1, \ldots, Q_m$ wird. $Q_1, \ldots, Q_m$ besitzen auch in $\mathfrak{R}^*$ einen größten gemeinschaftlichen Faktor Q^*, und aus Satz 10 und Satz 5 folgt sofort, daß R und Q^* in $\mathfrak{S}^*$ äquivalent sein müssen, daß also in $\mathfrak{S}^*$ eine Gleichung $Q^* = R \cdot N^*$ mit nullgradigem N^* gilt. Nach Satz 8 gibt es ferner in $\mathfrak{R}^*$ eine Einheit E^* derart, daß $N^* \cdot E^* = N \subset \mathfrak{S}$ und somit $Q = Q^* \cdot E^* = R \cdot (N^* \cdot E^*) \subset \mathfrak{R}$ wird. D. h. aber: Es gibt in $\mathfrak{R}$ ein der Gleichung $(Q) \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = (R) \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = (S) \cdot \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ genügendes Element Q. Nimmt man, was angesichts von Satz 9 zulässig ist, Q in $\mathfrak{R}^*$ primitiv an, so gilt für jedes $A \subset \mathfrak{p}$ eine Gleichung $A = Q \cdot B$, wobei B nicht nur zu $\mathfrak{S}$, sondern auch zu $\mathfrak{R}^*$ und damit zu $\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ gehört, d. h. wir haben $\mathfrak{p} = (Q)$.

Ist nun A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ von positivem Anfangsgrade, so besitzt A in $\mathfrak{S}$ mindestens einen Primfaktor S und nach dem soeben Bewiesenen folgt daraus in $\mathfrak{R}$ die Gültigkeit einer Gleichung $A = Q \cdot B$, wobei Q ein (in $\mathfrak{S}$ durch S teilbares) Primelement positiven Anfangsgrades aus $\mathfrak{R}$ darstellt. Diese Bemerkung zeigt aber: Jedes Element A aus $\mathfrak{R}$ läßt sich in $\mathfrak{R}$ als Produkt endlich vieler Primelemente positiven Anfangsgrades und einer nullgradigen Reihe darstellen. Verknüpft man dieses letzte Ergebnis mit Satz 9, und beachtet man, daß beim Beweis der Sätze 5 und 6 in Nr. 2 nur die Gültigkeit des Z.P.E. für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, sowie das Lemma von 1., nicht aber die Perfektheit von P benutzt wurde, so erhält man:

Satz 12. *Die Sätze 4 bis 6 von 2. (insbesondere also der Z.P.E.) gelten für $\mathfrak{R}$ auch dann, wenn der Koeffizientenring P einen nichtperfekten diskreten Bewertungsring darstellt, sofern nur der Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi)$ unendlich viele Elemente enthält.*

Ist P ein diskreter Bewertungsring mit endlichem Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi)$, so liegt der Gedanke nahe, zunächst von P zum zugehörigen *Kroneckerschen Funktionalring* P_u überzugehen, also zu dem Ring aller Quotienten $\frac{p(u)}{q(u)}$,

bei denen Zähler und Nenner Polynome in einer Unbestimmten u über P sind, und insbesondere $q(u)$ mindestens einen Einheitskoeffizienten aus P besitzt. P_u ist ebenso wie P ein diskreter Bewertungsring mit dem Primelement π, und es ist $\mathsf{P}_u/(\pi)$ eine einfach transzendente Erweiterung von $\mathsf{P}/(\pi)$, also sicher unendlich. Bezeichnet nun $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}_u$ den Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über P bzw. P_u, so ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_u$, und es gilt jedenfalls für $\mathfrak{R}_u$ der Z.P.E. Daraus würde sofort der Z.P.E. für $\mathfrak{R}$ folgen, wenn man zeigen könnte, daß jede in $\mathfrak{R}_u$ zerlegbare, also als Produkt echter Teiler darstellbare Reihe aus $\mathfrak{R}$ stets auch in $\mathfrak{R}$ selbst zerlegbar sein muß. Diese letztere Behauptung wäre trivial, wenn es sich bei $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_u$ um Polynomringe in $x_1, \ldots, x_n$ handelte. In dem in Frage stehenden Potenzreihenfall aber versagen die bei den Polynomen üblichen Schlüsse völlig, und nach dem einigermaßen überraschenden Ergebnis von Satz 7 halte ich es nicht für ausgeschlossen, daß man auch hier eine Überraschung erlebt und auf in $\mathfrak{R}$ unzerlegbare Reihen stößt, die in $\mathfrak{R}_u$ zerlegbar werden. Wir müssen also feststellen:

Die Frage, ob für den Ring aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über einem diskreten Bewertungsring P mit endlichem $\mathsf{P}/(\pi)$ (oder auch über einem endlichen Körper K) der Z.P.E. gilt oder nicht, ist bisher noch nicht entschieden.

4. Endliche diskrete Hauptordnung als Koeffizientenbereich.

Es sei jetzt P eine beliebige endliche diskrete Hauptordnung mit dem Quotientenkörper K, und es seien $\mathsf{P}'_1, \ldots, \mathsf{P}'_\tau, \ldots$ die diskreten Bewertungsringe, die zu den Normalbewertungen von P gehören. Enthält der Restklassenkörper von P'_τ unendlich viele verschiedene Elemente, so setzen wir $\mathsf{P}'_\tau = \mathsf{P}_\tau$, im anderen Falle verstehen wir unter P_τ den zu P'_τ gehörigen Kroneckerschen Funktionalring in dem am Schlusse von 3. festgelegten Sinne. Den Quotientenkörper von P_τ bezeichnen wir mit K_τ; $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}_\tau, \mathfrak{S}_\tau)$ möge den Ring der formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über $\mathsf{P}(\mathsf{K}, \mathsf{P}_\tau, \mathsf{K}_\tau)$ bedeuten. Nach 2. und 3. sind die Ringe $\mathfrak{R}_\tau$, $\mathfrak{S}_\tau$, $\mathfrak{S}$ sämtlich Z.P.E.-Ringe. — Wir beweisen zunächst:

Satz 13. *Ist P_τ ein Primelement von positivem Anfangsgrad aus einem der Ringe $\mathfrak{R}_\tau$, so gibt es stets in $\mathfrak{S}$ ein Primelement S, das genau dieselbe Bewertung von $\mathfrak{R}$ erzeugt wie P_τ, d. h. also $B_{P_\tau}(\mathfrak{R}) = B_S(\mathfrak{R})$.*

In der Tat, zunächst gibt es nach einer in 2. aus Satz 5 gezogenen Folgerung in $\mathfrak{S}_\tau$ ein Primelement S_τ, für das $B_{S_\tau}(\mathfrak{R}_\tau) = B_{P_\tau}(\mathfrak{R}_\tau)$ und damit wegen $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_\tau$ erst recht $B_{S_\tau}(\mathfrak{R}) = B_{P_\tau}(\mathfrak{R})$ wird. In entsprechender Weise schließt man aus Satz 10, daß in $\mathfrak{S}$ ein Primelement S existiert, das der Gleichung

$B_{S_\tau}(\mathfrak{S}) = B_S(\mathfrak{S})$ genügt, und wegen $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$ erhält man schließlich: $B_{R_\tau}(\mathfrak{R}) = B_{S_\tau}(\mathfrak{R}) = B_S(\mathfrak{R})$. — Wir definieren nun:

Unter einer „*arithmetischen*" bzw. „*algebraischen*" Bewertung von $\mathfrak{R}$ soll eine diskrete Bewertung von $\mathfrak{R}$ verstanden werden, die durch ein *nullgradiges Primelement aus einem der Ringe* $\mathfrak{R}_\tau$ bzw. durch ein *Primelement aus* $\mathfrak{S}$ erzeugt wird.

Satz 14. *$\mathfrak{R}$ ist eine endliche diskrete Hauptordnung. Die zugehörigen Normalbewertungen sind sämtlich in der Menge aller algebraischen und arithmetischen Bewertungen von $\mathfrak{R}$ enthalten.*

Zum Beweis genügt es nach 1. zu zeigen: 1. Kein Element A aus $\mathfrak{R}$ hat in unendlich vielen algebraischen oder arithmetischen Bewertungen einen positiven Wert. — In der Tat, daß A nur in endlich vielen algebraischen Bewertungen positive Werte hat, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß A in $\mathfrak{S}$ eine Zerlegung in *endlich viele* Primfaktoren besitzt. Andererseits ergibt sich aus dem Primitivitätskriterium a) von Nr. 2. und der Tatsache, daß jedes Element aus P nur in endlich vielen P_τ Nichteinheit ist, sofort, daß nur in endlich vielen $\mathfrak{R}_\tau$ ein nullgradiger Primfaktor von A abgespalten werden kann. Daraus schließt man mühelos, daß auch die Anzahl der arithmetischen Bewertungen, in denen A positive Werte besitzt, endlich ist. — 2. Hat A in keiner arithmetischen oder algebraischen Bewertung einen kleineren Wert als B, so ist A in $\mathfrak{R}$ durch B teilbar. — Aus der Definition der arithmetischen und algebraischen Bewertungen sowie aus Satz 13 folgt nämlich, daß unter der angegebenen Bedingung A in $\mathfrak{S}$ und in allen $\mathfrak{R}_\tau$ durch jeden Primfaktor in mindestens derselben Potenz teilbar ist wie B. Es gilt daher eine Gleichung $A = B \cdot C$, bei der die eindeutig bestimmte Reihe C nicht nur zu $\mathfrak{S}$, sondern auch zu allen $\mathfrak{R}_\tau$ und damit zu $\mathfrak{R}$ gehören muß. Fertig!

5. Hauptidealring als Koeffizientenbereich.

Wir benutzen dieselbe Bezeichnungsweise wie in 4., verstehen aber diesmal unter P einen *Hauptidealring*. Die verschiedenen Primhauptideale von P seien $(\pi_1), \ldots, (\pi_\tau), \ldots$, und zwar seien die Indizes so gewählt, daß (π_τ) und P'_τ bzw. P_τ jeweils zusammengehören. P'_τ besteht dann aus allen Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ (α und β in P, $\beta \not\equiv 0\ (\pi_\tau)$), und es ist π_τ auch in P'_τ und P_τ Primelement. Außerdem folgt aus der Tatsache, daß in P zwei verschiedene Primideale stets teilerfremd sind, der wichtige Satz: Für jedes r und jedes τ stellt ein volles Restsystem von P nach $(\pi_\tau^r) \cdot \mathsf{P}$ gleichzeitig ein volles Restsystem von P'_τ nach $(\pi_\tau^r) \cdot \mathsf{P}'_\tau$ dar. — Wir beweisen nun zunächst (für den *Hauptidealring* P als Koeffizientenbereich!) die folgende wichtige Ergänzung zu Satz 14.:

Satz 15. *Die arithmetischen und die algebraischen Bewertungen von $\mathfrak{R}$ sind sämtlich Normalbewertungen im Sinne von* 1.

Es sei B eine algebraische oder arithmetische Bewertung von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$ das Primideal aller der Reihen aus $\mathfrak{R}$, die in B positive Werte haben. Dann ist zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ minimal ist. Die Richtigkeit dieser Tatsache folgt aber sofort aus dem Lemma von 1. Ist nämlich B algebraisch, so haben die Anfangsformen aller Reihen von $\mathfrak{p}$ offenbar über K und damit auch über P einen Faktor positiven Grades in $x_1, \ldots, x_n$ gemein. Ist aber B arithmetisch und etwa durch ein Primelement aus P_τ definiert, so müssen bei jeder Reihe aus $\mathfrak{p}$ alle Koeffizienten der Anfangsform durch π_τ teilbar sein.

Es wäre sehr erfreulich, wenn Satz 15 auch dann bewiesen werden könnte, wenn der Koeffizientenring P eine beliebige endliche diskrete Hauptordnung darstellt. Aber in diesem allgemeinsten Fall hat man das Lemma von 1. nicht zur Verfügung, und ich sehe bis jetzt keine Möglichkeit, ohne Zuhilfenahme dieses Lemmas die Minimaleigenschaft des zu einer algebraischen oder arithmetischen Bewertung B gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ zu zeigen.

Um über Satz 15 hinaus zu schärferen Ergebnissen zu kommen, machen wir von jetzt ab die Voraussetzung, daß bei jedem Primelement π_τ des Hauptidealringes P der Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi_\tau)$ unendlich ist. Dann wird $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}'_\tau$ für jedes τ, und aus den zu Beginn der Nummer besprochenen Eigenschaften von P'_τ, sowie aus dem am Anfang von 3. formulierten Hilfssatz ergibt sich sofort für den Potenzreihenring $\mathfrak{R}_\tau$ über P_τ:

Satz 16. *Jede nullgradige Reihe aus $\mathfrak{R}_\tau$ ist in $\mathfrak{R}_\tau$ zu einer Reihe aus $\mathfrak{R}$ äquivalent.*

Aus Satz 16 und der Tatsache, daß für alle $\mathfrak{R}_\tau$ der Z.P.E. gilt, folgt auf Grund der gleichen Schlüsse wie sie in 3. von Satz 8 zu Satz 9 führten:

Satz 17. *Ist der Restklassenkörper des Hauptidealringes P nach einem beliebigen Primhauptideal stets unendlich, so läßt sich im Potenzreihenring $\mathfrak{R}$ jede Reihe bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt endlich vieler nullgradiger Primelemente und einer primitiven Reihe darstellen.*

Dabei sind die primitiven Reihen von $\mathfrak{R}$ dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht nur außer den Einheiten keine nullgradigen Faktoren besitzen, sondern daß sie sogar in allen arithmetischen Bewertungen von $\mathfrak{R}$ den Wert 0 haben. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar:

Satz 18. *In $\mathfrak{R}$ ist die Reihe A dann und nur dann durch die primitive Reihe Q teilbar, wenn A in $\mathfrak{S}$ durch Q teilbar ist.*

Der Satz 6 von 2. gilt also wörtlich auch dann, wenn der Koeffizientenring P einen beliebigen Hauptidealring darstellt, sofern nur für kein Primelement π der Restklassenkörper $\mathsf{P}/(\pi)$ endlich ist.

Um nun für $\mathfrak{R}$ den vollen Z.P.E. zu beweisen, hätte man nach dem Muster von 3. nur noch zu zeigen: Ist S ein Primelement aus $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{p} = (S) \cdot \mathfrak{S} \frown \mathfrak{R}$, und bedeutet R einen größten gemeinschaftlichen Faktor aller Elemente von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ stets eine zu R äquivalente, zu $\mathfrak{R}$ gehörige Reihe Q. —

Aus den Überlegungen von 3. aber ergibt sich nur: Für jedes τ existiert in $\mathfrak{S}$ eine zu R äquivalente, in $\mathfrak{R}_\tau$ liegende Reihe Q_τ. Ich sehe zur Zeit keine Möglichkeit, aus der Existenz der Q_τ auf die Existenz einer Reihe Q in dem von uns benötigten Sinne zu schließen, und ich halte es überhaupt für keineswegs ausgeschlossen, daß der Z.P.E. für die primitiven Reihen des Potenzreihenrings $\mathfrak{R}$ über dem Hauptidealring P gar nicht gilt. — Im übrigen kann schon das mit den Sätzen 17 und 18 erreichte Ergebnis als recht befriedigend angesehen werden.

6. Z. P. J.-Ring als Koeffizientenbereich.

Die Sätze von 5. können in geeigneter Umformulierung auf den Fall übertragen werden, daß der Koeffizientenbereich P nicht einen Hauptidealring darstellt, sondern einen beliebigen „*Z.P.I.-Ring*", d. h. einen Integritätsbereich, in dem, ebenso wie in der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, jedes Ideal das Produkt von endlich vielen teilerlosen Primidealen ist. Man muß dabei statt mit Elementen bzw. Hauptidealen allallgemeiner mit sogenannten „*Quasihauptidealen*" arbeiten[16]). — Ein (ganzes) Ideal $\mathfrak{h}$ aus dem Ring $\mathfrak{P}$ aller Polynome oder dem Ring $\mathfrak{R}$ aller formalen Potenzreihen in $x_1, \ldots, x_n$ über dem Z.P.J.-Ring P heißt *Quasihauptideal*, wenn es sich in der Gestalt $\mathfrak{h} = \mathfrak{v}_0 \cdot (a)$ darstellen läßt, wobei $\mathfrak{v}_0$ ein (ganzes oder nichtganzes) P-Ideal aus dem Quotientenkörper K von P und a ein Element aus $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ein Quasihauptideal $\mathfrak{h}$ ist Faktor jedes Unterideals $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cdot \mathfrak{g}$; ist dabei insbesondere $\mathfrak{a}$ selbst ein Quasihauptideal, so wird auch $\mathfrak{g}$ eines. Statt zu sagen, das Quasihauptideal $\mathfrak{h}$ enthalte das Element a, kann man also auch sagen, $\mathfrak{h}$ sei Faktor von a. Das „Lemma" von 1. läßt sich dann folgendermaßen verallgemeinern:

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ *aus dem Potenzreihenring* $\mathfrak{R}$ *über dem Z.P.J.-Ring* P *ist stets in* P *minimal, wenn die Anfangsformen aller Reihen aus* $\mathfrak{p}$ *einen gemeinsamen nichttrivialen Quasihauptidealfaktor besitzen.*

Andererseits überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, daß die Anfangsformen aller der Reihen aus $\mathfrak{R}$, die in einer bestimmten algebraischen oder arithmetischen Bewertung B positive Werte haben, einen gemeinschaftlichen nichttrivialen Quasihauptidealfaktor besitzen müssen. Daraus folgt aber sofort:

Satz 19. *Satz* 15 *gilt wörtlich auch dann, wenn der Koeffizientenbereich* P *des Potenzreihenringes* $\mathfrak{R}$ *nicht einen Hauptidealring, sondern einen beliebigen Z.P.J.-Ring darstellt.*

[16]) Zum Begriff der Quasihauptideale vgl. außer Krull [4]) noch: W. Krull: Hauptidealzerlegung in Polynomringen, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 213—217. Daß wir im Text nur „ganze" Quasihauptideale einführen, hat seinen Grund einfach darin, daß auch in Nr. 1 bis 5 ausschließlich ganze Ideale betrachtet wurden.

Nach dem Vorbild von 5. setzen wir von jetzt ab voraus, daß der Restklassenkörper von P nach einem beliebigen Primideal stets unendlich ist, so daß also immer $\mathsf{P}'_\tau = \mathsf{P}_\tau$ wird. — Ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{v}_0 \cdot (A)$ irgend ein Quasihauptideal aus $\mathfrak{R}$, so ist der Anfangsgrad r von A, unabhängig von der speziellen Darstellung, durch $\mathfrak{h}$ allein eindeutig bestimmt; wir können daher r auch kurz als „Anfangsgrad von $\mathfrak{h}$" bezeichnen. Beim Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{S}$ wird $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{S} = (A) \cdot \mathfrak{S}$ Hauptideal; unter dem „Wert" von $\mathfrak{h}$ in einer bestimmten algebraischen Bewertung B von $\mathfrak{R}$ wollen wir den (nur von $\mathfrak{h}$ abhängigen) Wert verstehen, den das Basiselement A von $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{S}$ in B besitzt. In entsprechender Weise können die Werte von $\mathfrak{h}$ in den arithmetischen Bewertungen von $\mathfrak{R}$ definiert werden; denn es wird auch $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{R}_\tau = (A_\tau) \cdot \mathfrak{R}_\tau$ für jedes τ zum Hauptideal. — Nennt man schließlich ein Quasihauptideal „primitiv", wenn es in allen arithmetischen Bewertungen den Wert 0 hat, so erhält man als Gegenstück zu den Sätzen 17 und 18 von 5.:

Satz 20. *In $\mathfrak{R}$ läßt sich jedes Quasihauptideal eindeutig als Produkt endlich vieler Prim-Quasihauptideale und eines primitiven Quasihauptideals darstellen. — Das Quasihauptideal $\mathfrak{v}_0 \cdot (A)$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{R}$ durch das primitive Quasihauptideal $\mathfrak{w}_0 \cdot (Q)$ teilbar, wenn A in $\mathfrak{S}$ durch Q teilbar ist.*

Auf den Beweis von Satz 20 brauchen wir nicht einzugehen. Denn der zweite Teil ist fast selbstverständlich, und der Beweis des ersten Teiles, der auf demselben Grundgedanken beruht wie der Beweis von Satz 17, kann in den Einzelheiten nach dem Vorbild von Krull [4], § 4, geführt werden [14], wo ich die Zerlegung der Quasihauptideale bei Potenzreihen einer Variablen untersucht habe.

---

[17] In Krull [4] erscheinen die Z. P. J.-Ringe unter dem Namen „Multiplikationsringe".

(Eingegangen am 8. Dezember 1937.)

Ein Ausdruck, der die Hermiteschen Polynome der Ebene und die zu ihnen biorthogonalen auf einmal erzeugt.

Von

Lothar Koschmieder in Brünn.

Kürzlich habe ich zwei Reihen summiert[1]), die nach den Hermiteschen Polynomen $H_{mn}(x, y)$ und den zu ihnen in der Ebene biorthogonalen $G_{mn}(x, y)$ fortschreiten — die Reihen

$$(1) \qquad G = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} G_{mn}(x, y) G_{mn}(X, Y),$$

$$(2) \qquad H = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} H_{mn}(x, y)\ H_{mn}(X, Y).$$

H ergab sich dabei aus G ohne neue Rechnung, durch eine die G_{mn} in die H_{mn} überführende einfache Verwandlung $\mathfrak{W}$ der veränderlichen und festen Werte (1. [5])). Es liegt nahe, nach der Summe der Reihe

$$(3) \qquad B = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} G_{mn}(x, y)\ H_{mn}(X, Y)$$

zu fragen. Sie ist aus G oder H durch $\mathfrak{W}$ nicht erhältlich; daher werde hier B für sich bestimmt (§ 1). Wir verfahren dabei ganz entsprechend wie bei der Summierung G[1]). Deshalb begnügen wir uns hier mit ganz kurzen Erläuterungen und übernehmen vom a. O.[1]) die Bezeichnungen, ohne sie zu erklären. Den Punkt $R(s, t)$ beschränken wir auf das Innere des den Ursprung enthaltenden Vierecks $\mathfrak{H}$, das die jeweils im ersten, ..., vierten Quadranten verlaufenden Bögen der vier Hyperbeln

$$(4_1) \qquad \sqrt{\Delta} - \sqrt{a\,c}\,(s + t) + \sqrt{\Delta}\,s\,t = 0,$$

$$(4_2) \qquad \sqrt{\Delta} + \sqrt{a\,c}\,(s - t) - \sqrt{\Delta}\,s\,t = 0,$$

$$(4_3) \qquad \sqrt{\Delta} + \sqrt{a\,c}\,(s + t) + \sqrt{\Delta}\,s\,t = 0,$$

$$(4_4) \qquad \sqrt{\Delta} - \sqrt{a\,c}\,(s - t) - \sqrt{\Delta}\,s\,t = 0$$

[1]) L. Koschmieder, Math. Zeitschr. **43** (1937), S. 248—254; auf Formeln usw. dieser Arbeit beziehe ich mich durch eine vorgesetzte Ziffer 1.

durch ihre Schnittpunkte

$$\left(0, \sqrt{\frac{\Delta}{ac}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{\Delta}{ac}}, 0\right), \quad \left(0, -\sqrt{\frac{\Delta}{ac}}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{\Delta}{ac}}, 0\right)$$

bilden (s. Figur, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$).

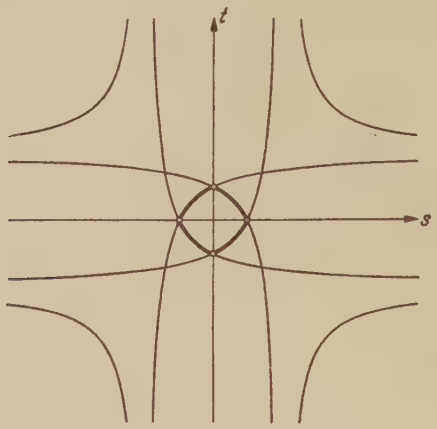


Fig. 1.

Aus der summierten Reihe B (15) und aus (1. 8), (1. 11) folgern wir (§ 2) einige Integraleigenschaften [(20), . . ., (23); (26), . . ., (29)] der Polynome G_{mn} und H_{mn}, wie am Ende von[1]) angekündigt.

§ 1.

Summierung der Reihe B.

Um B zu ermitteln, gehen wir von der Integraldarstellung der Polynome G_{mn} (1. 13) und H_{mn} aus,

$$(5) \quad H_{mn}(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left[\frac{1}{2}\varphi(X, Y)\right](-i)^{m+n} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\psi(U, V) + i(XU + YV)\right] U^m V^n \, dU \, dV;$$

(5) entsteht aus (1. 13) durch $\mathfrak{W}$ (1.[5])). Man kann dann (3) schreiben

$$(6) \quad B = \frac{1}{4\pi^2} \exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\varphi(X, Y)\right] \sum_{m,n}^{0,\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta \vartheta_{mn} \, du \, dv \, dU \, dV,$$

$$\Theta(u, v, U, V) = \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u, v) - \tfrac{1}{2}\psi(U, V) + i(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v + XU + YV)\right],$$

$$\vartheta_{mn}(u, v, U, V) = (-1)^{m+n} \frac{s^m}{m!} \frac{t^n}{n!} u^m v^n U^m V^n.$$

Daß in (6) die Summierung rechts gelingt, beruht auf der Möglichkeit, dort Summen- und Integralzeichen zu vertauschen. Dies ist statthaft, weil das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Theta| \sum_{m,n}^{0,\infty} |\vartheta_{mn}|\, du\, dv\, dU\, dV$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tfrac{1}{2}[\varphi(u,v)+\psi(U,V) - 2|suU| - 2|tvV|]\}\, du\, dv\, dU\, dV$$

konvergiert. Die in der letzten eckigen Klammer beschlossene quadratische Form $\mathfrak{Q}$ der vier Veränderlichen u, v, U, V, in der wir $|s| = \sigma$, $|t| = \tau$ setzen, ist nämlich entschieden positiv, weil die vier Hauptminoren ihrer Diskriminante[2])

$$\delta = \begin{vmatrix} a & -b & -\sigma & 0 \\ -b & c & 0 & -\tau \\ -\sigma & 0 & \frac{c}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ 0 & -\tau & -\frac{b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{vmatrix}$$

positiv sind: Von den Ungleichungen

(7) $$a > 0,$$

(8) $$ac - b^2 = \Delta > 0,$$

(9) $$c(1-\sigma^2) > 0,$$

(10) $$(1+\sigma\tau)^2 - \frac{ac}{\Delta}(\sigma+\tau)^2 > 0$$

bestehen (7), (8) nach (1. 5); (9) gilt in $\mathfrak{H}$ (4), weil dort

$$1 - \sigma^2 \geqq 1 - \frac{\Delta}{ac} = \frac{b^2}{ac} > 0 \qquad [c > 0 \text{ nach (1. 5)}]$$

ist. Schließlich trifft in $\mathfrak{H}$ auch (10) zu; denn dort ist nach (4) im ersten und dritten Quadranten

$$\Delta(1+st)^2 - ac(s+t)^2 > 0,$$

im zweiten und vierten

$$\Delta(1-st)^2 - ac(s-t)^2 > 0.$$

---

[2]) Genauer: diese hat die Gestalt δ, wenn etwa u negativ ist, v, U, V positiv sind und $-u$, v, U, V als Veränderliche in $\mathfrak{Q}$ angesehen werden. Die anderen Möglichkeiten der Vorzeichen von u, v, U, V stellen Bedingungen, die mit (7), (8), (9), (10) erfüllt sind.

Die an (6) geknüpften Bemerkungen rechtfertigen für B die Umformung

$$(11)\quad B = \frac{1}{4\pi^2}\exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\varphi(X,Y)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv\,dU\,dV$$

$$\cdot\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v) - \tfrac{1}{2}\psi(U,V) - suU - tvV + i(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v + XU + YV)\right].$$

Jetzt integrieren wir nach V, U, v, u der Reihe nach und bedienen uns dabei jeweils der Formel (1. 21). Sie ergibt für das Integral

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{a}{2\Delta}V^2 + iV\left[Y + i\left(tv - \frac{b}{\Delta}U\right)\right]\right\}dV$$

bei Gebrauch der neuen Veränderlichen $a^{\frac{1}{2}}(2\Delta)^{-\frac{1}{2}}V$, wo $a\Delta^{-1} > 0$ nach (1. 5),

$$K_1 = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2\Delta}{a}}\exp\left\{-\frac{\Delta}{2a}\left[Y + i\left(tv - \frac{b}{\Delta}U\right)\right]^2\right\};$$

daher verwandelt sich (11) mit Hilfe von (1. 10) in

$$(12)\quad B = \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2\Delta}{a}}\exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\varphi(X,Y) - \frac{\Delta}{2a}Y^2\right]$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(u,v) + \frac{\Delta}{2a}t^2v^2 + i\left(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v - \frac{\Delta}{a}tYv\right)\right]$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dU\exp\left\{-\frac{1}{2a}U^2 + iU\left[\frac{1}{a}\mathfrak{X} + i\left(su + \frac{b}{a}tv\right)\right]\right\}.$$

Das Integral K_2 nach U in der letzten Zeile wird mit der Veränderlichen $(2a)^{-\frac{1}{2}}U$, wo $a > 0$ laut (1. 5), nach (1. 21)

$$K_2 = \sqrt{\pi}\sqrt{2a}\exp\left\{-\frac{1}{2a}\left[\mathfrak{X} + i(asu + btv)\right]^2\right\};$$

mithin vereinfacht man (12), wenn man (1. 10), (1. 7) und die daraus folgenden Beziehungen

$$X = \frac{c}{\Delta}\mathfrak{X} - \frac{b}{\Delta}\mathfrak{Y},\quad Y = -\frac{b}{\Delta}\mathfrak{X} + \frac{a}{\Delta}\mathfrak{Y},\quad \varphi(X,Y) = \psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$$

beachtet, zu

$$(13)\quad B = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\varphi(x,y)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} du\exp\left[-\frac{1}{2}a(1-s^2)u^2 + iu(\mathfrak{x} - s\mathfrak{X})\right]$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dv\exp\left\{-\frac{1}{2}c(1-t^2)v^2 + iv[\mathfrak{y} - t\mathfrak{Y} + ib(1-st)u]\right\}.$$

Unter dem letzten, nach v zu nehmenden Integrale K_3 führt man die neue Veränderliche $[\frac{1}{2}c(1-t^2)]^{\frac{1}{2}}v$ ein, wo $c(1-t^2)>0$ entsprechend (9); (1. 21) liefert dann

$$K_3 = \sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c(1-t^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2c(1-t^2)}[\mathfrak{y}-t\mathfrak{Y}+ib(1-st)u]^2\right\}.$$

In (13) eingesetzt, gibt das wegen (1. 6)

$$(14)\qquad B = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2c(1-t^2)}}\exp\left[\frac{1}{2}\varphi(x,y)-\frac{1}{2c(1-t^2)}(bx+cy-t\mathfrak{Y})^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} du\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[a(1-s^2)-\frac{b^2(1-st)^2}{c(1-t^2)}\right]u^2\right.$$
$$\left.+\frac{iu}{c(1-t^2)}[(\Delta+b^2st-act^2)x+bct(s-t)y-cs(1-t^2)\mathfrak{X}+bt(1-st)\mathfrak{Y}]\right\}.$$

In dem einzigen noch vorhandenen Integral K_4 erkennen wir die erste eckige Klammer in der Form

$$\frac{\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2}{c(1-t^2)}$$

als positiv; denn vom Nenner vermerkten wir dies bei K_3, und der Zähler ist bis auf den positiven Faktor Δ entweder gleich der linken Seite von (10) oder gleich

$$\Delta(1-\sigma\tau)^2-ac(\sigma-\tau)^2=\Delta(1+\sigma\tau)^2-ac(\sigma+\tau)^2+4b^2\sigma\tau.$$

Mit $[\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2]^{\frac{1}{2}}[2c(1-t^2)]^{-\frac{1}{2}}u$ als neuer Integrationsveränderlichen erhält man nach (1. 21)

$$K_4 = \sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2c(1-t^2)}}{\sqrt{\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2c(1-t^2)[\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2]}\right.$$
$$\left.\cdot[(\Delta+b^2st-act^2)x+bct(s-t)y-cs(1-t^2)\mathfrak{X}+bt(1-st)\mathfrak{Y}]^2\right\}.$$

Übernimmt man dies in (14) und ordnet dann dort rechts den Exponenten als quadratische Form der vier Veränderlichen $x, y, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, so erhält man *in* § (4) *die Entwicklung*

$$(15)\qquad \sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}G_{mn}(x,y)H_{mn}(X,Y)$$
$$=\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta(1-st)^2-ac(s-t)^2}\right.$$
$$\cdot[s^2(1-t^2)(a\Delta x^2+c\mathfrak{X}^2)+t^2(1-s^2)(c\Delta y^2+a\mathfrak{Y}^2)$$
$$+2bst(1-st)(\Delta xy-\mathfrak{X}\mathfrak{Y})+2bst(s-t)(ax\mathfrak{Y}-cy\mathfrak{X})$$
$$\left.-2s(\Delta+b^2st-act^2)x\mathfrak{X}-2t(\Delta-acs^2+b^2st)y\mathfrak{Y}]\right\}.$$

Von den Erzeugenden (15), (1. 8), (1. 11) ist bemerkenswert, daß sie in den angegebenen Spielräumen der Veränderlichen stets positiven Zeichens sind, wie dies auch Watson bei *einer* Unabhängigen x von dem Mehlerschen Ausdruck (1. 2) hervorhebt[3]).

Übrigens entnimmt man aus (15), (1. 8), (1. 11) die bekannte Gestalt[4]) so vieler Hermitescher Polynome, wie man will, z. B. aus (15) sogar gleichzeitig die G_{mn} und H_{mn}; wir verfolgen dies bis zum zweiten Grade: Entwickelt man rechts den Faktor vor exp in die binomische Reihe $(1-\beta)^{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{B}$, exp selbst in die Exponentialreihe $e^{\gamma} = \mathfrak{E}$, so kommt aus den Gliedern 1 in $\mathfrak{E}$, 1 in $\mathfrak{B}$

$$G_{00}(x, y)\, H_{00}(X, Y) = 1.$$

Als Vorzahlen von s und t entstehen aus γ in $\mathfrak{E}$, 1 in $\mathfrak{B}$

$$G_{10}(x, y)\, H_{10}(X, Y) = x\mathfrak{X}, \quad G_{01}(x, y)\, H_{01}(X, Y) = y\,\mathfrak{Y};$$

als Vorzahlen von $\frac{1}{2}s^2$, $\frac{1}{2}t^2$, st aus 1 in $\mathfrak{E}$ und $\frac{1}{2}\beta$ in $\mathfrak{B}$, aus γ in $\mathfrak{E}$ und 1 in $\mathfrak{B}$, aus $\frac{1}{2}\gamma^2$ in $\mathfrak{E}$ und 1 in $\mathfrak{B}$

$$G_{20}(x, y)\, H_{20}(X, Y) = \left(x^2 - \frac{c}{\Delta}\right)(\mathfrak{X}^2 - a),$$

$$G_{02}(x, y)\, H_{02}(X, Y) = \left(y^2 - \frac{a}{\Delta}\right)(\mathfrak{Y}^2 - c),$$

$$G_{11}(x, y)\, H_{11}(X, Y) = \left(xy + \frac{b}{\Delta}\right)(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y} - b).$$

Es lohnt sich, die Richtigkeit von (15) in dem Sonderfalle $a = c = 1$, $b = 0$ zu bestätigen, in dem $H_{mn}(u, v)$, $G_{mn}(u, v)$ nach A.-K., S. 372 gemeinsam in das Produkt $H_m(u)\, H_n(v)$ (1. 1) entarten. Die linke Seite von (15) zerfällt dann in

$$\sum_{m}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x)\, H_m(X) \sum_{n}^{0,\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y)\, H_n(Y) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{s}{2(1-s^2)}[2xX - s(x^2 + X^2)] + \frac{t}{2(1-t^2)}[2yY - t(y^2 + Y^2)]\right\};$$

den Wert jeder der beiden Summen liefert (1. 2). Zu eben diesem Werte vereinfacht sich sogleich die rechte Seite. Die Formeln (1. 8), (1. 11) entarten in dieselbe Gestalt.

[3]) G. N. Watson, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), S. 292.
[4]) Vgl. das Verzeichnis der G_{mn}, H_{mn} in A.-K. (1. [1])), S. 371.

§ 2.

Integraleigenschaften der Polynome $G_{mn}(x, y)$, $H_{mn}(x, y)$.

Wir wollen jetzt aus (15), (1. 8), (1. 11) für unsere Polynome einige funktionale Beziehungen erschließen; um diese kurz schreiben zu können, bezeichnen wir die in den Erzeugenden unter dem Zeichen exp stehenden quadratischen Formen der x, y, X, Y [5]) entsprechend (3), (1), (2) mit $-\frac{1}{2}\Phi_B$, $-\frac{1}{2}\Phi_G$, $-\frac{1}{2}\Phi_H$ von x, y, X, Y; s, t. Vergleichen wir die Werte der Vorzahlen bei der Entwicklung einer willkürlichen Funktion [6])

$$F(x, y) = \sum_{m,n}^{0,\infty} A_{mn} H_{mn}(x, y), \tag{16}$$

$$F(x, y) = \sum_{m,n}^{0,\infty} C_{mn} G_{mn}(x, y), \tag{17}$$

nämlich

$$A_{mn} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \frac{1}{m!\,n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(u, v)\right] F(u, v)\, G_{mn}(u, v)\, du\, dv, \tag{18}$$

$$C_{mn} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \frac{1}{m!\,n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(u, v)\right] F(u, v)\, H_{mn}(u, v)\, du\, dv, \tag{19}$$

mit den zu den besonderen Funktionen (15), (1. 8), (1. 11) wirklich gefundenen Beiwerten! Wir erhalten dann mit geringen Änderungen der Schreibweise aus der in der Gestalt (17) vorgestellten Reihe (15) nach (19)

$$s^m t^n H_{mn}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta(1 - st)^2 - ac(s - t)^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(x, y) - \tfrac{1}{2}\Phi_B(x, y, X, Y;\ s, t)\right] H_{mn}(x, y)\, dx\, dy; \tag{20}$$

in der Form (16) liefert (15) nach (18)

$$s^m t^n G_{mn}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta(1 - st)^2 - ac(s - t)^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(x, y) - \tfrac{1}{2}\Phi_B(X, Y, x, y;\ s, t)\right] G_{mn}(x, y)\, dx\, dy. \tag{21}$$

---

[5]) $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ in (1. 11), (15) drücken sich mittels (1. 6), (1. 10) durch $x, y; X, Y$ aus.

[6]) A.-K., S. 384.

Entsprechend findet man aus den jeweils nur in *einer* Gestalt (17), (16) auf faßbaren Reihen (1. 8), (1. 11)

$$(22)\qquad s^m t^n G_{mn}(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(\Delta+st)^2-(cs+at)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)-\tfrac{1}{2}\Phi_G(x,y,X,Y;s,t)\right] H_{mn}(x,y)\,dx\,dy,$$

$$(23)\qquad s^m t^n H_{mn}(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(1+\Delta st)^2-(as+ct)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)-\tfrac{1}{2}\Phi_H(x,y,X,Y;s,t)\right] G_{mn}(x,y)\,dx\,dy.$$

(20), (21) gelten in (4), (22) in (1. 9), (23) in (1. 12). Es versteht sich, daß bei der eingangs genannten Verwandlung $\mathfrak{W}$ (20) in (21), (22) in (23) übergeht und umgekehrt.

Unsere vier Formeln (20), (21), (22), (23) in zwei Veränderlichen X, Y entsprechen der einzigen, die bei einer Veränderlichen X ebenso aus der Mehlerschen Formel (1. 2) und dem allgemeinen Ausdruck der Entwicklungs-Vorzahlen[7]) entsteht:

$$(24)\; s^n H_n(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}-\frac{s}{2(1-s^2)}\left[s(x^2+X^2)-2xX\right]\right\} H_n(x)\,dx.$$

Setzt man hierin $X = 0$, so verschwindet bei ungeradem $n = 2\nu+1$ die rechte Seite wegen der Ungeradheit des Integranden — im Einklang mit $H_{2\nu+1}(0) = 0$[8]). Bei geradem $n = 2\nu$ bleibt

$$(25)\qquad s^{2\nu} H_{2\nu}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1-s^2)}\right] H_{2\nu}(x)\,dx;$$

man darf dabei wegen der Geradheit des Integranden $2\int_0^{\infty}$ statt $\int_{-\infty}^{+\infty}$ schreiben. Ich bemerke, daß dann (25) mit einer von Doetsch angegebenen, im wesentlichen das Laplacesche Bild des geraden Hermiteschen Polynoms liefernden Formel[9]) übereinkommt. Man erkennt dies sogleich, wenn man in (25) $H_{2\nu}(0)$ nach[8]) durch $(-1)^{\nu}\,2^{-\nu}\,(2\nu)!\;(\nu!)^{-1}$, ferner $H_{2\nu}(x)$ wegen abweichender Normung durch $2^{-\nu} H_{2\nu}(2^{-\frac{1}{2}}x)$ und schließlich $(1-s^2)^{-1}$ durch $s = t_0 t^{-1}$ ersetzt. Dabei geht (1. 2) für $X = 0$ in die von Doetsch auf bemerkenswerte

---

[7]) A.-K., S. 348, (37).

[8]) A.-K., S. 357.

[9]) G. Doetsch, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 591, Formel (A).

andere Art gefundene Reihenentwicklung [9]), (7) über, die sich damit als Sonderfall der Mehlerschen Formel erweist.

Zum Schluß verzeichne ich für die H_{mn}, G_{mn} die vier Beziehungen, die der einen (25) für die H_n entsprechen; sie gehen aus (20), . . . , (23) hervor, wenn man dort $X = Y = 0$ setzt, und lauten

$$(26)\qquad s^m t^n H_{mn}(0,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta(1-st)^2 - ac(s-t)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(x,y) - \frac{1}{2}\Delta\frac{\varphi(sx,ty) - s^2t^2\varphi(x,y)}{\Delta(1-st)^2 - ac(s-t)^2}\right] H_{mn}(x,y)\,dx\,dy,$$

$$(27)\qquad s^m t^n G_{mn}(0,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta(1-st)^2 - ac(s-t)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(x,y) - \frac{1}{2}\Delta\frac{\psi(s\mathfrak{x},t\mathfrak{y}) - s^2t^2\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\Delta(1-st)^2 - ac(s-t)^2}\right] G_{mn}(x,y)\,dx\,dy\ [10]),$$

$$(28)\qquad s^m t^n G_{mn}(0,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2\psi(sx,ty) - s^2t^2\varphi(x,y)}{(\Delta+st)^2 - (cs+at)^2}\right] H_{mn}(x,y)\,dx\,dy,$$

$$(29)\qquad s^m t^n H_{mn}(0,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(1+\Delta st)^2 - (as+ct)^2}}$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\varphi(s\mathfrak{x},t\mathfrak{y}) - \Delta^2s^2t^2\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{(1+\Delta st)^2 - (as+ct)^2}\right] G_{mn}(x,y)\,dx\,dy\ [10]).$$

Von Belang sind diese vier Formeln, wenn $m + n$ gerade ist. Bei ungeraden Werten dieser Zahl verschwinden ihre linken Seiten, wie die aus (1. 3), (1. 4) leicht abzulesenden Beziehungen

$$(30)\qquad H_{mn}(-x,-y) = (-1)^{m+n} H_{mn}(x,y),$$
$$G_{mn}(-x,-y) = (-1)^{m+n} G_{mn}(x,y)$$

lehren. Daß im Einklang damit auch die Integrale in (26), . . . , (29) rechts den Wert 0 haben, erkennt man gleichfalls von vornherein, indem man die Integrationen auf die Strecke $0 \ldots +\infty$ zurückführt und (30) anwendet. Anders ausgedrückt: Die genannten rechten Seiten, durch $m!\,n!$ geteilt, sind die Vorzahlen (19), (18), die den Funktionen (15), (1. 8), (1. 11) für $X = Y = 0$ zugehören; da in deren Entwicklungen nach Potenzen von x, y

[10]) Vgl. [5]).

oder $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ keine Potenzprodukte ungeraden Gesamtgrades auftreten, so auch[11]) keine solchen G_{mn}, H_{mn}.

Setzt man unter die Integralzeichen auf den rechten Seiten von (26), . . ., (29) statt $H_{mn}(x, y)$, $G_{mn}(x, y)$ eine willkürliche Funktion $F(x, y)$, so kommen für diese vier lineare funktionale Abbildungen zustande, auf die ausdrücklich hingewiesen sei. Sie stellen Seitenstücke zu *der* Abbildung $\mathfrak{t}(f)$ der Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen dar, die man erhält, wenn man in (25) $H_{2\nu}(x)$ durch $f(x)$ ersetzt. $\mathfrak{t}$ läßt sich dadurch, daß man, wie bei (25) erwähnt, s statt $(1 - s^2)^{-1}$ schreibt, nach[9]) auf die gewohnte Laplacesche Abbildung zurückführen.

---

[11]) Nach A.-K., S. 385, (74) und (75); aus diesen Formeln kann man die Darstellung der Potenzprodukte durch die G_{mn}, H_{mn} entnehmen.

(Eingegangen am 18. Oktober 1937.)

Berichtigungen.

Zu Band 40.

S. 269, b) 2. Gleichung: rechts Faktor $\frac{(m-1)!}{(m-l)!}$ beifügen.

S. 270, § 1, vorletzter Satz: $\bar{r}$ hinter „Nullstelle" statt hinter „Maximum".

S. 271, Z. 3: (11) statt (12).

S. 273, Satz 2, Z. 9: $|z| = \varrho$ statt $|z| = r$.

S. 275, Z. 2: μ statt n.

S. 278, [11]: 1929 statt 1931.

Zu Band 43, 32—37.

There is a slight defect in the enunciation and proof of theorem (2). The form (β) must be replaced by

(β') $$f = (B e^{u} + D)^{m}, \quad g = E(B + D e^{-u})^{m},$$

m being a positive integer. Starting from the relation [equation (10), p. 35, of the paper]

(10′) $$g^{d-1} = \lambda[1 - e^{-(v-u)}],$$

it was deduced that $d - 1 = 1$. But *the correct deduction* from (10′) is that $\frac{1}{d-1} = m$, *a positive integer.* This is, in particular, true when $d - 1 = 1$. When $\frac{1}{d-1} = m$ we get $v - \left(1 + \frac{1}{m}\right)u$ is a constant and using this in (10′) we get the form (β'). The remaining parts of theorem 2 and its proof are valid without any change.

V. Ganapathy Iyer.